مهروماه

کامل‌ترین مرجع امتحانات نهایی

مرجع نهایی

هندسه ۲

حمیده حاجی محمدی

مقدمه‌ی ناشر

چند سالی است که اثر چند درصدی (!) معدّل در کنکور سراسری و افزایش هر ساله‌ی آن، دانش‌آموزان را به تلاش بیش‌تر جهت کسب معدّل بالاتر واداشته است. شاید همه با این نظر موافق باشند که بهترین راه آماده شدن برای آزمون‌های نهایی، مرور و بررسی همه‌ی سؤالات مطرح‌شده در سال‌های اخیر است. امّا متأسّفانه در بازار رنگارنگ کتاب هنوز چنین مرجع کامل و دقیقی که بتوان با اطمینان به آن اتکا کرد نیامده است.

بر این اساس مهر و ماه با تلاشی مضاعف، مجموعه‌ی کامل چهارده جلدی **مرجع نهایی** سال سوم را با ویژگی‌های زیر فراهم کرده است:

۱ تمامی سؤالات طرح‌شده در این مجموعه همگی از آزمون‌های نهایی در دهه‌ی اخیر هستند.

بنابراین با داشتن این مجموعه مطمئن باشید تمامی سؤالات طرح شده در آزمون‌های نهایی را خواهید داشت.

۲ سؤالات به صورت موضوعی منطبق بر عناوین کتاب درسی یا عناوین آزمون‌ها دسته‌بندی شده‌اند. مثلاً در درس ادبیّات و دین و زندگی سؤالات به صورت خط به خطّ کتاب درسی چیده شده‌اند و در درسی مثل زبان فارسی قالب کتاب همان قالب آزمون است. در درسی مثل عربی یک سری سؤالات درس به درس و یک‌سری (مطابق با آزمون) ترکیبی چیده شده‌اند. در پایان هر کتاب هم چند دوره از امتحانات به صورت کامل همراه با بارم‌بندی آمده است تا با ساختار کلّی و چیدمان امتحان آشنا شوید و بتوانید در آموخته‌های خود را بسنجید.

بنابراین برای مرور مطالب در هر درس با روشی متفاوت و اصولی نسبت به بقیّه‌ی دروس مواجه می‌شوید که تسلّط شما را بر مفاهیم کتاب و آزمون در زمان کم بالا ببرد.

۳ تمامی سؤالات به صورت مختصر و مفید پاسخ داده شده‌اند.

بنابراین فرصت دارید درستی معلومات خود را به بهترین وجه محک بزنید.

۴ این مجموعه صرفاً سؤال و پاسخ نیست در جای جای آن (بسته به ضرورت و نه زیاده‌گویی!) مشاوره‌های تخصصی آن درس آمده است تا خود را در متن کار تنها نبینید. در ابتدای کتاب هم توصیه‌های کلّی مشاوره‌ای، نحوه‌ی بارم‌بندی و ... آمده که توصیه می‌کنیم حتماً آن را مطالعه کنید.

پس این مشاوره‌ها را جدّی بگیرید و ایده‌های طرح‌شده را عملی کنید تا با آرامش و اطمینان در جلسه اطمینان شرکت کنید.

۵ چون این مجموعه به صورت موضوعی آماده شده است، در ضمن تدریس معلّم در طی سال نیز بسیار کارآمد خواهد بود، البته همان طور که گفته شد برای آمادگی قطعی و آشنایی همه‌جانبه‌ی شما عزیزان، در انتهای کتاب چند آزمون به همراه کلید تصحیح آورده‌ایم.

بنابراین با نحوه‌ی نمره‌دهی و تصحیح اوراق نیز آشنا می‌شوید.

در پایان، امیدوارم این مجموعه‌ی ارزشمند، گامی در جهت کاهش دغدغه‌های آموزشی شما عزیزان باشد.

مقدمه‌ی مؤلف

سلام!

مجموعه‌ای که برای شما آماده‌شده کامل‌ترین و مناسب‌ترین کتابی است که تمام زمینه‌های شما برای آماده‌شدن (در طی سال و شب امتحان!) برای آزمون‌های نهایی را برآورده می‌کند.

