پاسخ‌های تشریحی

۱- (۲)

$$a_n=\frac{n^۲-۱}{n+۳}\Rightarrow ۳=\frac{n^۲-۱}{n+۳}\Rightarrow n^۲-۱=۳n+۹\Rightarrow n^۲-۳n-۱۰=۰$$

$\Rightarrow (n-۵)(n+۲)=۰\Rightarrow n=۵$ و $n=-۲\notin\mathbb{N}$ غیرقابل قبول

۲- (۲)

$$a_{۳n-۲}=\frac{۲\sqrt{n+۵}}{n^۲+۳}\quad,\quad a_۷=?$$

ابتدا باید ببینیم جمله‌ی هفتم به ازای چه nای حاصل می‌شود:

$$۳n-۲=۷\Rightarrow ۳n=۹\Rightarrow n=۳$$

حال برای به‌دست آوردن جمله‌ی هفتم باید در $a_{۳n-۲}=\frac{۲\sqrt{n+۵}}{n^۲+۳}$ به جای n عدد ۳ را قرار دهیم. داریم:

$$n=۳\Rightarrow a_{(۳\times۳)-۲}=\frac{۲\sqrt{۳+۵}}{۳^۲+۳}\Rightarrow a_۷=\frac{۲\sqrt{۸}}{۱۲}=\frac{۲\sqrt{۲^۲\times۲}}{۱۲}=\frac{۴\sqrt{۲}}{۱۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

۳- (۳) $\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳},\frac{۳}{۴},\frac{۴}{۵},\dots$ را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{۱+۱},\frac{۲}{۲+۱},\frac{۳}{۳+۱},\frac{۴}{۴+۱},\dots\Rightarrow a_n=\frac{n}{n+۱}$$

دانش‌پژوه (لاله صدیقی): **من اعداد طبیعی‌رو در گزینه‌ها جایگزین کردم و به این نتیجه رسیدم که گزینه‌ی (۳) صحیحه.**

پاسخ: *درسته. مورد داشتیم با کارای عجیب و غریب‌تر دیگه‌ای هم به جواب رسیدن!*

۴- (۳) الگوی مورد نظر را به‌صورت زیر می‌توان بیان کرد:

جمله‌ی اول: $۱^۳=۱^۲$

جمله‌ی دوم: $۱^۳+۲^۳=(۱+۲)^۲=۳^۲$

جمله‌ی سوم: $۱^۳+۲^۳+۳^۳=(۱+۲+۳)^۲=۶^۲$

جمله‌ی چهارم: $۱^۳+۲^۳+۳^۳+۴^۳=(۱+۲+۳+۴)^۲=۱۰^۲$

جمله‌ی پنجم: $۱^۳+۲^۳+۳^۳+۴^۳+۵^۳=(۱+۲+۳+۴+۵)^۲=۱۵^۲=۲۲۵$

۵- (۲) با توجه به شکل‌های داده شده، نسبت دایره‌های توپر به **کل دایره‌ها** در شکل (۱)، $\frac{۱}{۳}$، در شکل (۲)، $\frac{۲}{۵}$، در شکل (۳)، $\frac{۳}{۷}$ و ... می‌باشد. یعنی:

$$a_۱=\frac{۱}{۳},a_۲=\frac{۲}{۵},a_۳=\frac{۳}{۷},\dots\Rightarrow a_n=\frac{n}{۲n+۱}\Rightarrow a_{۱۰۰}=\frac{۱۰۰}{۲۰۰+۱}=\frac{۱۰۰}{۲۰۱}$$

دقت کنید! این نسبت را با نسبت دایره‌های توپر به خالی اشتباه نگیرید که در این‌صورت گزینه‌ی (۱) را به‌دست خواهید آورد.

۶- (۲) در شکل اول، یک مربع ۱×۱ در وسط و یک مربع در گوشه‌ها، در شکل دوم یک مربع ۲×۲ در وسط و ۲ مربع در گوشه‌ها، در شکل سوم یک مربع ۳×۳ در وسط و سه مربع در گوشه‌ها و به همین ترتیب در شکل nاُم، یک مربع $n\times n$ در وسط و n مربع در گوشه‌ها وجود دارند. پس $a_n=n^۲+n$ و در نتیجه $a_{۱۵}=۱۵^۲+۱۵=۲۴۰$.

سؤال: *دانش‌پژوه (حسن هوشیار):* **آقا! ما یه بار معلمون از بچه‌ها جمله‌ی عمومیِ دنباله‌ی ۲،۶،۱۲،۲۰،۳۰،... رو خواسته بود که هیچکی بلد نبود! انگار جواب، تعداد همین مربع‌هاست، این‌طوری با شکل‌ها خیلی راحت‌تر جمله‌ی عمومی پیدا شد!**

پاسخ: *بله. اگه کسی جمله‌ی عمومی دنباله‌ی ۲،۶،۱۲،۲۰،۳۰،... رو بخواد، پیدا کردنش از رو اعداد خیلی سخته ولی با یه الگوی درست، کار خیلی راحت‌تره. این‌جا می‌بینین که تعداد مربع‌های کوچک در هر مرحله، به ترتیب ۲، ۶، ۱۲،... هست.*

۷- (۲) به کمک الگویابی سعی می‌کنیم، ارتباط بین شماره‌ی دسته و جمله‌ی آخر را بیابیم. با توجه به پاسخ سؤال قبل داریم:

شماره دسته	جمله‌ی آخر	الگو
۱	۱	$۱^۲+۰$
۲	۵	$۲^۲+۱$
۳	۱۱	$۳^۲+۲$
۴	۱۹	$۴^۲+۳$

با توجه به الگوهای بیان شده به نظر جمله‌ی عمومی این دنباله به صورت $a_n=n^۲+(n-۱)$ می‌باشد. پس در دسته‌ی بیستم، جمله‌ی آخر، $a_{۲۰}=۲۰^۲+(۲۰-۱)=۴۱۹$ می‌باشد.

سؤال: *دانش‌پژوه (عرفان کشتکار)*: **آقا این راه اصلیه تسته؟ راه دیگه‌ای هم هست؟**

پاسخ: *برای شما که مجموع دنباله‌ی حسابی رو امسال نمی‌خونین آره، ولی یه راه دیگه هم هست که سالای دیگه می‌خونید.*

۸- (۴) با توجه به شکل صورت تست داریم:

$$\left.\begin{aligned} &\text{وتر مثلث اول} = \sqrt{۱^۲+۱^۲} = \sqrt{۲} \\ &\text{وتر مثلث دوم} = \sqrt{(\sqrt{۲})^۲+۱^۲} = \sqrt{۲+۱} = \sqrt{۳} \\ &\text{وتر مثلث سوم} = \sqrt{(\sqrt{۳})^۲+۱^۲} = \sqrt{۳+۱} = \sqrt{۴} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{وتر مثلث nاُم} = \sqrt{n+۱}$$

پس اندازه‌ی وتر مثلث هشتم (ضلع قائمه‌ی مثلث نهم) برابر $۳ = \sqrt{۹} = \sqrt{۸+۱}$ می‌باشد. بنابراین:

$$\text{مساحت مثلث نهم} = \frac{\text{حاصل‌ضرب اضلاع قائمه}}{۲} = \frac{۳\times ۱}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

۹- (۳)

$$a_۱ = ۵ \quad , \quad a_{n+۱} = ۴a_n \quad , \quad a_n = ?$$

$$n=۱ \Rightarrow a_۲ = ۴a_۱ \xrightarrow{a_۱=۵} a_۲ = ۴\times ۵ \ ; \ n=۲ \Rightarrow a_۳ = ۴a_۲ \xrightarrow{a_۲=۴\times۵} a_۳ = ۴^۲\times ۵$$

$$n=۳ \Rightarrow a_۴ = ۴a_۳ \xrightarrow{a_۳=۴^۲\times۵} a_۴ = ۴^۳\times ۵ \quad ,\ldots \quad \Rightarrow a_n = ۴^{n-۱}\times ۵$$

۱۰- (۴) برای یافتن مجموع مربعات ۱۱ جمله‌ی اول، مطابق الگوی بیان شده، به حاصل‌ضرب جمله‌های یازدهم و دوازدهم نیازمندیم. با توجه به رابطه‌ی $a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲}$ داریم:

$$n=۸ \Rightarrow a_۸ = a_۷ + a_۶ = ۱۳+۸ = ۲۱ \quad , \quad n=۹ \Rightarrow a_۹ = a_۸ + a_۷ = ۲۱+۱۳ = ۳۴$$

به همین ترتیب داریم:

$$a_{۱۰} = ۳۴+۲۱ = ۵۵ \quad , \quad a_{۱۱} = ۵۵+۳۴ = ۸۹ \quad , \quad a_{۱۲} = ۸۹+۵۵ = ۱۴۴$$

$$\Rightarrow \text{مجموع مربعات یازده جمله‌ی اول} = a_{۱۱}\times a_{۱۲} = ۸۹\times ۱۴۴ = ۱۲۸۱۶$$

۱۱- (۴)

$$a_۱ = ۲ \quad , \quad a_۲ = ۵ \quad , \quad a_۳ = ۱۴ \quad , \quad a_۴ = ?$$

با توجه به دنباله‌ی داده شده $a_۱ = ۲$، $a_۲ = ۵$ و $a_۳ = ۱۴$ می‌باشند. از رابطه‌ی بازگشتی داده شده داریم:

$$n=۱ \Rightarrow a_{۱+۲} = ۲a_{۱+۱} + xa_۱ \Rightarrow a_۳ = ۲a_۲ + xa_۱ \xrightarrow[a_۳=۱۴]{a_۱=۲\ ,\ a_۲=۵} ۱۴ = ۲(۵) + ۲x$$

$$\Rightarrow ۱۴ = ۱۰ + ۲x \Rightarrow ۴ = ۲x \Rightarrow x = ۲$$

بنابراین رابطه‌ی بازگشتی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$a_{n+۲} = ۲a_{n+۱} + ۲a_n \xrightarrow{n=۲} a_۴ = ۲a_۳ + ۲a_۲ \xrightarrow[a_۲=۵]{a_۳=۱۴} a_۴ = ۲(۱۴) + ۲(۵) = ۳۸$$

۱۲- (۱) شخص تا پایان ماه اول $\frac{۳}{۵}$ پولش را خرج کرده و $\frac{۲}{۵}$ آن باقی‌مانده است. لذا پول شخص در پایان ماه اول برابر است با:

$$a_۱ = \frac{۲}{۵}(۱۰۰۰) = ۴۰۰$$

به همین ترتیب پول شخص در پایان ماه دوم برابر است با:

$$a_۲ = \frac{۲}{۵}(۴۰۰ + ۱۰۰۰)$$

و در حالت کلی داریم:

$$a_n = \frac{۲}{۵}(a_{n-۱} + ۱۰۰۰) = \frac{۲}{۵}a_{n-۱} + ۴۰۰$$

پس $k = \frac{۲}{۵}$ و $l = ۴۰۰$ و لذا $l\times k = ۴۰۰\times\frac{۲}{۵} = ۱۶۰$.

۱۳- (۳) الگوی شکل داده شده در سؤال بیانگر یک دنباله‌ی مربعی با ضابطه‌ی $a_n = n^۲$ می‌باشد. بنابراین برای یافتن شماره‌ی جمله‌ی مورد نظر، جمله‌ی عمومی را برابر $۲^۶$ قرار می‌دهیم.

$$n^۲ = ۲^۶ \xrightarrow{۲^۶=۶۴} n^۲ = ۶۴ \Rightarrow n = ۸$$

۱۴- (۲) جمله‌ی عمومی دنباله‌ی مربعی $a_n = n^۲$ می‌باشد. با کم کردن هر جمله از جمله‌ی بعدی دنباله‌ی جدیدی مانند b_n حاصل می‌شود. داریم:

$$b_n = a_{n+۱} - a_n = (n+۱)^۲ - n^۲ = ۲n+۱ \xrightarrow{n=۵۵} b_{۵۵} = ۲(۵۵)+۱ = ۱۱۱$$

۱۵- (۲) **راه اول:** با توجه به این‌که در دنباله‌ی مثلثی جمله‌ی عمومی به‌صورت $a_n = \frac{n(n+۱)}{۲}$ می‌باشد، داریم:

$$\left.\begin{aligned} a_۶ &= \frac{۶(۶+۱)}{۲} = ۲۱ \\ a_۷ &= \frac{۷(۷+۱)}{۲} = ۲۸ \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_۶ + a_۷ = ۲۱+۲۸ = ۴۹$$

راه دوم: تعداد دایره‌ها در هر شکل به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$a_1 = 1 \quad , \quad a_2 = \underbrace{2}_{\text{شماره‌ی جمله‌ی فعلی}} + \overbrace{1}^{a_1} = 3 \quad , \quad a_3 = \underbrace{3}_{\text{شماره‌ی جمله‌ی فعلی}} + \overbrace{3}^{a_2} = 6 \Rightarrow a_4 = 4 + 6 = 10$

$\Rightarrow a_5 = 5 + 10 = 15 \Rightarrow a_6 = 6 + 15 = 21 \quad , \quad a_7 = 7 + 21 = 28 \Rightarrow a_6 + a_7 = 21 + 28 = 49$

راه سوم: همان‌طور که در نکته‌ی دوم درسنامه گفته شد، اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ی مثلثی و $\{b_n\}$ دنباله‌ی مربعی باشد، داریم:

$a_{n-1} + a_n = b_n = n^2 \Rightarrow a_6 + a_7 = b_7 = 7^2 = 49$

۱۶- (۴) **راه اول:** تعداد کل صفرها در مرحله‌ی nام را با a_n نشان می‌دهیم. اختلاف صفرهای توپر هر جمله با اندیس فرد و جمله‌ی قبلی آن یک ردیف به شکل $\lfloor$ می‌باشد که تعداد آن از اختلاف تعداد جملات دو جمله حاصل می‌شود.