تمامی سؤالات طرح‌شده در آزمون‌های نهایی از سال ۸۲ به بعد، به صورت موضوعی و منطبق بر تیترهای کتاب درسی به ترتیب سال چیده شده‌اند. بنابراین با همراه‌داشتن این کتاب در طی سال، با تمام جزییات سؤالات طرح‌شده در هر بخش به خوبی آشنا شده و تسلط خود بر آن موضوع را به حداکثر می‌رسانید.

برای آمادگی در شب امتحان و مرور مطالب نیاز است که با چند آزمون جامع خود را محک بزنید. برای همین در انتهای کتاب چند آزمون با کلید تصحیح آورده شده است.

برای اینکه با روند پاسخ‌دهی به سؤالات هندسه آشنایی کامل پیدا کنید در هر بخش حتماً پاسخ خود را با پاسخ‌های تشریحی آن بخش مقایسه کنید.

سخن پایانی

در آماده‌سازی این مجموعه، دوستان و همکاران مهربان و دلسوزی زحمت کشیدند که جا دارد از همراهی و همدلی ایشان نهایت تقدیر و تشکر صورت پذیرد. آقای احمد اختیاری مدیریت محترم انتشارات، آقای محمد نصیری مسئول پروژه‌ی مرجع نهایی، سرکار خانم مینا نظری ویراستار محترم مجموعه، جناب آقای رضا باغبانی طراح جلد خوش ذوق مجموعه، خانم سمیه طاهرخانی صفحه آرا و فاطمه بخششی و آقای زمانی تایپیست مجموعه، آقای گودرزی مدیر واحد فروش و همکاران پرتلاش ایشان و... امیدوارم زحماتتان با درخشش دانش‌آموزان مخاطب این کتاب در امتحانات نهایی مورد قدردانی قرار گیرد.

در پایان، از کلیه‌ی همکاران محترم، دبیران دبیرستان‌ها، مشاورین محترم و دانش‌آموزان گل تقاضامندیم چنان‌چه نقص و کمبودی در این مجوعه مشاهده نمودند و یا اینکه ایده و نظری جهت پیشرفت این کتاب داشتند، به سامانه‌ی پیامک انتشارات به شماره‌ی ۳۰۰۰۷۲۱۲۰ ارسال نمایند.

خوشحال و سربلند باشد

حمیده حاجی‌محمدی

فهرست

نکات مشاوره‌ای

یکی از دروس پر حجم در سال سوم هندسه است که برای موافق شدن در آزمون تشریحی آن باید به نکات زیر توجه دشته باشید.

۱ دقت داشته باشید که تعداد سؤالات طرح شده در هر آزمون زیاد است و با توجه به اینکه پاسخ‌های تشـریحی شـما باید بسیار کامل باشد فقط فرصت نوشتن دارید و نه فکر کردن. بنابراین باید از قبل به سؤالات طرح شده در آزمون‌های سال‌های گذشته آشنا باشید.

۲ بهترین روش برای مطالعه و مرور هندسه، حل سؤالات به دست خودتان است. یعنی باید یک‌بار به خط خودتان مسائل را حل کرده و پاسخ خود را با جواب مرجع تشریحی خود مقایسه کنید. اگر جواب سـؤال برایتان سـخت بود این کار را باید چند بار انجام دهید تا به خوبی در ذهن شما ثبت شود طوری که با دیدن سؤال، سریع به یاد راه‌حل خود افتاده و جواب را بنویسید.

۳ در امتحان در پاسخ‌هایتان باید دقت داشته باشید که هر قسمت از استدلال شما نمره دارد پس باید به دقت به نوع درست نوشتن آگاهی داشته و به آن عادت کنید.

۴ در پاسخ به سؤالات حتماً فرض، حکم و برهان خود را مشخص نمایید.

۵ سؤالاتی که در آن باید درستی یا نادرستی جملات را مشخص کنید فقط عبارت درست یا نادرست را بنویسید و نیاز به نوشتن استدلال نیست.

۶ شکل‌های خود را در برگه‌ی پاسخ تمیز و خوانا ترسیم کنید.

موفق و سربلند باشید

محمد نصیری

فصل اول

استدلال در هندسه

در این فصل با روش‌های مختلف اســتدلال در مباحث هندسه، آشنا می‌شویم. یاد می‌گیریم که اول حــدس بزنیم و بعد حدس‌های خــود را دقیق و دقیق‌تر کنیم تا به جواب مطلوب برســیم. قضایای گفته شده در این فصل مثل قضیه‌ی لولا، قضیه‌ی وجود مثلث، قضیه‌ی نامساوی مثلث و ... از قضای بسیار مهم در هندسه هستند.

فصل اول
استدلال در هندسه
سوالات امتحانی

استدلال استقرایی

۱. یک نقطه‌ی دلخواه روی قاعده‌ی یک مثلث متساوی‌الساقین به طول ساق ۳ سانتی‌متر در نظر بگیرید. از این نقطه به موازات دو ساق مثلث خطوطی رسم کنید. طول دو پاره‌خط ایجاد شده را اندازه بگیرید. سپس مجموع آن‌ها را به دست آورید. با استفاده از استدلال استقرایی نشان دهید که آیا با جابه‌جا کردن این نقطه روی قاعده تغییری در اندازه‌ی این مجموع ایجاد می‌شود؟ آیا رابطه‌ای بین این مجموع و اجزای مثلث وجود دارد؟ (دی ۸۵، دی ۸۳)

۲. اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاعی را به سه قسمت مساوی تقسیم کنید. روی هر قسمت میانی یک مثلث متساوی‌الاضلاع بنا کنید. پاره‌خط میانی را حذف کنید. (دی ۸۷)

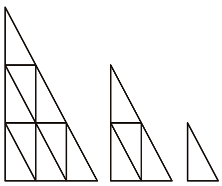
الف) این عمل را تا ۲ مرحله انجام دهید (با رسم شکل) سپس جدول زیر را کامل کنید.

مرحله	۰	۱	۲	...	n
تعداد پاره‌خط‌ها	۳	۱۲	?		?

ب) اگر طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع در مرحله صفر برابر ۱ باشد، محیط شکل حاصل در مرحله‌های ۱ و ۲ را به دست آورید و جدول زیر را کامل کنید.

مرحله	۰	۱	۲	...	n
محیط	۳	?	?		?

۳. مثلث‌های شکل‌های ۱، ۲ و ۳ با هم متشابه و مثلث‌های کوچک همه با هم همنهشت هستند. با توجه به شکل‌های زیر و با استفاده از استدلال استقرایی جدول زیر را کامل کنید. (شهریور ۸۸)



(۳) (۲) (۱)

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد مثلث‌های کوچک	۱	۴	۹	؟	...	؟

۴. وسط ضلع‌های چهارضلعی‌های زیر را به طور متوالی به هم وصل می‌کنیم. حدس شما در مورد نام چهارضلعی پدید آمده از وصل کردن وسط‌های ضلع‌های آن‌ها چیست؟ (دی ۸۸)

الف) مستطیل ب) مربع ج) متوازی‌الاضلاع د) لوزی

۵. با رسم چندضلعی‌های محدب تا شش‌ضلعی و رسم قطرهای مربوط به هر رأس: (شهریور ۸۹، خرداد ۸۷)

الف) جدول زیر را کامل کنید.

تعداد ضلع‌ها	۳	۴	۵	۶	...	n
تعداد قطرهای رسم شده از یک رأس	۰	۱	۲	?	...	?

ب) به کمک استدلال استقرایی بالا رابطه‌ای برای تمام قطرهای nضلعی محدب بیابید.

۶. واژه‌های زیر را تعریف کنید.

الف) خط‌های همرس (دی ۸۹)

ب) شکل خود متشابه (شهریور ۸۶)

۷. الف) یک مثلث متساوی‌الاضلاع به دقت رسم نمایید. وسط ضلع‌ها را پیدا کرده و به هم وصل کنید. (خرداد ۹۰، خرداد ۸۶)

ب) سه مثلثی را که در گوشه ایجاد می‌شود، نگه دارید و مثلث میانی را با سیاه کردن حذف کنید.