اختلاف صفرهای توپر در شکل دوم و سوم $= a_3 - a_2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5 \quad , \quad a_5 - a_4 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$

پس به‌همین ترتیب برای اختلاف جملات یازدهم و دهم خواهیم داشت:

$a_{11} - a_{10} = 11^2 - 10^2 = 21$

سؤال: *دانش‌پژوه (علی فرزادی):* **ببخشید من گفتم که اختلاف صفرهای توپر جمله‌های دوم و اول برابر صفر میشه، اختلاف صفرهای توپر جمله‌های چهارم و سوم هم برابر صفر میشه، پس اختلاف صفرهای توپر جمله‌های یازدهم و دهم هم صفر میشه.**

پاسخ: *دقت کنید اختلاف صفرهای توپر هر جمله‌ی زوج و جمله‌ی قبلیش صفر میشه. اما اختلاف هر جمله‌ی فرد و جمله‌ی زوج قبلیش صفر نمیشه. مثلاً اختلاف صفرهای توپر جمله‌های سوم و دوم ۵ تاست. این جا هم اختلاف صفرهای توپر جمله‌های یازدهم و دهم رو خواسته.*

راه دوم: فرض کنید تعداد صفرهای توپر در مرحله‌ی nاُم، b_n باشد. با توجه به مطالب درسنامه در مورد دنباله‌ی مثلثی (اگر نخوانده‌اید لطفاً همین الان برگردید!) و شکل‌های داده شده، دو حالت زیر را داریم:

۱) اگر n فرد باشد، تعداد دایره‌های توپر برابر جمله‌ی nاُم دنباله‌ی مثلثی است. مثلاً:

تعداد صفرهای توپر در مرحله‌ی سوم $= b_3 =$ جمله‌ی سوم دنباله‌ی مثلثی $= \frac{3(4)}{2} = 6 \quad , \quad b_{11} =$ جمله‌ی یازدهم دنباله‌ی مثلثی $= \frac{11(12)}{2} = 66$

۲) اگر n زوج باشد، تعداد دایره‌های توپر برابر جمله‌ی $(n-1)$اُم دنباله‌ی مثلثی است. مثلاً:

$b_2 =$ جمله‌ی اول دنباله‌ی مثلثی $= \frac{1(2)}{2} = 1 \quad , \quad b_{10} =$ جمله‌ی نهم دنباله‌ی مثلثی $= \frac{9(10)}{2} = 45$

پس $b_{11} - b_{10} = 66 - 45 = 21$.

۱۷- (۱) با توجه به شکل‌ها جدول مقابل را داریم:

شماره‌ی جمله	۱	۲	۳	۴	۵	...
تعداد کل دایره‌ها	۱	2^2	3^2	4^2	5^2	...
تعداد دایره‌های توپر	۱	۲	۵	۸	۱۳	...
تعداد دایره‌های توخالی	۰	۲	۴	۸	۱۲	...

همان‌طور که از جدول مشخص است، در جملات با شماره‌ی زوج تعداد دایره‌های توپر و توخالی برابر است و در جملات با شماره‌ی فرد، تعداد توپرها یکی بیشتر از توخالی‌ها است. بنابراین تعداد کل دایره‌ها در شکل (۱۱) برابر 11^2 یا ۱۲۱ می‌باشد که تعداد دایره‌های توپر یکی بیشتر از تعداد دایره‌های توخالی است. پس ۶۱ دایره‌ی توپر و ۶۰ دایره‌ی توخالی داریم.

۱۸- (۴)

$2a_1 + 3a_2 - 5a_3 = 8 \quad , \quad 5a_1 - 3a_2 - 2a_3 = ?$

فرض کنید d قدرنسبت دنباله‌ی حسابی باشد. از رابطه‌ی $a_n = a_1 + (n-1)d$ داریم:

$2a_1 + 3a_2 - 5a_3 = 8 \Rightarrow 2a_1 + 3\underbrace{(a_1 + d)}_{a_2} - 5\underbrace{(a_1 + 2d)}_{a_3} = 8 \Rightarrow -7d = 8 \Rightarrow d = -\frac{8}{7} \qquad (*)$

$\Rightarrow 5a_1 - 3a_2 - 2a_3 = 5a_1 - 3(a_1 + d) - 2(a_1 + 2d) = -7d \overset{(*)}{=\!=} -7\left(-\frac{8}{7}\right) = 8$

۱۹- (۲)

$-2, 2, 6, \ldots \Rightarrow a_1 = -2 \quad , \quad d = 2 - (-2) = 4 \quad , \quad a_{15} = ?$

$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{15} = a_1 + 14d = -2 + 14(4) \Rightarrow a_{15} = -2 + 56 = 54$

۲۰- (۱)

$22a_1 + 88d = 110 \quad , \quad a_5 = ?$

$\underbrace{22a_1 + 88d}_{\text{فاکتور از } 22} = 110 \Rightarrow 22\underbrace{(a_1 + 4d)}_{a_5} = 110 \Rightarrow 22a_5 = 110 \Rightarrow a_5 = \frac{110}{22} = 5$

۲۱- (۴) با توجه به این که صورت تست، شماره‌ی جمله‌ای را می‌خواهد که مقدار آن جمله برابر صفر است، متوجه می‌شویم که باید n را به‌دست آوریم و a_n برابر صفر است.

$$۲۰۸ \ , \ ۲۰۴ \ , \ \ldots \Rightarrow a_1 = ۲۰۸ \ , \ d = ۲۰۴ - ۲۰۸ = -۴ \ , \ a_n = ۰ \ , \ n = ?$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow ۰ = ۲۰۸ + (n-1)(-۴) \Rightarrow ۰ = ۲۰۸ - ۴n + ۴ \Rightarrow ۴n = ۲۱۲ \Rightarrow n = ۵۳$$

۲۲- (۳)

$$a_1 = ۵ \ , \ d = ۸ - ۵ = ۳ \ , \ a_n = ۳k + ۲۰ \ , \ n = ?$$

$$a_n = ۵ + (n-1)۳ \xRightarrow{a_n = ۳k+۲۰} ۳k + ۲۰ = ۵ + ۳n - ۳ \Rightarrow ۳k + ۱۸ = ۳n \Rightarrow ۳(k+۶) = ۳n \Rightarrow n = k + ۶$$

پس این دنباله **$k+۶$ جمله** دارد.

۲۳- (۲)

$$a_1 = ۶۳ \ ، \ d = -۴ \ ، \text{تعداد جملات مثبت دنباله‌ی حسابی} = ?$$

$$\text{جمله‌ی } n\text{ام} = a_1 + (n-1)d > ۰ \Rightarrow ۶۳ + (n-1)(-۴) > ۰ \Rightarrow -۴(n-1) > -۶۳$$

$$\xRightarrow[\text{جهت علامت عوض می‌شود.}]{\text{دو طرف را بر ۴- تقسیم می‌کنیم.}} n - 1 < \frac{۶۳}{۴} \Rightarrow n - 1 < ۱۵/۷۵ \Rightarrow n < ۱۶/۷۵$$

چون $n \in \{۱، ۲، \ldots، ۱۶\}$ پس تعداد جملات مثبت دنباله‌ی فوق **۱۶ تا** می‌باشد.

۲۴- (۲) در شکل اول ۴ چوب کبریت برای ساخت به‌کار رفته است و در شکل‌های بعد در هر شکل ۳ چوب کبریت به **تعداد قبلی** اضافه شده است. بنابراین تعداد چوب کبریت‌ها بیانگر یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت $d = ۳$ و جمله‌ی اول $a_1 = ۴$ می‌باشند. داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = ۴ + (n-1)۳ \xRightarrow{n=۲۴} a_{۲۴} = ۴ + (۲۴-1)۳ = ۴ + ۶۹ = ۷۳$$

۲۵- (۴)

الگو	تعداد کل میز و صندلی	تعداد میز	تعداد صندلی	مرحله
در هر مرحله، ۶ صندلی	۹	۱	۸	۱
و یک میز یا به عبارتی ۷	۱۶	۲	$۸ + ۶ = ۱۴$	۲
میز و صندلی به تعداد قبلی اضافه می‌شود.	۲۳	۳	$۱۴ + ۶ = ۲۰$	۳

با توجه به الگوی یافت شده، دنباله‌ی تعداد میز و صندلی‌ها یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت $d = ۷$ و جمله‌ی اول $a_1 = ۹$ می‌باشد. لذا تعداد کل میز و صندلی‌ها در مرحله‌ی نهم برابر است با:

$$a_۹ = a_1 + (۹-1)d = ۹ + ۸(۷) = ۶۵$$

۲۶- (۴) اگر تعداد چوب کبریت‌ها در هر شکل را بشماریم با کمی دقت متوجه می‌شویم «جملات با شماره‌ی فرد» یعنی ...، ۳، ۸، ۱۳ یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول ۳ و قدرنسبت ۵ و «جملات با شماره‌ی زوج» یعنی ...، ۵، ۱۰، ۱۵ نیز یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول ۵ و قدرنسبت ۵ تشکیل می‌دهند.

بنابراین جمله‌ی عمومی را برای الگوی مورد نظر به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a_{۲n-1} = ۳ + (n-1)۵ = ۳ + ۵n - ۵ = ۵n - ۲ \\ a_{۲n} = ۵ + (n-1)۵ = ۵ + ۵n - ۵ = ۵n \end{cases}$$

تعداد چوب‌کبریت‌های به‌کار رفته در شکل چهل و پنجم برابر $a_{۴۵}$ می‌باشد. چون ۴۵ عددی فرد است، از $a_{۲n-1} = ۵n - ۲$ برای یافتن $a_{۴۵}$ باید استفاده شود. بنابراین:

$$۲n - 1 = ۴۵ \Rightarrow n = ۲۳ \Rightarrow a_{۴۵} = a_{۲(۲۳)-1} = ۵(۲۳) - ۲ = ۱۱۳$$

۲۷- (۴) در واقع اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ی حسابی باشد، تست حاصل $a_۷ + a_۸ + \cdots + a_{۱۸}$ را می‌خواهد. داریم:

$$\left.\begin{aligned} S_{۱۸} &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{۱۸} \\ S_۶ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_۶ \end{aligned}\right\} \xRightarrow[\text{تساوی از هم}]{\text{کم کردن دو طرف}} S_{۱۸} - S_۶ = a_۷ + a_۸ + \cdots + a_{۱۸}$$

پس باید $S_{۱۸} - S_۶$ را بیابیم. با توجه به فرمول صورت تست برای S_n داریم:

$$S_n = \frac{n(n-۱۵)}{۶} \Rightarrow S_{۱۸} - S_۶ = \frac{\overset{۳}{\cancel{۱۸}}(۱۸-۱۵)}{\cancel{۶}} - \frac{\overset{۱}{\cancel{۶}}(۶-۱۵)}{\cancel{۶}} = ۹ - (-۹) = ۱۸$$

۲۸- (۴) با توجه به دو جمله‌ی اول یعنی $\frac{1}{۳}$ و $\frac{1}{۲}$، قدرنسبت (d) به‌دست می‌آید:

$$d = \frac{1}{۳} - \frac{1}{۲} = \frac{۲ - ۳}{۶} = -\frac{1}{۶}$$

K جمله‌ی سوم و K' جمله‌ی چهارم این دنباله‌ی حسابی هستند، بنابراین:

$$K+K'=a_3+a_4=(a_1+2d)+(a_1+3d)=2a_1+5d=2\left(\frac{1}{2}\right)+5\left(-\frac{1}{6}\right)=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$$

۲۹- (۱)

$$2,4,6,8,10,\dots \Rightarrow a_1=2 \quad , \quad d=4-2=2 \quad , \quad a_n+a_{n-1}=?$$

$$a_n=a_1+(n-1)d=2+(n-1)(2)=2+2n-2\Rightarrow a_n=2n$$

می‌دانیم $a_{n-1}+d=a_n$، پس $a_{n-1}=a_n-d$، بنابراین $a_{n-1}=\underbrace{2n}_{a_n}-\underbrace{2}_{d}$. حال a_n+a_{n-1} را حساب می‌کنیم:

$$a_n+a_{n-1}=(2n)+(2n-2)=4n-2$$

۳۰- (۱)

نکته: در جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی، n (تعداد جملات) همیشه از درجه‌ی اول می‌باشد.

سؤال: *دانش‌پژوه (زیبا ساعتچی):* **میشه بگین چرا؟**

پاسخ: *آره میشه، دقت کن:*

$$a_n=a_1+(n-1)d\Rightarrow a_n=a_1+nd-d\Rightarrow a_n=n\underbrace{d}_{\alpha}+\underbrace{(a_1-d)}_{\beta}\Rightarrow a_n=\alpha n+\beta$$

چون α و β ثابت هستند و در عبارت نهایی، توان n، یک می‌باشد، پس از درجه‌ی اول است.

بنابراین با توجه به نکته‌ی گفته شده، گزینه‌ی (۱) یعنی $a_n=8n+1$ صحیح می‌باشد.

۳۱- (۳)

نکته: نمودار جملات یک دنباله‌ی حسابی همواره روی یک خط قرار دارند. دقت کنید:

۱- هیچ جمله‌ای در دنباله‌ی حسابی بیش از یک مقدار نمی‌گیرد.

۲- اندیس جملات دنباله‌ی حسابی (n) از ۱ شروع می‌شود.

بررسی گزینه‌ها:

۱) نقاط روی یک خط قرار دارند ولی با توجه به نمودار، برای اندیس (۱)، (a_1) بیش از یک مقدار (سه مقدار) داده شده است.

۲) نقطه‌ی متناظر با a_1 با بقیه روی یک خط قرار ندارد.

۳) همه‌ی نقاط روی یک خط قرار دارند، پس یک دنباله‌ی حسابی است. دقت کنید a_n برخلاف n می‌تواند هر مقداری حتی $\sqrt{2}$ باشد.

۴) همه‌ی نقاط روی یک خط قرار دارند، ولی چون n فقط مقادیر طبیعی را می‌پذیرد نقطه‌ی $(0,1)$ نباید در نمودار قرار می‌گرفت.

۳۲- (۱)

راه اول: می‌دانیم که قدرنسبت دنباله‌ی حسابی از تفاضل جمله‌ی اول از جمله‌ی دوم به دست می‌آید، یعنی $d=a_2-a_1$. بنابراین در جمله‌ی عمومی داده شده یعنی $a_n=\frac{7n+1}{2}$، مقادیر $n=1$ و $n=2$ را جایگزین می‌کنیم تا جملات اول و دوم به‌دست آیند:

$$\begin{cases} a_1=\frac{7(1)+1}{2}=\frac{8}{2} \\ a_2=\frac{7(2)+1}{2}=\frac{15}{2} \end{cases}\Rightarrow d=a_2-a_1=\frac{15}{2}-\frac{8}{2}=\frac{7}{2}=3/5$$

راه دوم:

نکته: هرگاه **جمله‌ی عمومی** یک دنباله‌ی حسابی (a_n) را داشته باشیم، **ضریب n برابر قدرنسبت** است.

با توجه به نکته‌ی گفته شده داریم:

$$a_n=\frac{7n+1}{2}=\frac{7}{2}n+\frac{1}{2}\Rightarrow n\ \text{ضریب}=d=\frac{7}{2}=3/5$$

۳۳- (۲)

$$a_1=4\ ,\ a_{n-1}=a_n-3\ ,\ a_n=?$$

$$a_{n-1}=a_n-3\Rightarrow \underbrace{a_n-a_{n-1}}_{d}=3\Rightarrow d=3$$

سؤال: *دانش‌پژوه (دنیا خوش‌گفتار):* **ببخشید من متوجه نشدم که چرا $d=a_n-a_{n-1}$ شد؟**

پاسخ: *مگه a_n و a_{n-1} دو جمله‌ی پشت سر هم نیستند، خب می‌دونیم که قدر نسبت (d) هم یعنی، تفاضل هر جمله از جمله‌ی بعد از خود، پس $d=a_n-a_{n-1}$. حالا به ادامه‌ی حل توجه کن:*

$$a_n=a_1+(n-1)d\Rightarrow a_n=4+(n-1)(3)\Rightarrow a_n=4+3n-3\Rightarrow a_n=3n+1$$

۳۴- (۳) میخ ۶ میلی‌متر در دیوار بوده و پس از (دقت کنید این کلمه‌ی «**پس از**» خیلی مهم است! و کتاب درسی هم در مثالی مشابه به آن اشاره کرده) هر ضربه‌ی چکش ۴ میلی‌متر در دیوار فرو می‌رود ($d=۴$). اگر $a_۱$ را میزان فرو رفتن میخ **پس از** ضربه‌ی اول بگیریم، $a_۱=۶+۴=۱۰$ می‌شود. جمله‌ی عمومی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$a_n=a_۱+(n-۱)d \Rightarrow a_n=۱۰+(n-۱)۴ \Rightarrow a_n=۱۰+۴n-۴ \Rightarrow a_n=۴n+۶ \Rightarrow k=۴, b=۶ \Rightarrow k-b=-۲$$

۳۵- (۴) ابتدا ساعت طی شده در نوبت اول توسط قطار را به دقیقه تبدیل می‌کنیم ($a_۱=۴\times۶۰=۲۴۰$). حال برای هر رفت یا برگشت ۵ دقیقه از مدت زمان نوبت قبل کم می‌کنیم تا به ۲ ساعت (۱۲۰ دقیقه) برسیم. دنباله‌ی حاصل به‌صورت زیر است:

۲۴۰ ، ۲۳۵ ، ۲۳۰ ، ... ، ۱۲۵ ، ۱۲۰

اعداد بالا تشکیل یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت ۵- و جمله‌ی اول ۲۴۰ می‌دهند. پس:

$$a_۱=۲۴۰ \ , \ a_n=۱۲۰ \ , \ d=-۵ \ , \ n=?$$

$$a_n=a_۱+(n-۱)d \Rightarrow ۱۲۰=۲۴۰+(n-۱)(-۵) \Rightarrow ۱۲۰=۲۴۰-۵n+۵ \Rightarrow ۵n=۲۴۵-۱۲۰ \Rightarrow n=۲۵$$

۳۶- (۱) نمره‌های علی در امتحانات دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت ۷ و جمله‌ی اول ۶۴ و نمره‌های محمد دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت ۹ و جمله‌ی اول ۵۳ می‌باشند. دنباله‌ی نمرات علی را با a_n و دنباله‌ی نمرات محمد را با b_n نشان می‌دهیم. داریم:

$$\text{نمره‌ی امتحان اول علی}: a_۱=۶۴ \xRightarrow{a_n=a_۱+(n-۱)d} \begin{cases} \text{نمره‌ی امتحان پنجم علی}: a_۵=۶۴+(۵-۱)۷=۶۴+۲۸=۹۲ \\ \text{نمره‌ی امتحان ششم علی}: a_۶=۶۴+(۶-۱)۷=۹۹ \end{cases}$$

سؤال: *دانش‌پژوه (الهام زند)*: **من گفتم $a_۶=a_۵+d$ و نمره‌ی امتحان ششم علی را $۹۹=۷+۹۲$ به‌دست آوردم.**

پاسخ: *آفرین! درسته.*

$$\text{نمره‌ی امتحان اول محمد}: b_۱=۵۳ \Rightarrow \begin{cases} \text{نمره‌ی امتحان پنجم محمد}: b_۵=۵۳+(۵-۱)۹=۸۹ \\ \text{نمره‌ی امتحان ششم محمد}: b_۶=۵۳+(۶-۱)۹=۹۸ \end{cases}$$

بنابراین نمرات علی در هر دو امتحان پنجم و ششم از محمد بیشتر بوده است.

۳۷- (۲)

> **نکته:** جملات مشترک دو دنباله‌ی حسابی a_n و b_n، خود تشکیل یک دنباله‌ی حسابی می‌دهند که قدر نسبت آن ک.م.م قدر نسبت‌های دنباله‌های a_n و b_n است.

$$a_۱=۳ \ , \ d_۱=۲ \ , \ b_۱=۲ \ , \ d_۲=۳ \ , \ \text{تعداد جملات مساوی}=?$$

جملات دنباله‌های a_n و b_n به شکل زیر هستند:

a_n جملات $=۳،\underline{۵}،۷،۹،\underline{۱۱}،۱۳،۱۵،\underline{۱۷}،...،۴۱$

b_n جملات $=۲،\underline{۵}،۸،\underline{۱۱}،۱۴،\underline{۱۷}،...،۵۹$

با توجه به جملات دنباله‌ها، جملات مشترک دنباله‌ها خود یک دنباله‌ی حسابی جدید (c_n) با جمله‌ی اول ۵ (اولین جمله‌ی مشترک دو دنباله) و قدرنسبت $۱۱-۵=۶$ می‌سازند و باید n یعنی تعداد جملات مشترک را بیابیم. چون آخرین جمله‌ی مشترک بین دو دنباله ۴۱ است، لذا:

$$c_n\le ۴۱ \Rightarrow ۵+۶(n-۱)\le ۴۱ \Rightarrow ۶(n-۱)\le ۳۶ \Rightarrow n-۱\le ۶ \Rightarrow n\le ۷$$

پس ۷ جمله‌ی مشترک در دنباله‌ها وجود دارد.

۳۸- (۲)

> **یادآوری:** اعدادی بر ۴ بخش‌پذیرند که دو رقم آخر آن‌ها بر ۴ بخش‌پذیر باشد.

اولین عدد سه رقمی بخش‌پذیر بر ۴ که رقم یکان آن ۴ باشد، ۱۰۴ است. عدد سه رقمی بعدی که رقم یکان آن ۴ باشد ۱۱۴ است، اما ۱۱۴ بر ۴ بخش‌پذیر نیست. (زیرا دو رقم آخر آن یعنی ۱۴ بر ۴ بخش‌پذیر نیست) عدد سه رقمی بعدی ۱۲۴ است که بر ۴ بخش‌پذیر است. هم‌چنین آخرین عدد سه رقمی بخش‌پذیر بر ۴ که به ۴ ختم شود، ۹۸۴ می‌باشد. پس دنباله‌ی این اعداد به‌صورت زیر است:

۱۰۴،۱۲۴،۱۴۴،...،۹۶۴،۹۸۴

دنباله‌ی مورد نظر یک دنباله‌ی حسابی با $a_۱=۱۰۴$، قدرنسبت $d=۲۰$ و جمله‌ی آخر $a_n=۹۸۴$ می‌باشد و باید تعداد جملات (n) را بیابیم.

$$a_n=a_۱+(n-۱)d \Rightarrow ۹۸۴=۱۰۴+(n-۱)(۲۰) \Rightarrow ۸۸۰=(n-۱)(۲۰)$$

$$\Rightarrow \frac{۸۸۰}{۲۰}=n-۱ \Rightarrow ۴۴=n-۱ \Rightarrow n=۴۵$$

۳۹- (۴)

$a_۸ = ۲a_{۱۳} \quad , \quad \frac{a_۲}{a_{۱۰}} = ?$

$a_۸ = ۲a_{۱۳} \xrightarrow{a_n = a_۱+(n-۱)d} a_۱+۷d = ۲(a_۱+۱۲d) \Rightarrow a_۱+۷d = ۲a_۱+۲۴d \Longrightarrow -۱۷d = a_۱$

حال باید نسبت $\frac{a_۲}{a_{۱۰}}$ را محاسبه کنیم:

$\frac{a_۲}{a_{۱۰}} = \frac{a_۱+d}{a_۱+۹d} \xrightarrow{a_۱ = -۱۷d} \frac{-۱۷d+d}{-۱۷d+۹d} = \frac{-۱۶d}{-۸d} = ۲$

سؤال: *دانش‌پژوه (غلام نقدی‌بیگ):* **ببخشید من قسمت قبل از $-۱۷d = a_n$ رو این‌طوری حل کردم:**

$a_۱+۷d = ۲a_۱+۲۴d \xrightarrow[-۶d \text{ می‌افزاییم.}]{\text{به دو طرف معادله}} a_۱+d = ۲a_۱+۱۸d \xrightarrow{a_۱+d=a_۲} a_۲ = ۲(\underbrace{a_۱+۹d}_{a_{۱۰}}) \Rightarrow a_۲ = ۲a_{۱۰}$

پاسخ: *گل گفتی، آی گل گفتی ...*

۴۰- (۴)

$a_۵+a_۶ = ۳ \;,\; a_۸+a_۹ = -۲ \;,\; a_{۱۳}+a_{۱۵} = ?$

$$\begin{cases} a_۵+a_۶ = ۳ \\ a_۸+a_۹ = -۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overbrace{a_۱+۴d}^{a_۵} + \overbrace{a_۱+۵d}^{a_۶} = ۳ \\ \underbrace{a_۱+۷d}_{a_۸} + \underbrace{a_۱+۸d}_{a_۹} = -۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲a_۱+۹d = ۳ \\ ۲a_۱+۱۵d = -۲ \end{cases}$$

با حل دستگاه بالا به روش حذفی یا روش‌های دیگر به‌دست می‌آید $d = -\frac{۵}{۶}$ و $a_۱ = \frac{۲۱}{۴}$. بنابراین:

$a_{۱۳}+a_{۱۵} = a_۱+۱۲d+a_۱+۱۴d = ۲a_۱+۲۶d = ۲(\frac{۲۱}{۴})+۲۶(\frac{-۵}{۶}) = \frac{۲۱}{۲} - \frac{۱۳۰}{۶} = \frac{-۶۷}{۶}$

۴۱- (۲) تعداد افراد معرفی شده جهت کار توسط مرکز کاریابی را در ماه‌های اول، دوم، سوم و چهارم به‌ترتیب $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$ و $a_۴$ بگیرید. داریم:

$a_۳+a_۴ = a_۱+a_۲+۱۰۰ \Rightarrow (a_۱+۲d)+(a_۱+۳d) = a_۱+(a_۱+d)+۱۰۰ \Rightarrow ۴d = ۱۰۰ \Rightarrow d = \frac{۱۰۰}{۴} = ۲۵$

تعداد کل افراد معرفی شده طی ۴ ماه از این مرکز ۳۹۸ نفر بوده است. بنابراین:

$a_۱+a_۲+a_۳+a_۴ = ۳۹۸ \Rightarrow a_۱+(a_۱+d)+(a_۱+۲d)+(a_۱+۳d) = ۳۹۸$

$\xrightarrow{d=۲۵} ۴a_۱+۶(۲۵) = ۳۹۸ \Rightarrow ۴a_۱ = ۲۴۸ \Rightarrow a_۱ = \frac{۲۴۸}{۴} = ۶۲ \Rightarrow$ ۶۲ نفر در ماه اول از این مرکز معرفی شده‌اند.