این فرایند را روی سه مثلث باقی‌مانده تکرار کنید و با استفاده از استدلال استقرایی جدول زیر را کامل کنید. (در مرحله دوم شکل را رسم کنید)

مرحله	۰	۱	۲	...	n
تعداد مثلث‌ها	۱	?	?	...	?

۸. جای خالی را به‌طور مناسب پر کنید. (شهریور ۹۰)

- اگر قسمتی از یک شکل با کل شکل متشابه باشد، آن شکل .... نامیده می‌شود.

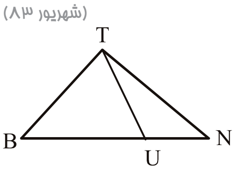
استدلال استنتاجی

۹. مثلث ABC متساوی‌الساقین است. نقطه‌ی دلخواه P را روی قاعده BC اختیار کنید. نشان دهید که مجموع فاصله‌های نقطه‌ی P از دو ساق AB و AC برابر ارتفاع وارد بر یکی از آن ساق‌ها است. (دی ۸۲)

۱۰. فرق استدلال استقرایی و استنتاجی را بنویسید. (خرداد ۸۳)

۱۱. ثابت کنید هرگاه وسط‌های اضلاع مربعی را متوالیاً به هم وصل کنیم، چهارضلعی حاصل یک مربع می‌باشد. (خرداد ۸۳)

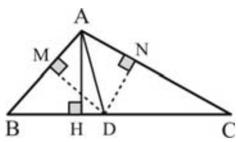
۱۲. فرض کنیم در شکل زیر $BT = BU$. ثابت کنید $B\hat{T}N > T\hat{U}B$ (شهریور ۸۳)



۱۳. در مثلث ABC، AH ارتفاع و AD نیمساز است. مساحت مثلث ABD و ACD را به ترتیب با S و S' نشان می‌دهیم. (شهریور ۸۷)

الف) با در نظر گرفتن BD و DC به عنوان قاعده‌ی این مثلث‌ها نسبت $\frac{S}{S'}$ را به دست آورید.

ب) از D عمودهایی بر اضلاع AB و AC رسم کنید و پای آن‌ها را M و N بنامید. DM و DN چه رابطه‌ای با هم دارند؟



ج) با در نظر گرفتن AB و AC به عنوان قاعده‌ی مثلث‌های ABD و ADC، نسبت $\frac{S}{S'}$ را به دست آورید.

د) از مقایسه نسبت‌ها در بند (الف) و (ج) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۱۴. سه ضلع مثلثی $BC = ۶$ ، $AC = ۴$ و $AB = ۵$ سانتی‌متر می‌باشد. اندازه‌ی پاره‌خط‌هایی که نیمساز داخلی زاویه‌ی C بر ضلع AB ایجاد می‌کند را تعیین کنید. (دی ۸۷)

۱۵. اندازه‌ی سه ضلع مثلثی $AB = ۱۶$ و $AC = ۲۲$ و $BC = ۱۹$، سانتی‌متر هستند. اندازه‌ی پاره‌خط‌هایی که نیمساز درونی زاویه $\hat{A}$ بر ضلع مقابل آن پدید می‌آورد را تعیین کنید. (خرداد ۸۸)

۱۶. از تقاطع نیمسازهای زاویه‌های داخلی یک مستطیل، یک مربع پدید می‌آید. رابطه‌ی بین طول ضلع این مربع و اضلاع مستطیل را به دست آورید. (شهریور ۸۸، خرداد ۸۶، خرداد ۸۴)

۱۷. قضیه: اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، آن‌گاه زاویه مقابل به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر از زاویه مقابل به ضلع کوچک‌تر است. (دی ۸۸)

۱۸. ثابت کنید اگر از یک نقطه‌ی اختیاری روی قاعده‌ی یک مثلث متساوی‌الساقین دو خط به موازات دو ساق رسم کنیم تا آن‌ها را قطع کند، آن‌گاه مجموع طول پاره‌خط‌های ایجاد شده برابر با طول ساق مثلث خواهد بود. (خرداد ۸۹، شهریور ۸۶، دی ۸۴)

۱۹. قضیه: ثابت کنید از تقاطع نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مستطیل یک مربع ایجاد می‌شود. (شهریور ۸۹، دی ۸۵، شهریور ۸۲)