۴۲- (۱)

$a_۱ = \frac{۱}{۲} \quad , \quad a_{۱۰} = ۳۲ \quad , \quad d = ?$

$d = \frac{a_n - a_m}{n-m} = \frac{a_{۱۰}-a_۱}{۱۰-۱} = \frac{۳۲-\frac{۱}{۲}}{۹} = \left(\frac{\frac{۶۳}{۲}}{\frac{۹}{۱}}\right) \xrightarrow[\text{نزدیک در نزدیک}]{\text{دور در دور}} \frac{\cancel{۶۳}^{۷} \times ۱}{\cancel{۹}_{۱} \times ۲} = \frac{۷}{۲}$

۴۳- (۱)

$t_{۱۰} - t_۳ = ۲۸ \;,\; d = ?$

$d = \frac{t_n - t_m}{n-m} \Rightarrow d = \frac{t_{۱۰}-t_۳}{۱۰-۳} = \frac{۲۸}{۷} = ۴$

۴۴- (۳)

$a_m = ۲n \quad , \quad a_n = ۲m \quad , \quad d = ?$

$d = \frac{a_m - a_n}{m-n} = \frac{۲n-۲m}{m-n} = \frac{۲(n-m)}{-(n-m)} = -۲$

۴۵- (۲)

$a_۱+a_۲ = ۷/۵ \;,\; a_۳+a_۴ = ۵/۵ \;,\; d = ?$

برای محاسبه‌ی d در دنباله‌ی حسابی می‌توانیم **اختلاف بین جملات** را بیابیم.

$(a_۳+a_۴)-(a_۱+a_۲) = ۵/۵ - ۷/۵ \Rightarrow (a_۳-a_۱)+(a_۴-a_۲) = -۲ \Rightarrow (۳-۱)d+(۴-۲)d = -۲$

$\Rightarrow ۴d = -۲ \Rightarrow d = -\frac{۲}{۴} = -\frac{۱}{۲}$

۴۶- (۲) دقت کنید همواره شماره‌ی **آخرین جمله‌ی** k جمله‌ی n ام، برابر nk می‌شود. بنابراین شماره‌ی آخرین جمله‌ی ۴ جمله‌ی دوم، برابر $2\times 4=8$ و شماره‌ی آخرین جمله‌ی ۴ جمله‌ی چهارم، $4\times 4=16$ می‌باشد. یعنی ۴ جمله‌ی دوم a_8، a_7، a_6، a_5 و چهار جمله‌ی چهارم a_{16}، a_{15}، a_{14}، a_{13} هستند.

$$a_1=3+\sqrt{2}\quad,\quad a_2=5+\sqrt{2}\quad,\quad (a_{13}+a_{14}+a_{15}+a_{16})-(a_5+a_6+a_7+a_8)=?$$

$$(a_{13}+a_{14}+a_{15}+a_{16})-(a_5+a_6+a_7+a_8)=(a_{13}-a_5)+(a_{14}-a_6)+(a_{15}-a_7)+(a_{16}-a_8)$$

$$(13-5)d+(14-6)d+(15-7)d+(16-8)d=8d+8d+8d+8d=32d \xrightarrow{d=a_2-a_1} 32[(5+\sqrt{2})-(3+\sqrt{2})]=32(2)=64$$

۴۷- (۳) ابتدا صورت تست را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم (دقت کنید اصلی‌ترین کار حل همین‌جاست!):

$$(I): a_1+a_3+a_5+\dots+a_{19}=135$$

$$(II): a_2+a_4+a_6+\dots+a_{20}=150$$

سؤال: *دانش‌پژوه (اکبر شمس‌الریاضیات):* **آقا ما هر چی فکر کردیم نشد بفهمیم که چی شد؟!!**

پاسخ: *ببین خورشید ریاضیات! صورت تست گفته مجموع جملات ردیف فرد یعنی همون جملات با اندیس فرد که میشن a_1، a_3 و ...، برابر ۱۳۵ شده. پس $a_1+a_3+\dots+a_{19}=135$ و به همین ترتیب برای جملات ردیف زوج. ... اُفتاد!!*

سؤال: *دانش‌پژوه (اکبر شمس‌الریاضیات):* **آقا چی افتاد؟! من وسایلم همه رو میزه!**

پاسخ: *برو بیرون اکبرجان ... . بقیه توجه کنن:*

می‌دانیم در دنباله‌ی حسابی اختلاف دو جمله‌ی متوالی (پشت سر هم) برابر قدرنسبت است. با توجه به این امر داریم:

$$(II)-(I)=150-135 \Rightarrow (a_2+a_4+\dots+a_{20})-(a_1+a_3+\dots+a_{19})=15$$

$$\xrightarrow{\text{بازنویسی}} \underbrace{(a_2-a_1)}_{d}+\underbrace{(a_4-a_3)}_{d}+\dots+\underbrace{(a_{20}-a_{19})}_{d}=15 \Rightarrow \underbrace{d+d+\dots+d}_{\text{۱۰ تا}}=15 \Rightarrow 10d=15 \Rightarrow d=\frac{3}{2}$$

سؤال: *دانش‌پژوه (مسعود سه‌رهی):* **آقا ببخشید چرا ۱۰ تا d شد؟**

پاسخ: *ببین هر دو تا جمله داره یه دونه d به ما میده. کلاً هم ۲۰ تا جمله وجود داره. پس ۱۰ تا d میشه.*

۴۸- (۱) ابتدا باید بررسی کنیم این مخرج‌ها از کجا آمده‌اند! می‌دانیم (d قدرنسبت) $\underbrace{d=a_n-a_{n-1}}_{(*)}$ و نیز $\underbrace{\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}=\frac{a_2-a_1}{a_1a_2}}_{(**)}$. داریم:

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\dots+\frac{1}{a_{39}a_{40}}=\frac{d}{d}\left(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\dots+\frac{1}{a_{39}a_{40}}\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{d}{a_1a_2}+\frac{d}{a_2a_3}+\dots+\frac{d}{a_{39}a_{40}}\right)$$

$$\overset{(*)}{=}\frac{1}{d}\left(\frac{\overbrace{a_2-a_1}^{d}}{a_1a_2}+\frac{\overbrace{a_3-a_2}^{d}}{a_2a_3}+\dots+\frac{\overbrace{a_{40}-a_{39}}^{d}}{a_{39}a_{40}}\right)\overset{(**)}{=}\frac{1}{d}\left[\left(\frac{1}{a_1}-\cancel{\frac{1}{a_2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{a_2}}-\cancel{\frac{1}{a_3}}\right)+\dots+\left(\cancel{\frac{1}{a_{39}}}-\frac{1}{a_{40}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{40}}\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{a_{40}-a_1}{a_1a_{40}}\right)=\frac{1}{\cancel{d}}\left(\frac{39\cancel{d}}{a_1a_{40}}\right)=\frac{39}{a_1a_{40}}$$

۴۹- (۱)

$$a_1=5\ ,\ a_7=a_{11}+12\ ,\ a_{10}=?$$

$$a_{11}-a_7=-12 \Rightarrow 4d=-12 \Rightarrow d=-3 \Rightarrow a_{10}=a_1+9d \Rightarrow a_{10}=5+9(-3)=5-27=-22$$

۵۰- (۱)

$$a_1=125\ ,\ a_2=x\ ,\ a_3=35\ ,\ a_4=y\ ,\ \dots$$

$$d=\frac{a_3-a_1}{3-1}=\frac{35-125}{2}=\frac{-90}{2}=-45$$

$$a_4=a_3+d \Rightarrow y=35+d \Rightarrow y=35+(-45)=-10$$

البته می‌توانستیم در قسمت آخر از $a_4=a_1+3d=125+3(-45)=-10$ هم جواب را به‌دست آوریم.

۵۱- (۳)

$$a_1=3\quad,\quad a_5=19\quad,\quad a_n=55\quad,\quad n=?$$

$$d=\frac{a_5-a_1}{5-1}=\frac{19-3}{4}=\frac{16}{4} \Rightarrow d=4$$

$$a_n=a_1+(n-1)d \Rightarrow 55=3+(n-1)(4) \Rightarrow 52=4n-4 \Rightarrow 52+4=4n \Rightarrow 4n=56 \Rightarrow n=14$$

۵۲- (۱)

$$a_5 = 12 \quad , \quad a_8 = 18 \quad , \quad \frac{d}{a_{11}} = ?$$

$$d = \frac{a_8 - a_5}{8 - 5} = \frac{18 - 12}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$a_{11} = a_8 + (11 - 8)d \Rightarrow a_{11} = 18 + 3(2) = 24 \Rightarrow \frac{d}{a_{11}} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

۵۳- (۴) اگر دو عدد که تفاضل آن‌ها ۸۴۰ می‌باشد را a و b درنظر بگیریم، داریم:

$$b - a = 840 \quad , \quad m = 5 \quad , \quad d = ?$$

$$d = \frac{b - a}{m + 1} = \frac{840}{5 + 1} = \frac{840}{6} = 140$$

۵۴- (۲)

$$a = \sqrt{3} - 5 \quad , \quad b = 5 + \sqrt{3} \quad , \quad d = 1 \quad , \quad m = ?$$

$$d = \frac{b - a}{m + 1} \Rightarrow 1 = \frac{(5 + \sqrt{3}) - (\sqrt{3} - 5)}{m + 1} \Rightarrow 1 = \frac{5 + \sqrt{3} - \sqrt{3} + 5}{m + 1} \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{10}{m + 1} \Rightarrow m + 1 = 10 \Rightarrow m = 9$$

۵۵- (۴) می‌دانیم برای آن که سه عدد a، b و c جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند باید $2b = a + c$ باشد. بنابراین تک‌تک گزینه‌ها را امتحان می‌کنیم که تنها گزینه‌ی (۴) صحیح می‌شود.

$$1 + \sqrt{3}, 2, 3 - \sqrt{3} \Rightarrow 2(2) = (1 + \cancel{\sqrt{3}}) + (3 - \cancel{\sqrt{3}}) \Rightarrow 4 = 4 \ \checkmark$$

۵۶- (۴) اگر x واسطه‌ی حسابی بین $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ و $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ باشد، داریم:

$$2x = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}} a + b - \cancel{2\sqrt{ab}} + a + b + \cancel{2\sqrt{ab}}$$

$$\Rightarrow 2x = 2(a + b) \xrightarrow[\text{۲ تقسیم می‌کنیم.}]{\text{طرفین معادله را بر}} x = a + b$$

۵۷- (۴) می‌دانیم شرط این که a، b و c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، آن است که $2b = a + c$ باشد. بنابراین:

$$2(3p + 4) = (2p + 3) + (5p - 1)$$

$$\Rightarrow 6p + 8 = 7p + 2 \Rightarrow p = 6 \xrightarrow[\text{جای‌گذاری می‌کنیم.}]{p = 6 \text{ را در جملات}} \text{جملات دنباله: } 15, 22, 29 \Rightarrow d = 22 - 15 \Rightarrow d = 7$$

۵۸- (۲)

$$a_1 + a_3 = 8 \quad , \quad a_2 \times a_4 = 40 \quad , \quad d = ?$$

با توجه به این‌که جملات، تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند از خاصیت دنباله‌ی حسابی داریم:

$$a_1 + a_3 = 2a_2$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + a_3 = 8 \Rightarrow 2a_2 = 8 \Rightarrow a_2 = \frac{8}{2} = 4 \\ a_2 \times a_4 = 40 \xrightarrow{a_2 = 4} 4a_4 = 40 \Rightarrow a_4 = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow d = \frac{a_4 - a_2}{4 - 2} = \frac{10 - 4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

۵۹- (۳) این سه عدد را به‌صورت $a + d$ و a و $a - d$ در نظر می‌گیریم. با توجه به این‌که مجموع این جملات ۳ است، داریم:

$$(a - d) + a + (a + d) = 3 \Rightarrow 3a = 3 \Rightarrow a = 1$$

هم‌چنین حاصل‌ضرب مربعات این جملات برابر ۱۰۰ است، بنابراین:

$$(a - d)^2 \times a^2 \times (a + d)^2 = 100 \xrightarrow{a=1} (1 - d)^2 \, 1^2 \, (1 + d)^2 = 100 \Rightarrow [(1 - d)(1 + d)]^2 = 100 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (1 - d^2)^2 = 100$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - d^2 = 10 \Rightarrow d^2 = -9 \ \text{غیرقابل‌قبول} \\ 1 - d^2 = -10 \Rightarrow d^2 = 11 \Rightarrow d = \pm\sqrt{11} \end{cases}$$

با توجه به قدرنسبت به‌دست آمده، جملات به یکی از دو صورت زیر هستند:

$$d = \sqrt{11} \Rightarrow 1 - \sqrt{11}, 1, 1 + \sqrt{11} \quad \text{یا} \quad d = -\sqrt{11} \Rightarrow 1 + \sqrt{11}, 1, 1 - \sqrt{11}$$

که در هر دو حالت، کوچک‌ترین عدد $1 - \sqrt{11}$ می‌باشد.

سؤال: *دانش‌پژوه (یلدا مهرمحمدی)*؛ **از کجا فهمیدید، سه جمله را باید به صورت $a - d$ و a و $a + d$ گرفت؟**

پاسخ: ببین بایدی وجود نداره که سه جمله‌رو به صورت $a - d$ و a و $a + d$ بگیریم. می‌تونیم سه جمله‌رو به صورت a و $a + d$ و $a + 2d$ بگیریم ولی یه کم کار سفت‌تر و طولانی‌تر می‌شه. شما از حالا بدون که سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی رو بهتره به صورت $a - d$ و a و $a + d$ بگیری.

۶۰- (۳) می‌دانیم که مجموع زوایای داخلی یک مثلث 180° است، بنابراین اگر زاویه‌های مثلث را A و B و C در نظر بگیریم با توجه به این که زوایا تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند $2B = A + C$ می‌باشد. داریم:

$$A+B+C=180^\circ \xrightarrow{2B=A+C} 2B+B=180^\circ \Rightarrow 3B=180^\circ \Rightarrow B=60^\circ$$

۶۱- (۳) **راه اول:** طول سه ضلع مثلث سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی هستند، این جملات را $BC=a+d$ ، $AB=a$ و $AC=a-d$ می‌نامیم. از رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$$AC^2+AB^2=BC^2 \Rightarrow (a-d)^2+a^2=(a+d)^2 \Rightarrow \cancel{a^2}-2ad+\cancel{d^2}+a^2=\cancel{a^2}+2ad+\cancel{d^2}$$

$$\Rightarrow a^2-2ad=2ad \Rightarrow a^2-4ad=0 \Rightarrow a(a-4d)=0 \xrightarrow{a\neq 0} a-4d=0 \Rightarrow a=4d$$

$$\xrightarrow{a=AB} AB=4d \Rightarrow \frac{AB}{d}=4$$

راه دوم:

> **نکته:** اگر اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای تشکیل دنباله‌ی حسابی بدهند، می‌توان آن‌ها را به‌صورت $3d$ ، $4d$ و $5d$ در نظر گرفت.

با توجه به نکته‌ی بالا معلوم می‌شود که $AB = 4d$. (زیرا AB ضلع وسط است.) پس $\frac{AB}{d}=\frac{4d}{d}=4$.

۶۲- (۳) **راه اول:** اضلاع مثلث را $b+d$ و b و $b-d$ بگیرید. داریم:

$$(b-d)+(b)+(b+d)=24 \Rightarrow 3b=24 \Rightarrow b=8$$

از رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$$(b-d)^2+b^2=(b+d)^2 \Rightarrow b^2-2bd+\cancel{d^2}+\cancel{b^2}=\cancel{b^2}+2bd+\cancel{d^2} \Rightarrow b^2-4bd=0$$

$$\Rightarrow b(b-4d)=0 \xrightarrow{b=8} 8(8-4d)=0 \Rightarrow 8-4d=0 \Rightarrow d=2$$

بنابراین طول وتر برابر $b+d=8+2=10$ می‌باشد.

راه دوم: به کمک نکته‌ی گفته شده در راه دوم پاسخ قبل داریم:

$$\text{اضلاع} = 3d,4d,5d \Rightarrow 3d+4d+5d=24 \Rightarrow 12d=24 \Rightarrow d=2 \Rightarrow \text{طول اضلاع}: 3(2),4(2),5(2)=6,8,10$$

پس اندازه‌ی وتر ۱۰ می‌شود.

۶۳- (۳) با توجه به این‌که $a_3 + a_4 = 20$ است و می‌دانیم در دنباله‌ی حسابی اگر مجموع اندیس‌ها با هم برابر باشند، مجموع جملات نظیر آن‌ها نیز برابر می‌شود، داریم:

$$1+6=2+5=3+4 \Rightarrow a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 \xrightarrow{a_1+a_6=a_2+a_5=a_3+a_4=20} 20+20+20=60$$

۶۴- (۲)

$$a_7+a_{13}=a \;,\; a_9=b \;,\; a_{11}=?$$

$$7+13=9+11 \Rightarrow \underbrace{a_7+a_{13}}_{a}=\underbrace{a_9}_{b}+a_{11} \Rightarrow a=b+a_{11} \Rightarrow a_{11}=a-b$$

۶۵- (۴)

$$a_7+a_{24}=100 \quad,\quad a_{29}=-150 \quad,\quad a_1+a_2+a_3=?$$

$$1+3=2\times 2 \Rightarrow a_1+a_3=2a_2 \Rightarrow a_1+a_2+a_3=a_2+2a_2=3a_2 \qquad (*)$$

بنابراین کافی است برای به‌دست آوردن مجموع سه جمله‌ی اول، a_2 را محاسبه کنیم:

$$7+24=29+2 \Rightarrow a_7+a_{24}=a_{29}+a_2 \xrightarrow[a_{29}=-150]{a_7+a_{24}=100} 100=-150+a_2 \Rightarrow a_2=250 \Rightarrow a_1+a_2+a_3 \overset{(*)}{=} 750$$

۶۶- (۲)

$$a_n+a_k=a_{n-1} \;,\; \frac{a_1}{d}=?$$

راه اول:

$$a_n+a_k=a_{n-1} \Rightarrow \overbrace{(a_1+(n-1)d)}^{a_n}+\overbrace{(a_1+(k-1)d)}^{a_k}=\overbrace{(a_1+(n-2)d)}^{a_{n-1}}$$

$$\Rightarrow a_1+nd-d+a_1+kd-d=a_1+nd-2d \Rightarrow 2a_1+\cancel{nd}+kd\cancel{-2d}=a_1+\cancel{nd}\cancel{-2d}$$

$$\Rightarrow 2a_1+kd=a_1 \Rightarrow a_1=-kd \Rightarrow \frac{a_1}{d}=-k$$

راه دوم:

$$a_n+a_k=a_{n-1}\xrightarrow{a_n=a_{n-1}+d}\cancel{a_{n-1}}+d+a_k=\cancel{a_{n-1}}\Rightarrow d+a_k=0$$

$$\xrightarrow{a_k=a_1+(k-1)d} d+(a_1+(k-1)d)=0\Rightarrow \cancel{d}+a_1+kd-\cancel{d}=0\Rightarrow a_1=-kd\Rightarrow \frac{a_1}{d}=-k$$

راه سوم:

$$n+k=(n-1)+(k+1)\Rightarrow \underbrace{a_n+a_k}_{a_{n-1}}=a_{n-1}+a_{k+1}\Rightarrow 0=a_{k+1}\Rightarrow a_1+kd=0\Rightarrow a_1=-kd\Rightarrow \frac{a_1}{d}=-k$$

۶۷- (۱) b_{n-k} و b_n و b_{n+k} سه جمله‌ی متساوی‌الفاصله از یک دنباله‌ی حسابی هستند ($(2n=(n-k)+(n+k)$) که هر جمله k تا، با جمله‌ی بعدی فاصله دارد. بنابراین:

$$2b_n=b_{n-k}+b_{n+k}\Rightarrow b_n=\frac{b_{n-k}+b_{n+k}}{2}$$

۶۸- (۴) چون هر کالا با کالای قبلی k تومان (یعنی یک مقدار ثابت) اختلاف قیمت دارد، بنابراین قیمت این کالاها یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت k تشکیل می‌دهند. در این دنباله‌ی حسابی جملات نهم، پانزدهم و بیست و یکم متساوی‌الفاصله‌اند ($15\times 2=21+9$)، بنابراین:

$2a_{15}=a_9+a_{21}\Rightarrow 2a_{15}=830\Rightarrow a_{15}=415\Rightarrow$ قیمت کالای پانزدهم ۴۱۵ تومان است.

۶۹- (۲) راه اول:

$$a_2+a_8=32\ ,\ a_3+a_5+a_7=?$$

$$2(5)=2+8\Rightarrow 2a_5=a_2+a_8\Rightarrow 2a_5=32\Rightarrow a_5=16$$

$$2(5)=3+7\Rightarrow 2a_5=a_3+a_7\Rightarrow a_3+a_5+a_7=\underbrace{a_3+a_7}_{2a_5}+a_5=32+16=48$$

راه دوم:

$$a_2+a_8=32\Rightarrow (a_1+d)+(a_1+7d)=32\Rightarrow 2a_1+8d=32\Rightarrow a_1+4d=16\qquad (*)$$

$$a_3+a_5+a_7=(a_1+2d)+(a_1+4d)+(a_1+6d)=3a_1+12d=3(a_1+4d)\overset{(*)}{=\!=}3(16)=48$$

۷۰- (۲)

$$a_1+a_2+a_3=12\quad (I)\quad ,\quad a_7+a_9=32\qquad (II)\quad ,\quad d=?$$

$$\left.\begin{array}{l}1+3=2(2)\Rightarrow a_1+a_3=2a_2\overset{(I)}{\Longrightarrow}2a_2+a_2=12\Rightarrow a_2=4\\ 7+9=2(8)\Rightarrow a_7+a_9=2a_8\overset{(II)}{\Longrightarrow}2a_8=32\Rightarrow a_8=16\end{array}\right\}\Rightarrow d=\frac{a_8-a_2}{8-2}=\frac{16-4}{6}=2$$

۷۱- (۱)

$$a_1+a_2+a_3=4(a_4+a_5+a_6)\quad ,\quad a_6=?$$

$$1+3=2\times 2\Rightarrow a_1+a_3=2a_2\Rightarrow a_1+a_2+a_3=3a_2$$

$$4+6=2\times 5\Rightarrow a_4+a_6=2a_5\Rightarrow a_4+a_5+a_6=3a_5$$

با توجه به این‌که مجموع سه‌جمله‌ی اول، چهار برابر مجموع سه جمله‌ی دوم می‌باشد، می‌توان نوشت:

$$a_1+a_2+a_3=4(a_4+a_5+a_6)\Rightarrow 3a_2=4(3a_5)\xrightarrow[\text{بر ۳}]{\text{تقسیم دو طرف}}a_2=4a_5\xrightarrow[a_5=a_1+4d]{a_2=a_1+d}a_1+d=4(a_1+4d)$$

$$\Rightarrow 4a_1+16d-a_1-d=0\Rightarrow 3a_1+15d=0\Rightarrow 3(a_1+5d)=0\Rightarrow a_1+5d=0\xrightarrow{a_1+5d=a_6}a_6=0$$

سؤال: *دانش‌پژوه (ممد برزگر یزدی):* **ببخشید آقا! ما مهندسی معکوس عمل کردیم! یعنی تو قسمت آخر، گفتیم چون a_6 رو می‌خواد، پس همه رو برحسب اون بنویسیم. این‌طوری شد:**

$$\mathbf{a_2=4a_5\xrightarrow[a_5=a_6-d]{a_2=a_6-4d}a_6-4d=4(a_6-d)\Rightarrow a_6-4d=4a_6-4d\Rightarrow 3a_6=0\Rightarrow a_6=0}$$

پاسخ: *بله. درسته مهندس! مورد عین تو زیاد داریم!*

۷۲- (۳)

$$a_7+a_8+a_{12}=36\quad ,\quad a_5+a_{13}=?$$

تذکر: هیچ‌گاه زمان زیادی را صرف پیدا کردن رابطه‌ی بین اعداد نکنید. به سرعت تصمیم بگیرید و اگر رابطه‌ای نیافتید از فرمول اولیه استفاده کنید.