۲۰. با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن مقداری ثابت است. (خرداد ۹۰، شهریور ۸۴)

۲۱. قضیه: در هر مثلث نیمساز هر زاویه، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می‌کند.
(شهریور ۹۰، شهریور ۸۸، شهریور ۸۶، دی ۸۴، خرداد ۸۴، دی ۸۳، شهریور ۸۳)

مثال نقض

۲۲. برای رد حدس‌های کلی زیر مثال نقض ارائه دهید:

الف) اگر دو زاویه مکمل یکدیگر باشند، آن‌گاه هر دو زاویه قائمه هستند. (خرداد ۸۹)

ب) اگر دو مثلث هم‌مساحت باشند، آن‌گاه هم‌نهشت هستند. (خرداد ۸۹)

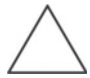
ج) ارتفاع‌های هر مثلث داخل مثلث واقع است. (شهریور ۸۷)

۲۳. واژه‌ی زیر را تعریف کنید: (شهریور ۹۰، خرداد ۸۵)

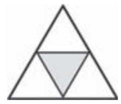
- مثال نقض

۷. مثلث متساوی‌الاضلاعی به روش مطرح شده در مسئله رسم می‌کنیم و مراحل آن‌را بررسی می‌کنیم.

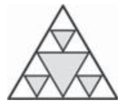
۱. مرحله‌ی ۰ (تعداد مثلث‌ها=۱)



۲. مرحله‌ی ۱ (تعداد مثلث‌ها=۳)



۳. مرحله‌ی ۲ (تعداد مثلث‌ها=۹)



حال جدول زیر را کامل می‌کنیم.

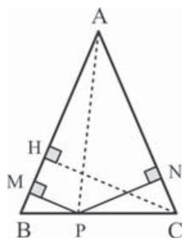
مرحله	۰	۱	۲	...	n
تعداد مثلث‌ها	۱	۳	$۳^۲$	...	۳^n

۸. پاسخ «خود - متشابه» می‌باشد.

۹. فرض می‌کنیم $\overset{\Delta}{ABC}$ یک مثلث متساوی‌الساقین و P نقطه‌ای دلخواه روی قاعده‌ی BC باشد.

PM و PN عمودهای رسم شده از نقطه‌ی P بر ۲ ساق مثلث و CH ارتفاع وارد بر ساق است.

حکم: $PN + PM = CH$



از نقطه‌ی A، به P وصل می‌کنیم. با توجه به این‌که مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ به دو قسمت تبدیل شده است، داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S_{\overset{\Delta}{ABP}} + S_{\overset{\Delta}{APC}}$$

$$\Rightarrow \frac{CH \times AB}{۲} = \frac{PM \times AB}{۲} + \frac{PN \times AC}{۲}$$

از طرفی، طبق فرض، $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی‌الساقین است. لذا داریم:

$$AB = AC$$

بنابراین:

$$\frac{CH \times AB}{۲} = \frac{PM \times AB}{۲} + \frac{PN \times AB}{۲}$$

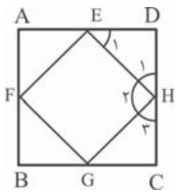
$$\Rightarrow CH = PM + PN$$

۱۰. استدلال استقرایی، استدلالی است که در آن نتیجه‌گیری به صورت حدس و گمان و براساس تعداد متعددی آزمایش انجام می‌شود و مبتنی بر تجربه است. مانند آزمایش یک پدیده در آزمایشگاه. (تعداد زیادی از کشفیات فیزیک، توسط این استدلال صورت گرفته است. اما در هندسه این روش، نمی‌تواند به صورت یک روش اثبات مطرح شود و صرفاً برای حدس زدن مناسب است). در استدلال استنتاجی، حکم مورد نظرمان را به کمک اصول و قواعدی که از قبل پذیرفته‌ایم، اثبات می‌کنیم. استدلالی در هندسه مورد قبول است که در آن با استفاده از فرضیات مسئله و به کمک اصول، قواعد و قضایایی که درستی آن‌ها را از قبل اثبات کرده و پذیرفته‌ایم، حکم را نتیجه بگیریم. به این نوع استدلال، استدلال استنتاجی می‌گویند.