در این تست، رابطه‌ای خاصی بین سه اندیس ۷، ۸ و ۱۲ دیده نمی‌شود، پس بهتر است سریعاً از رابطه‌ی اولیه استفاده کنیم.

$$a_۷ + a_۸ + a_{۱۲} = ۳۶ \Rightarrow (a_۱ + ۶d) + (a_۱ + ۷d) + (a_۱ + ۱۱d) = ۳۶$$

$$\Rightarrow ۳a_۱ + ۲۴d = ۳۶ \Rightarrow ۳(\underbrace{a_۱ + ۸d}_{a_۹}) = ۳۶ \Rightarrow a_۹ = \frac{۳۶}{۳} = ۱۲$$

$$۵ + ۱۳ = ۲(۹) \Rightarrow a_۵ + a_{۱۳} = ۲a_۹ \Rightarrow a_۵ + a_{۱۳} = ۲ \times ۱۲ = ۲۴$$

۷۳- (۳)

$$a_{۱۲} - a_{۱۰} = ۵ \Rightarrow d = \frac{a_{۱۲} - a_{۱۰}}{۱۲ - ۱۰} = \frac{۵}{۲} \quad , \quad a_{۱۲} + a_{۱۰} = ۲۵ \quad , \quad a_{۲۱} = ?$$

$$۱۰ + ۱۲ = ۲ \times ۱۱ \Rightarrow a_{۱۰} + a_{۱۲} = ۲a_{۱۱} \xrightarrow{a_{۱۰} + a_{۱۲} = ۲۵} a_{۱۱} = \frac{۲۵}{۲}$$

$$a_{۲۱} = a_{۱۱} + (۲۱ - ۱۱)d = \frac{۲۵}{۲} + ۱۰ \times \frac{۵}{۲} = \frac{۲۵}{۲} + \frac{۵۰}{۲} = \frac{۷۵}{۲} = ۳۷/۵$$

سؤال: *دانش‌پژوه (نوشاد دهکرد)*: **ببخشید! من بعد از محاسبه‌ی قدرنسبت، با حل دستگاه $\begin{cases} a_{۱۲} - a_{۱۰} = ۵ \\ a_{۱۲} + a_{۱۰} = ۲۵ \end{cases}$، $a_{۱۰}$ و $a_{۱۲}$ رو محاسبه کردم و سپس به کمک $a_{۱۰}$ و d از فرمول $a_{۲۱} = a_{۱۰} + ۱۱d$ جوابو پیدا کردم. درسته؟**

پاسخ: *بله. این هم میشه، اما خوب راه ما دیگه نیاز به حل دستگاه نداره.*

۷۴- (۳)

$$a_۱ = ۵ \quad , \quad a_۳ = ۹ \quad , \quad a_۷ + a_۸ + a_۹ = ?$$

$$d = \frac{a_۳ - a_۱}{۳ - ۱} = \frac{۹ - ۵}{۲} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

$$۷ + ۹ = ۲ \times ۸ \Rightarrow a_۷ + a_۹ = ۲a_۸ \Rightarrow \underbrace{a_۷ + a_۸ + a_۹}_{۲a_۸} = ۳a_۸ = ۳(a_۱ + ۷d) = ۳(۵ + ۱۴) = ۵۷$$

۷۵- (۳)

نکته: در یک دنباله حسابی داریم: $a_m + a_n = ۲a_k \Leftrightarrow m + n = ۲k$

$$a_۱ + a_۳ + a_۸ = ۱۲ \Rightarrow a_۱ + (a_۱ + ۲d) + (a_۱ + ۷d) = ۱۲ \Rightarrow ۳a_۱ + ۹d = ۱۲ \Rightarrow ۳(\underbrace{a_۱ + ۳d}_{a_۴}) = ۱۲ \Rightarrow a_۴ = ۴ \quad (*)$$

$$a_۳ + a_k = ۸ = ۲ \times ۴ \xRightarrow{(*)} a_۳ + a_k = ۲a_۴ \xRightarrow{\text{طبق نکته}} ۳ + k = ۲ \times ۴ \Rightarrow k = ۵$$

۷۶- (۳)

راه اول: می‌دانیم که اگر x واسطه‌ی حسابی بین دو جمله‌ی a و b باشد، آن‌گاه $۲x = a + b$ است، یا $x = \frac{a + b}{۲}$. بنابراین واسطه‌ی حسابی بین $a_۸$ و $a_{۱۴}$ به صورت $x = \frac{a_۸ + a_{۱۴}}{۲}$ می‌باشد که ابتدا باید $a_۸$ و $a_{۱۴}$ را به دست آوریم:

$$۴, ۸, ۱۲, ... \Rightarrow a_۱ = ۴ \quad d = ۸ - ۴ = ۴$$

$$\left.\begin{aligned} a_۸ &= a_۱ + ۷d = ۴ + ۷(۴) = ۳۲ \\ a_{۱۴} &= a_۱ + ۱۳d = ۴ + ۱۳(۴) = ۵۶ \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \frac{a_۸ + a_{۱۴}}{۲} = \frac{۳۲ + ۵۶}{۲} = \frac{۸۸}{۲} = ۴۴$$

راه دوم: واسطه‌ی حسابی بین جملات $a_۸$ و $a_{۱۴}$، جمله‌ی $a_{۱۱}$ است $(۱۴ + ۸ = ۲ \times ۱۱ \Rightarrow a_{۱۴} + a_۸ = ۲a_{۱۱})$. بنابراین کافی است جمله‌ی یازدهم را به‌دست آوریم:

$$۴, ۸, ۱۲, ... \Rightarrow a_{۱۱} = a_۱ + ۱۰d = ۴ + ۱۰(۴) = ۴۴$$

۷۷- (۱)

$$a_۵ = ۱۹ \quad , \quad a_{۱۵} = ۹۹ \quad , \quad a_{۲۵} = ?$$

$$۵ + ۲۵ = ۲(۱۵) \Rightarrow a_۵ + a_{۲۵} = ۲a_{۱۵} \Rightarrow ۱۹ + a_{۲۵} = ۲(۹۹) \Rightarrow a_{۲۵} = ۱۹۸ - ۱۹ \Rightarrow a_{۲۵} = ۱۷۹$$

سؤال: *دانش‌پژوه (حجت سالاروند)*: **من این مسأله رو از یه راه دیگه حل کردم.**

$$\begin{aligned} a_۵ = ۱۹ &\Rightarrow \\ a_{۱۵} = ۹۹ &\Rightarrow \end{aligned} \begin{cases} a_۱ + ۴d = ۱۹ \\ a_۱ + ۱۴d = ۹۹ \end{cases} \xRightarrow[\text{معادله‌ی دوم کم می‌کنیم.}]{\text{معادله‌ی اول را از}} ۱۰d = ۸۰ \Rightarrow d = ۸ \quad (*)$$

$$a_۱ + ۴d = ۱۹ \xRightarrow{d = ۸} a_۱ + ۴(۸) = ۱۹ \Rightarrow a_۱ = ۱۹ - ۳۲ \Rightarrow a_۱ = -۱۳ \quad (**)$$

$$a_{۲۵} = a_۱ + ۲۴d \xRightarrow{(*),(**)} a_{۲۵} = -۱۳ + ۲۴(۸) = -۱۳ + ۱۹۲ \Rightarrow a_{۲۵} = ۱۷۹$$

پاسخ: *این راه‌حل هم قابل قبوله ولی همون‌طور که می‌بینی خیلی طولانی‌تر و وقت‌گیرتره.*

۷۸- (۲)

$$\underbrace{2x-1}_{a_1},\underbrace{x+4}_{a_3},\underbrace{3x+3}_{a_5} \xrightarrow{2(3)=1+5} 2a_3=a_1+a_5 \Rightarrow 2(x+4)=(2x-1)+(3x+3)$$

$$\Rightarrow 2x+8=5x+2 \Rightarrow -3x=-6 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \begin{cases} a_1=2x-1=2(2)-1=3 \\ a_3=x+4=2+4=6 \end{cases} \xrightarrow[2a_2=a_1+a_3]{\text{می‌دانیم که:}} 2a_2=3+6=9 \Rightarrow a_2=4.5$$

دقت کنید که در این‌جا اصلاً نیازی به محاسبه‌ی a_5 نبود!

۷۹- (۱)

$$2\times 3=1+5=2+4 \Rightarrow \underbrace{a_1+\overbrace{a_2+a_3+a_4}^{2a_3}+a_5}_{2a_3}=2a_3+2a_3+a_3=5a_3 \Rightarrow 5a_3=30 \Rightarrow a_3=6$$

$$2(5)=3+7 \Rightarrow 2a_5=a_3+a_7 \Rightarrow 2a_5=6+12 \Rightarrow a_5=\frac{18}{2}=9$$

۸۰- (۴)

$$S_8-S_5=7 \Rightarrow (a_1+\dots+a_8)-(a_1+\dots+a_5)=7 \Rightarrow a_6+a_7+a_8=7 \quad (*)$$

$$6+8=2\times 7 \Rightarrow a_6+a_8=2a_7 \xRightarrow{(*)} 2a_7+a_7=7 \Rightarrow a_7=\frac{7}{3} \quad (**)$$

$$4+10=5+9=6+8=2\times 7 \Rightarrow \underbrace{a_4+\overbrace{a_5+\dots+a_9}^{2a_7}+a_{10}}_{2a_7}=7a_7 \xlongequal{(**)} 7\times\frac{7}{3}=\frac{49}{3}$$

۸۱- (۴) با توجه به درسنامه‌ی گفته شده اگر جملات یک دنباله را به توان یک عدد ثابت برسانیم، دنباله‌ی حاصل ممکن است حسابی نباشد.

سؤال: *دانش‌پژوه (رویا زال):* **ببخشید، تقسیم کردن بر عدد ثابت تأثیری بر دنباله‌ی حسابی بودن نداره؟**

پاسخ: *ببین تقسیم کردن جملات دنباله بر عدد ثابت غیرصفر k، مثل ضرب کردن جملات در عدد $\frac{1}{k}$ هست و می‌دونیم با ضرب در یک عدد ثابت، دنباله هم‌چنان حسابی باقی میمونه.*

۸۲- (۲) **راه اول:**

$$2,\frac{7}{4},\dots \Rightarrow a_1=2 \quad , \quad d=\frac{7}{4}-2=\frac{7-8}{4}=-\frac{1}{4}$$

$$a_4=a_1+3d=2+3(-\frac{1}{4}) \Rightarrow a_4=2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$$

$$a_8=a_1+7d=2+7(-\frac{1}{4}) \Rightarrow a_8=2-\frac{7}{4}=\frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ قدرنسبت دنباله‌ی جدید = تفاضل دو جمله‌ی متوالی دنباله‌ی جدید $=a_8-a_4=\frac{1}{4}-\frac{5}{4}=-1$

راه دوم:

$$d=\frac{7}{4}-2=-\frac{1}{4}$$

از نکته‌ی (۴) درسنامه و با توجه به این‌که اندیس‌ها ۴ تا ۴ تا زیاد می‌شوند، $k=4$ است. به عبارتی:

$k=4 \Rightarrow$ قدرنسبت دنباله‌ی جدید $=4(-\frac{1}{4})=-1$

۸۳- (۳) **راه اول:** اعداد $\frac{8}{3},\frac{7}{3},\frac{6}{3},\dots$ خود تشکیل یک دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت $-\frac{1}{3}$ می‌دهند، بنابراین داریم:

$$1,\frac{5}{3},\frac{7}{3},\dots \Rightarrow a_1=1 \quad , \quad d=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3} \Rightarrow a_{65}=a_1+64d \Rightarrow a_{65}=1+64\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{131}{3}$$

$$\frac{8}{3},\frac{7}{3},\frac{6}{3},\dots \Rightarrow a'_1=\frac{8}{3} \quad , \quad d'=\frac{7}{3}-\frac{8}{3}=-\frac{1}{3} \Rightarrow a'_{65}=a'_1+64d' \Rightarrow a'_{65}=\frac{8}{3}+64\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{56}{3}$$

$$\Rightarrow a_{65}+a'_{65}=\frac{131}{3}-\frac{56}{3}=\frac{75}{3}=25$$

راه دوم: با توجه به نکته‌ی (۵) درسنامه، با توجه به این‌که اعداد $\frac{8}{3},\frac{7}{3},\frac{6}{3},\dots$ خود تشکیل یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت $-\frac{1}{3}$ می‌دهند، دنباله‌ی جدید حاصل از جمع اعضای دو دنباله، خود یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت $\frac{1}{3}=\left(\underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{قدرنسبت دنباله‌ی اول}}+\underbrace{\left(-\frac{1}{3}\right)}_{\text{قدرنسبت دنباله‌ی دوم}}\right)$ و جمله‌ی اول $\frac{11}{3}=\left(1+\frac{8}{3}\right)$ می‌باشد. بنابراین:

$$a_{65}=a_1+64d=\frac{11}{3}+64\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{75}{3}=25$$

۸۴- (۳) اگر قدر نسبت جدید را d' و جمله‌ی پنجم دنباله‌ی جدید را a'_5 در نظر بگیریم داریم:

$$\begin{matrix} d' = d + 2 \\ a'_5 = a'_1 + 4d' \end{matrix} \xrightarrow{a'_1 = a_1} a'_5 = a_1 + 4(d+2) \Rightarrow a'_5 = \underbrace{a_1 + 4d}_{a_5} + 8 \Rightarrow a'_5 = a_5 + 8$$

بنابراین جمله‌ی پنجم دنباله‌ی جدید ۸ واحد بزرگ‌تر از جمله‌ی پنجم دنباله‌ی قبل است.

۸۵- (۴) طبق نکته‌ی درسنامه اگر جملات یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت d را یکی در میان انتخاب کنیم، دنباله‌ی جدیدی حاصل می‌شود که قدرنسبت آن $2d = 12$ می‌باشد. پس قدرنسبت دنباله‌ی اصلی $d = \frac{12}{2} = 6$ است. جمله‌ی اول در دنباله‌ی جدید و قدیم یکسان است و داریم:

$$a'_n = a_1 + (n-1)d' \Rightarrow a'_4 = a_1 + (4-1)d' \Rightarrow 39 = a_1 + 3(12) \Rightarrow a_1 = 3$$

هم‌چنین با توجه به دنباله‌ی اولیه داریم:

$$a_{20} = a_1 + (20-1)d \Rightarrow a_{20} = 3 + 19(6) = 117 \Rightarrow a_1 \times a_{20} = 3 \times 117 = 351$$

۸۶- (۱) با توجه به این‌که دنباله‌ها حسابی هستند، توان n نباید بیشتر از ۱ باشد و لذا $a = 0$. اگر جملات دنباله‌ها را با هم جمع کنیم، برای جمله‌ی عمومی دنباله‌ی جدید داریم:

$$c_n = (-2n+3) + (bn-1) = (-2+b)n + 2 \Rightarrow c_7 = (-2+b)7 + 2 \xrightarrow{c_7 = 2} 2 = -14 + 7b + 2 \Rightarrow b = 2$$

۸۷- (۴) **راه اول:**

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \dots \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad q = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad , \quad a_n = ?$$

$$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

راه دوم: باید ببینیم در کدام گزینه به ازای $n = 1$، جمله‌ی اول دنباله یعنی $\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آید. فقط عبارت گزینه‌ی (۴)، به ازای $n = 1$ برابر $\frac{1}{2}$ می‌شود.