به عبارت دیگر، استدلال استنتاجی، بیان نتایج بر اساس حقایقی است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.

۱۱. با توجه به فرض مسئله، ABCD یک مربع است و E، F، G و H وسط‌های اضلاع آن هستند.

حکم: EFGH مربع است.



طبق فرض، H و E به ترتیب وسط اضلاع DC و AD می‌باشند، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} ED = \dfrac{AD}{۲} \\ DH = \dfrac{DC}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{EDH} : ED = DH \Rightarrow \hat{E}_۱ = \hat{H}_۱ \quad (۱)$$

از طرفی ABCD مربع است، بنابراین: $\hat{D} = ۹۰^\circ \quad (۲)$

مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است، لذا از (۱) و (۲) داریم:

$$\hat{E}_۱ + \hat{H}_۱ + \hat{D} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\hat{H}_۱ + ۹۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{H}_۱ = ۴۵^\circ$$

با تکرار همین روند در مثلث $\overset{\Delta}{GCH}$ نتیجه می‌گیریم: $\hat{H}_۳ = ۴۵^\circ$

از آن‌جایی که $\hat{H}_۱$، $\hat{H}_۲$ و $\hat{H}_۳$ سه زاویه‌ی مجانب هستند، داریم:

$$\hat{H}_۱ + \hat{H}_۲ + \hat{H}_۳ = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{H}_۱ = \hat{H}_۳ = ۴۵^\circ} \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ$$

به همین ترتیب، قائمه بودن بقیه‌ی زوایای چهارضلعی EFGH نیز اثبات می‌شود. همچنین طبق فرض:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} ED = \dfrac{AD}{۲} \\ CG = \dfrac{BC}{۲} \end{array}\right\} \xrightarrow{AD=BC} ED = CG \\ \text{وسط } DC \ H \Rightarrow DH = HC \\ \overset{\square}{ABCD} : \hat{D} = \hat{C} \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})}$$

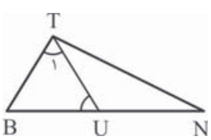
$$\overset{\Delta}{EDH} \cong \overset{\Delta}{CGH}$$

لذا با توجه به تساوی اجزای متناظر، خواهیم داشت:

$EH = HG \Rightarrow$ $\overset{\square}{EFGH}$ مربع است.

۱۲. با توجه به فرض داریم: $BT = BU$

حکم: $B\hat{T}N > T\hat{U}B$



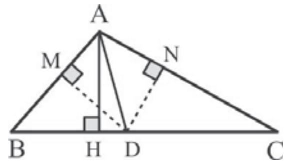
نقطه‌ی U، بین دو نقطه‌ی B و N قرار دارد، لذا TU خطی درون زاویه‌ی $B\hat{T}N$ است. بنابراین: $\hat{T}_۱ < B\hat{T}N \qquad (۱)$

از طرفی، بنابر فرض مسئله داریم:

$$\overset{\Delta}{BTU}: BT = BU \Rightarrow \hat{T}_۱ = T\hat{U}B \qquad (۲)$$

پس، با توجه به روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: $T\hat{U}B < B\hat{T}N$

۱۳.



الف) اگر BD و DC را به عنوان قاعده‌ی دو مثلث $\overset{\Delta}{ABD}$ و $\overset{\Delta}{ADC}$ در نظر بگیریم، ارتفاع هر دو مثلث برابر با AH خواهد بود. لذا:

$$\frac{S}{S'} = \frac{\frac{۱}{۲}(AH \times BD)}{\frac{۱}{۲}(AH \times DC)} = \frac{BD}{DC}$$

ب) فاصله‌ی هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه برابر است. بنابراین، چون AD نیمساز $\hat{A}$ است، داریم: $DM = DN$

ج) با در نظر گرفتن AB و AC به عنوان قاعده‌ی مثلث‌های $\overset{\Delta}{ABD}$ و $\overset{\Delta}{ADC}$ داریم:

$$\frac{S}{S'} = \frac{\frac{۱}{۲}(DM \times AB)}{\frac{۱}{۲}(DN \times AC)} \overset{DM = DN}{=\!=\!=} \frac{\frac{۱}{۲}(DM \times AB)}{\frac{۱}{۲}(DM \times AC)} = \frac{AB}{AC}$$

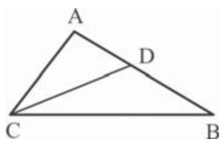
د) با توجه به نتایج بندهای (الف) و (ج) داریم:

$$\frac{S}{S'} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

به عبارت دیگر، در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$، نیمساز زاویه‌ی **A** ضلع روبرو به آن زاویه، یعنی BC را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می‌کند.

۱۴. در فرض مسئله داریم: $(AB = ۵, AC = ۴, BC = ۶)$

اگر مثلث رسم شده به صورت زیر باشد، اندازه‌ی AD و DB را به‌دست می‌آوریم:



آموزه ۱

در هر مثلث، نیمساز هر زاویه‌ی داخلی ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می‌کند. (اثبات این آموزه در سؤال ۲۱ می‌باشد.)

CD نیمساز زاویه $\hat{C}$ است پس ضلع AB را به نسبت دو ضلع زاویه‌ی $\hat{C}$ قطع می‌کند.

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB} \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{۴}{۶} \Rightarrow \frac{AD}{AD + DB} = \frac{۴}{۴ + ۶}$$

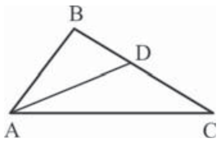
$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{۴}{۱۰} \Rightarrow \frac{AD}{۵} = \frac{۴}{۱۰} \Rightarrow AD = ۲cm$$

از آن‌جایی که: $AD + DB = AB$، داریم:

$$DB = AB - AD = ۵ - ۲ = ۳\ cm$$

۱۵. همانند مسئله‌ی قبل، با استفاده از مفروضات مسئله، یعنی: $(BC = ۱۹, AC = ۲۲, AB = ۱۶)$ اندازه‌ی پاره‌خط‌های ایجاد شده توسط نیمساز زاویه‌ی $\hat{A}$ را به‌دست می‌آوریم.

فرض می‌کنیم شکل رسم شده بصورت زیر باشد.



AD نیمساز زاویه‌ی $\hat{A}$ است پس بنابر آموزه‌ی ۱ داریم:

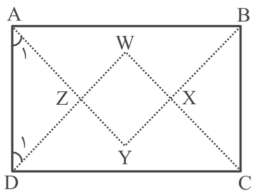
$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{۱۶}{۲۲} \Rightarrow \frac{BD}{BD + DC} = \frac{۱۶}{۱۶ + ۲۲}$$

$$\xrightarrow{BD+DC=BC} \frac{BD}{۱۹} = \frac{۱۶}{۳۸} \Rightarrow BD = ۸cm$$

از آن‌جایی که $BC = BD + DC$، خواهیم داشت:

$$DC = BC - BD \Rightarrow DC = ۱۹ - ۸ = ۱۱cm$$

۱۶. مستطیل ABCD را در نظر گرفته، و طبق فرض نیمسازهای زوایای داخلی آن را رسم می‌کنیم. تقاطع آن‌ها را W، X، Y و Z می‌نامیم.



می‌خواهیم رابطه‌ی بین طول ضلع مربع WXYZ و اضلاع مستطیل ABCD را بیابیم. (مربع بودن چهارضلعی WXYZ، به طور کامل در سؤال ۱۹ اثبات شده است.) از آنجایی که AY و DW، به ترتیب نیمسازهای دو زاویه‌ی $\hat{A}$ و $\hat{D}$ هستند، نتیجه می‌گیریم: $\hat{A}_۱ = \hat{D}_۱ = ۴۵^\circ$