۸۸- (۳)

$$4, 6, 9, \dots \Rightarrow a_1 = 4 \quad , \quad q = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad , \quad a_4 + a_5 = ?$$

$$\begin{matrix} a_4 = a_1 q^3 = 4\left(\frac{3}{2}\right)^3 = 4 \times \frac{27}{8} = \frac{27}{2} \\ a_5 = a_1 q^4 = 4\left(\frac{3}{2}\right)^4 = 4 \times \frac{81}{16} = \frac{81}{4} \end{matrix} \Rightarrow a_4 + a_5 = \frac{27}{2} + \frac{81}{4} = \frac{54+81}{4} = \frac{135}{4}$$

۸۹- (۳)

$$a_n = \frac{2}{3 \times 2^n} \Rightarrow q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2}{3 \times 2^{n+1}}}{\frac{2}{3 \times 2^n}} \xlongequal[\text{نزدیک در نزدیک}]{\text{دور در دور}} \frac{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 2^n}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

۹۰- (۳)

> **نکته:** فرم کلی جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی هندسی به‌صورت $a_n = AB^{\alpha n + \beta}$ است که در آن A، B، α و β اعدادی حقیقی هستند.

با توجه به نکته‌ی بالا، تنها گزینه‌ای که توانش یک رابطه‌ی خطی برحسب n است، **گزینه‌ی (۳)** می‌باشد. دقت کنید در گزینه‌ی (۴)، توانِ عدد، یعنی n^3، به خاطر این که توان n بیشتر از یک است، خطی نیست.

۹۱- (۲)

> **نکته:** در دنباله‌ی هندسی همواره توانِ قدرنسبت (q)، به‌صورت $n + \alpha$ می‌باشد که در آن α عدد حقیقی دلخواه است.

راه اول:

$$a_n = \sqrt{7}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^{2n-\sqrt{5}} \xrightarrow[\text{در توان}]{\text{فاکتور از ۲}} a_n = \sqrt{7}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^{2(n-\frac{\sqrt{5}}{2})} \Rightarrow a_n = \sqrt{7}\left[\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^2\right]^{n-\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

$$\Rightarrow a_n = \sqrt{7}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{25}}\right)^{n-\frac{\sqrt{5}}{2}} \Rightarrow q = \frac{1}{\sqrt[3]{25}}$$

راه دوم: همواره در دنباله‌های هندسی می‌توان نوشت:

$$q=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\cancel{\sqrt{7}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^{2(n+1)-\sqrt{5}}}{\cancel{\sqrt{7}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^{2n-\sqrt{5}}}\xrightarrow[\text{را از هم کم می‌کنیم}]{\text{پایه‌ها برابرند توان‌ها}}q=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^{(2n+2-\sqrt{5})-(2n-\sqrt{5})}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^{2n+2-\sqrt{5}-2n+\sqrt{5}}=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^{2}=\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}\Rightarrow q=\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$$

۹۲- (۳) **راه اول:** ابتدا جمله‌ی عمومی داده شده برای u_n را ساده می‌کنیم:

$$\frac{(-25)^n}{5^{2n-1}}=\frac{(-1)^n 25^n}{5^{2n-1}}=(-1)^n\frac{5^{2n}}{5^{2n-1}}=(-1)^n 5^{2n-(2n-1)}=(-1)^n 5^{2n-2n+1}=(-1)^n\times 5$$

بنابراین حالت کلی جمله‌ی عمومی دنباله به‌صورت $u_n=5\times(-1)^n$ می‌باشد. با توجه به نکته‌ی سؤال قبل $q=-1$ است.

راه دوم: u_1 و u_2 را محاسبه کرده و q را از رابطه‌ی $q=\frac{u_2}{u_1}$ به‌دست می‌آوریم:

$$u_1=\frac{(-25)^1}{5^{2(1)-1}}=-\frac{25}{5}=-5\ ,\ u_2=\frac{(-25)^2}{5^{2(2)-1}}=\frac{25^2}{5^3}\xlongequal{25=5^2}\frac{5^4}{5^3}=5\Rightarrow q=\frac{u_2}{u_1}=\frac{5}{-5}=-1$$

۹۳- (۱)

$$4a_n-3a_{n-1}=0\Rightarrow 4a_n=3a_{n-1}\Rightarrow a_n=\frac{3}{4}a_{n-1}\Rightarrow\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{3}{4}\Rightarrow q=\frac{3}{4}$$

دقت کنید که قدرنسبت دنباله‌ی هندسی مخالف صفر، از تقسیم هر جمله بر جمله‌ی قبلی حاصل می‌شود.

بنابراین دنباله یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت $q=\frac{3}{4}$ و جمله‌ی اول $a=1$ می‌باشد، پس: $a_n=a_1\times q^{n-1}=1\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

۹۴- (۲)

نکته: (۱) در یک دنباله‌ی هندسی اگر $a_1>0$ و $q>1$، دنباله افزایشی و اگر $a_1<0$ و $q>1$ باشد، دنباله کاهشی است.

(۲) در یک دنباله‌ی هندسی اگر $a_1>0$ و $0<q<1$، دنباله کاهشی و اگر $a_1<0$ و $0<q<1$ باشد، دنباله افزایشی است.

(۳) در یک دنباله‌ی هندسی اگر $q<0$ و $a_1\neq 0$ باشد، دنباله نه کاهشی است و نه افزایشی.

با توجه به نکته‌ی بالا در **گزینه‌ی (۲)**، $a_1=10>0$ و $0<q=\frac{1}{2}<1$ می‌باشد، پس دنباله کاهشی است. دقت کنید **گزینه‌ی (۱)** اصلاً دنباله‌ی هندسی نیست (حسابی است) و **گزینه‌های (۳) و (۴)**، دنباله‌های هندسی افزایشی‌اند.

۹۵- (۲)

$$a_1=7\ ,\ q=2\ ,\ a_n=224\ ,\ n=?$$

$$a_n=a_1q^{n-1}\Rightarrow 224=7(2)^{n-1}\xrightarrow{\text{تقسیم طرفین بر } 7}\frac{224}{7}=2^{n-1}\Rightarrow 32=2^{n-1}\xrightarrow[32=2^5]{\text{می‌دانیم}}2^5=2^{n-1}\Rightarrow 5=n-1\Rightarrow n=6$$

۹۶- (۲) در این‌گونه مسایل باید با حل نامساوی حاصل از صورت مسأله، n را محاسبه نماییم.

$$a_1=5\ ,\ q=\frac{1}{10}\Rightarrow a_n=5\times\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}\Rightarrow 5\times\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}<0/0003\Rightarrow 5\times\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}<3\times 10^{-4}$$

$$\xrightarrow[\text{تقسیم بر } 5]{\text{دو طرف}}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}<\frac{3}{5}\times 10^{-4}\xrightarrow[\text{جهت نامساوی عوض می‌شود.}]{\text{دو طرف نامساوی را معکوس می‌کنیم}}10^{n-1}>\frac{5}{3}\times 10^{4}$$

با امتحان کردن مقادیر مختلف n در نامعادله‌ی آخر، اولین n طبیعی که به ازای آن نامعادله برقرار می‌شود، $n=6$ می‌باشد. پس جمله‌ی ششم جواب است.

۹۷- (۳) برای ساخت شکل (۲) از شکل (۱)، با اضافه کردن دو شاخه به انتهای هر شاخه‌ی شکل (۱)، شکل جدید را ایجاد کرده‌ایم. چون در ابتدا سه شاخه داشتیم، پس $6=3\times 2$ شاخه اضافه شده است. در ساخت شکل (۳) از شکل (۲) نیز به انتهای هر شاخه‌ی شکل (۲)، دو شاخه افزوده‌ایم و چون ۶ شاخه داشتیم، 2×6 شاخه اضافه شده است.

بنابراین در هر شکل تعداد شاخه‌های اضافه شده‌ی جدید دو برابر تعداد شاخه‌های اضافه شده‌ی شکل قبلی می‌باشد. بنابراین تعداد شاخه‌های اضافه شده در هر شکل تشکیل یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت $q=2$ و جمله‌ی اول $a_1=3$ می‌دهند. برای به‌دست آوردن شاخه‌های اضافه شده به شکل ششم برای ساختن شکل هفتم، باید a_7 را بیابیم.

$$a_n=3(2)^{n-1}\Rightarrow a_7=3\times 2^{7-1}=3\times 2^6=3\times 64=192$$

۹۸- (۲)

$t_4 - t_2 = 6 \quad , \quad q=\sqrt{3} \quad , \quad t_1 = ?$

$$t_4 - t_2 = 6 \Rightarrow t_1q^3 - t_1q = 6 \xrightarrow[q^3=(\sqrt{3})^3=\sqrt{27}=3\sqrt{3}]{\text{می‌دانیم } q=\sqrt{3}} t_1(\sqrt{3})^3 - t_1(\sqrt{3}) = 6$$

$$\Rightarrow \underbrace{3\sqrt{3}t_1 - \sqrt{3}t_1}_{\text{از } t_1 \text{ فاکتور}} = 6 \Rightarrow t_1(\underbrace{3\sqrt{3}-\sqrt{3}}_{2\sqrt{3}}) = 6 \Rightarrow t_1(2\sqrt{3}) = 6 \Rightarrow t_1 = \frac{6}{2\sqrt{3}} \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{گویا}} \frac{6}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{2\times 3} = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$$

۹۹- (۳)

$a_1 = 2 \quad , \quad a_8 = (a_5)^2 \quad , \quad q = ?$

$$a_8 = (a_5)^2 \Rightarrow a_1q^7 = (a_1q^4)^2 \Rightarrow a_1q^7 = a_1^2q^8 \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم.}]{\text{طرفین رابطه را بر } a_1q^7} \frac{a_1q^7}{a_1q^7} = \frac{a_1^2q^8}{a_1q^7}$$

$$\Rightarrow 1 = a_1q \xrightarrow[a_1=2]{\text{طبق فرض}} 1 = 2(q) \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

۱۰۰- (۳)

جمله‌ی اول: $a=a$ ، جمله‌ی دوم: $b=aq$ ، جمله‌ی سوم: $c=aq^2$ ، جمله‌ی چهارم: $d=aq^3$

$$\Rightarrow ac+bd-2ad = a(aq^2)+(aq)(aq^3)-2a(aq^3) = \underbrace{a^2q^2+a^2q^4-2a^2q^3}_{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}} = (\underbrace{aq}_{b} - \underbrace{aq^2}_{c})^2 = (b-c)^2$$

سؤال: *دانش‌پژوه (حسن عبقری)*: **اجازه! من به جای a، b، c و d، اعداد ۱، ۲، ۴ و ۸ از دنباله‌ی هندسی ...۱،۲،۴،۸،۱۶، را قرار دادم و با امتحان کردن به گزینه‌ی (۳) رسیدم.**

پاسخ: *درسته، این هم دورره‌بازی خوبی بود!*

۱۰۱- (۳)

$a_1 + a_3 = 1/5(a_2 + a_4) \quad , \quad q = ?$

$$a_1 + \underbrace{a_3}_{aq^2} = 1/5(\underbrace{a_2}_{a_1q} + \underbrace{a_4}_{a_1q^3}) \xrightarrow[1/5=\frac{3}{2}]{\text{می‌دانیم}} a_1 + a_1q^2 = \frac{3}{2}(a_1q + a_1q^3) \Rightarrow (a_1 + a_1q^2) = \frac{3}{2}q(a_1 + a_1q^2)$$

$$\xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم.}]{\text{طرفین معادله را به } (a_1+a_1q^2)} \frac{a_1+a_1q^2}{a_1+a_1q^2} = \frac{\frac{3}{2}q(a_1+a_1q^2)}{(a_1+a_1q^2)} \Rightarrow 1 = \frac{3}{2}q \Rightarrow q = \frac{2}{3}$$

۱۰۲- (۱)

$a_1 + a_2 = \frac{9}{2} \quad , \quad a_4 + a_5 = 36 \quad , \quad a_3 = ?$

$$a_1 + a_2 = \frac{9}{2} \Rightarrow a_1 + a_1q = \frac{9}{2} \quad (1)$$

$$a_4 + a_5 = 36 \Rightarrow a_1q^3 + a_1q^4 = 36 \quad (2)$$

$$\xrightarrow[\text{بر } (1)]{\text{تقسیم } (2)} \frac{a_1q^3 + a_1q^4}{a_1 + a_1q} = \frac{36}{\frac{9}{2}} \Rightarrow \frac{\cancel{a_1}q^3\cancel{(1+q)}}{\cancel{a_1}\cancel{(1+q)}} = \frac{\cancelto{4}{36}\times 2}{\cancelto{1}{9}} \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = \sqrt[3]{8} = 2$$

حال از رابطه‌ی (۱) به محاسبه‌ی a_1 می‌پردازیم:

$$a_1 + a_1q = \frac{9}{2} \xrightarrow{q=2} a_1 + 2a_1 = \frac{9}{2} \Rightarrow 3a_1 = \frac{9}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = a_1q^2 \Rightarrow a_3 = \frac{3}{2}(2)^2 = \frac{3}{2} \times 4 = 6$$

۱۰۳- (۲)

$a_1 + a_3 = 4a_2 \quad , \quad q = ?$

$$a_1 + a_3 = 4a_2 \Rightarrow \underbrace{a_1 + a_1q^2}_{\text{از } a_1 \text{ فاکتور می‌گیریم.}} = 4a_1q \Rightarrow a_1(1+q^2) = 4a_1q \xrightarrow[\text{رابطه ساده می‌کنیم.}]{\text{را از طرفین } a_1 \neq 0} 1 + q^2 = 4q \Rightarrow q^2 - 4q + 1 = 0$$

روشی مناسب به نام روش Δ' برای محاسبه‌ی ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم

در معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$، هنگامی که b **عددی زوج** باشد، برای محاسبه‌ی ریشه‌های معادله می‌توان از روش Δ' استفاده نمود. برای استفاده از این روش $b' = \frac{b}{2}$ در نظر بگیرید. داریم:

$$\Delta' = b'^2 - ac \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} & \text{ریشه‌ی اول} \\ x_2 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} & \text{ریشه‌ی دوم} \end{cases}$$

مثال: ریشه‌های معادله‌ی $-x^۲+۸x+۴۸=۰$ را بیابید.

پاسخ: از روش Δ' استفاده می‌کنیم:

$$b=۸\Rightarrow b'=\frac{۸}{۲}=۴\Rightarrow \Delta'=b'^۲-ac=۱۶-(-۱)(۴۸)=۱۶+۴۸=۶۴\Rightarrow \begin{cases} x_۱=\dfrac{-۴+\sqrt{۶۴}}{-۱}=-۴\\ x_۲=\dfrac{-۴-\sqrt{۶۴}}{-۱}=۱۲\end{cases}$$

این روش سرعت محاسبه را بالا می‌برد و بهتر است به آن عادت کنید!

حال به ادامه‌ی حل دقت کنید:
$$q^۲-۴q+۱=۰\xrightarrow{\text{روش }\Delta'}q=۲\pm\sqrt{۳}\xrightarrow[\text{افزایشی}]{\text{دنباله‌ی}}q=۲+\sqrt{۳}$$

سؤال: *دانش‌پژوه (نیکتا نیلگون)*: **ببخشید چرا $q=۲-\sqrt{۳}$ را قبول نکردید؟**

پاسخ: *ببین دانش‌پژوه، در تست عنوان شده دنباله‌ی هندسی، افزایشی است، حالا با توجه به این که $\sqrt{۳}$ تقریباً ۱/۷ هست $q=۲-\sqrt{۳}\simeq ۲-۱/۷=۰/۳$ میشه و از طرفی می‌دونیم که در دنباله‌ی هندسی افزایشی با جملات مثبت باید $q>۱$ باشه.*

۱۰۴- (۳)

$$\begin{cases}a_۲+a_۵=۲۵۲\\ a_۳+a_۴=۶۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_۱q+a_۱q^۴=۲۵۲ & (*)\\ a_۱q^۲+a_۱q^۳=۶۰ & (**)\end{cases}\xrightarrow[\text{بر }(*)]{\text{تقسیم }(**)}\frac{a_۱q^۲+a_۱q^۳}{a_۱q+a_۱q^۴}=\frac{۶۰}{۲۵۲}\Rightarrow\frac{a_۱q^۲(۱+q)}{a_۱q(۱+q^۳)}=\frac{۵}{۲۱}$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه چاق و لاغر}}\frac{q\cancel{(۱+q)}}{\cancel{(۱+q)}(۱-q+q^۲)}=\frac{۵}{۲۱}\Rightarrow ۲۱q=۵q^۲-۵q+۵\Rightarrow ۵q^۲-۲۶q+۵=۰\xrightarrow[\Delta'\text{ یا }\Delta]{\text{حل به روش}}q=۵\text{ یا }q=\frac{۱}{۵}$$

چون دنباله‌ی هندسی، افزایشی است، لذا $q=۵$ قابل قبول است.

۱۰۵- (۳) از شرط مسأله می‌توان گفت، $a_n=a_{n-۲}+a_{n-۱}$، به ازای $n=۳$ داریم:
$$a_۳=a_۱+a_۲\Rightarrow a_۱q^۲=a_۱+a_۱q$$

$$\xrightarrow[a_۱\text{ از}]{\text{با فاکتورگیری}}a_۱q^۲=a_۱(۱+q)\xrightarrow{\text{با تقسیم دو طرف بر }a_۱}q^۲=۱+q$$

$$\Rightarrow q^۲-q-۱=۰\Rightarrow\begin{cases}q_۱=\dfrac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\\ q_۲=\dfrac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\end{cases}\Rightarrow q=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

سؤال: *دانش‌پژوه (نعیمه گل‌رخسار)*: **چرا $q=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ را گرفتید؟**

پاسخ: *ای بابا دقت کن! گفته جملات همه مثبت‌اند، پس باید $q>۰$ باشد. $\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$ کوچک‌تر از صفر میشه. پیرم کردید شما!*

۱۰۶- (۱)

$$t_۲+t_۳+t_۴+t_۵+t_۶=۶۲\quad,\quad t_۱+t_۲+t_۳+t_۴+t_۵=۳۱\quad,\quad t_۳=?$$

با تقسیم دو رابطه‌ی داده شده بر هم داریم:

$$\frac{t_۲+t_۳+t_۴+t_۵+t_۶}{t_۱+t_۲+t_۳+t_۴+t_۵}=\frac{۶۲}{۳۱}\Rightarrow\frac{t_۱q+t_۱q^۲+t_۱q^۳+t_۱q^۴+t_۱q^۵}{t_۱+t_۱q+t_۱q^۲+t_۱q^۳+t_۱q^۴}=۲$$

$$\xrightarrow[\text{فاکتور از }t_۱]{\text{با فاکتورگیری از }t_۱q}\frac{\cancel{t_۱}q\cancel{(۱+q+q^۲+q^۳+q^۴)}}{\cancel{t_۱}\cancel{(۱+q+q^۲+q^۳+q^۴)}}=۲\Rightarrow q=۲$$

با کم کردن جملات داده شده از هم نیز داریم:

$$(t_۲+t_۳+t_۴+t_۵+t_۶)-(t_۱+t_۲+t_۳+t_۴+t_۵)=۶۲-۳۱$$

$$\Rightarrow t_۶-t_۱=۳۱\Rightarrow t_۱q^۵-t_۱=۳۱\xrightarrow{q=۲}۳۲t_۱-t_۱=۳۱\Rightarrow t_۱=۱\Rightarrow t_۳=t_۱q^۲=۱\times ۲^۲=۴$$

۱۰۷- (۳)

$$a_۱=۱۰۰۰\quad,\quad q=۱+۰/۲=۱/۲\quad,\quad a_۵=?$$

$$a_۵=aq^۴\Rightarrow a_۵=۱۰۰۰(۱/۲)^۴=۱۰۰۰\times ۲/۰۷۳۶=۲۰۷۳/۶$$

سؤال: *دانش‌پژوه (زهره تابش)*: **ببخشید من متوجه نشدم چرا $q=۱/۲$ شد؟**

پاسخ: *هر وقت یک رشته اعداد طوری باشن که یک درصد مشخص از هر جمله به همان جمله اضافه یا کم بشه تا جمله‌ی بعدی ساخته بشه این رشته دنباله‌ی هندسیه و برای به دست آوردن قدرنسبت، درصد را به اعشار تبدیل می‌کنیم و اونو با یک جمع می‌کنیم. مثلاً اگه ۵۰ درصد به دستمزد روز قبل کارگر اضافه می‌شد قدرنسبت به صورت $q=۱+۰/۵=۱/۵$ به دست می‌یومد. همین‌طور اگه ۳۰ درصد به دستمزد روز قبل کارگر اضافه می‌شد قدرنسبت به صورت $q=۱+۰/۳=۱/۳$ به دست می‌یومد.*

۱۰۸- (۱) جمعیت روستا در ابتدا ۱۰۰۰ نفر است و هر سال $\frac{1}{10}$ جمعیت افراد روستا کم می‌شود و در واقع مقدار جمعیت روستا $\frac{9}{10} = \frac{1}{10} - 1$ مقدار قبلی می‌شود. پس یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت $q = 0/9$ داریم. بنابراین:

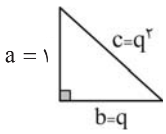
$$a_1 = \text{جمعیت روستا پس از یک سال} = 1000 \times \frac{9}{10} = 900$$

$$\Rightarrow \text{جمعیت روستا پس از ۳ سال} = a_3 = a_1 q^2 = 900 \times \left(\frac{9}{10}\right)^2 = 729$$

سؤال: *دانش‌پژوه (رعنا ظفرپور)*: **ببخشید، میشه توضیح بدین چرا $a_1 = 900$ گرفتید؟ مگه $a_1 = 1000$ نمیشه؟**

پاسخ: *ببین بچه! در این‌جا a_1 را جمعیت روستا پس از گذشت یک سال در نظر گرفتیم یعنی $a_1 = 900$. در این‌صورت جمعیت روستا پس از گذشت سه سال، برابر a_3 می‌شود.*

۱۰۹- (۳) چون اضلاع مثلث قائم‌الزاویه تشکیل یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت q می‌دهند، طول دو ضلع دیگر آن را به‌صورت q و q^2 می‌گیریم. از قضیه‌ی فیثاغورس داریم:



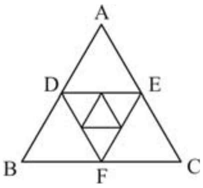
$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow 1^2 + q^2 = (q^2)^2 \Rightarrow q^4 - q^2 - 1 = 0$$

برای به‌دست آوردن وتر مثلث کافی است q^2 را به روش Δ محاسبه نماییم.

$$\Delta = 1 - 4(1)(-1) = 5 \Rightarrow q^2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2(1)} \xrightarrow{q^2 > 0} q^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{اندازه‌ی وتر} = c = q^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

۱۱۰- (۱) **راه اول:** محیط مثلث اول برابر است با $144 = 48 \times 3$. اضلاع مثلث حاصل بعدی (دوم) نصف اضلاع مثلث اول است. به‌همین ترتیب اگر این‌کار را ادامه دهیم، دنباله‌ی محیط مثلث‌های حاصل به‌صورت زیر می‌شود:



$$3 \times 48, 3 \times \frac{48}{2}, 3 \times \frac{48}{2^2}, 3 \times \frac{48}{2^3}, \dots = 144, \frac{144}{2}, \frac{144}{2^2}, \frac{144}{2^3}, \dots$$

بنابراین محیط مثلث‌های حاصل تشکیل یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{2}$ و جمله‌ی اول ۱۴۴ می‌دهند که جمله‌ی عمومی آن $a_n = 144\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ می‌باشد. پس محیط مثلث ششم $(n = 6)$ برابر است با:

$$\text{محیط مثلث ششم} = a_6 = 144 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1} = 144 \times \frac{1}{32} = \frac{9}{2}$$

راه دوم:

> **نکته:** اگر **وسط‌های اضلاع مجاور یک n ضلعی منتظم** را به یک‌دیگر وصل کرده و این‌کار را متوالیاً تکرار کنیم، **محیط** (و طول‌های اضلاع) n ضلعی‌های منتظم ایجاد شده، یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت $\mathbf{q = \cos\frac{180^\circ}{n}}$ و **مساحت** n ضلعی‌های منتظم ایجاد شده، یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت $\mathbf{q' = \cos^2\frac{180^\circ}{n}}$ تشکیل می‌دهند.

با توجه به نکته‌ی فوق، مسأله را حل می‌کنیم. مثلث متساوی‌الاضلاع یک ۳ ضلعی منتظم است، یعنی $n = 3$. بنابراین محیط مثلث‌های ایجاد شده یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت $q = \cos\frac{180^\circ}{3} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ می‌باشند و داریم:

$$\text{محیط مثلث اولیه} = a_1 = 3 \times 48 \quad , \quad q = \frac{1}{2}$$

$$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow a_6 = a_1 q^5 = 3 \times 48 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 3 \times \cancel{48}^{\,3} \times \frac{1}{\cancel{32}_{\,2}} \Rightarrow a_6 = \frac{9}{2}$$

۱۱۱- (۴) مساحت مربع اولیه $S_1 = a^2$ است. حال با استفاده از نکته‌ی راه دوم تست قبل، از آن‌جا که مربع، چهارضلعی منتظم است، $n = 4$ بوده و مساحت مربع‌های حاصل تشکیل دنباله‌ی هندسی می‌دهند که قدرنسبت آن برابر است با:

$$q = \cos^2\frac{180^\circ}{n} = \cos^2\frac{180^\circ}{4} = \cos^2 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$S_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow S_n = a^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \xrightarrow{\frac{1}{2} = 2^{-1}} S_n = a^2(2^{-1})^{n-1} \Rightarrow S_n = a^2(2^{-n+1})$$