هم‌چنین به علت مربع بودن WXYZ، زاویه‌ی $\hat{Z}$ برابر ۹۰ درجه می‌باشد، لذا مثلث $\overset{\Delta}{ADZ}$، قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین است، پس بنابر قضیه‌ی فیثاغورس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AD^۲ = AZ^۲ + DZ^۲ \\ AZ = DZ \end{array}\right\} \Rightarrow AD^۲ = ۲DZ^۲$$

$$\Rightarrow DZ = \frac{\sqrt{۲}}{۲} AD \quad (۱)$$

به همین ترتیب، مثلث $\overset{\Delta}{DWC}$ نیز قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین است. لذا داریم:

$$\left.\begin{array}{l} DC^۲ = DW^۲ + WC^۲ \\ DW = WC \end{array}\right\} \Rightarrow DC^۲ = ۲DW^۲$$

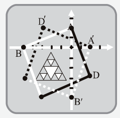
$$\Rightarrow DW = \frac{\sqrt{۲}}{۲} DC \ (۲)$$

از طرفی، ضلع مربع WXYZ، یعنی ZW برابر است با:

$$ZW = DW - DZ$$

در نتیجه، با توجه به روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$ZW = \frac{\sqrt{۲}}{۲} DC - \frac{\sqrt{۲}}{۲} AD \Rightarrow ZW = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(DC - AD)$$



فصل سوم
تبدیل‌ها

پاسخ‌نامه تشریحی

۱. طبق فرض تصویر نقطه‌ی $A(\alpha,\beta)$، تحت تبدیل $T(x,y)=(-x,y-۱)$، نقطه‌ی $A'(-۳,۲)$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$T(\alpha,\beta)=(-۳,۲)$$

در نتیجه، با توجه به نگاشت T، خواهیم داشت:

$$T(\alpha,\beta)=(-\alpha,\beta-۱)=(-۳,۲)$$

یادآوری۱: اگر دو زوج مرتب $(x_۱,y_۱)$ و $(x_۲,y_۲)$ با هم برابر باشند، آن‌گاه مؤلفه‌های اول با هم برابرند و مؤلفه‌های دوم با هم. یعنی:
$x_۱=x_۲\ ,\ y_۱=y_۲$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases}-\alpha=-۳\Rightarrow\alpha=۳\\ \beta-۱=۲\Rightarrow\beta=۳\end{cases}$$

در نتیجه مختصات نقطه‌ی A، برابر با $(۳,۳)$ می‌باشد. به همین ترتیب برای نقطه‌ی $B(\alpha,\beta)$ نیز داریم:

$$T(\alpha,\beta)=(-\alpha,\beta-۱)=(۱,۵)$$

در نتیجه:

$$\begin{cases}-\alpha=۱\Rightarrow\alpha=-۱\\ \beta-۱=۵\Rightarrow\beta=۶\end{cases}$$

بنابراین، مختصات نقطه‌ی B برابر با $(-۱,۶)$ می‌باشد.

آموزه ۱

تبدیلی که فاصله‌ی بین نقاط را حفظ کند، ایزومتری نامیده می‌شود. به عبارت دیگر، طول پاره‌خط AB، قبل و بعد از تبدیل شدن باید با هم برابر باشند.

یادآوری۲: طول پاره‌خط واصل بین دو نقطه‌ی $A(x,y)$ و $B(x',y')$ از رابطه‌ی $AB=\sqrt{(x-x')^۲+(y-y')^۲}$ به دست می‌آید.

برای اینکه تعیین کنیم این تبدیل ایزومتری است یا خیر، باید طول دو پاره‌خط AB و A'B' را مقایسه کنیم:

$$AB=\sqrt{(-۱-۳)^۲+(۶-۳)^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$$

$$A'B'=\sqrt{(۱+۳)^۲+(۵-۲)^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$$

بنابراین، طول پاره‌خط AB و تصویرش، یعنی A'B' با هم برابر است. یعنی، طبق آموزه‌ی ۱، این تبدیل ایزومتری است.

۲. طبق فرض $T(x,y)=(x+y,x-y)$، همچنین $A'=(۲,۴)$، تصویر نقطه‌ی $A=(\alpha,\beta)$ می‌باشد. لذا با توجه به ضابطه‌ی T داریم:

$$T(\alpha,\beta)=(\alpha+\beta,\alpha-\beta)=(۲,۴)$$

در نتیجه، بنابر یادآوری ۱، برای یافتن α و β کافیست دستگاه زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=۲\\ \alpha-\beta=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}\alpha=۳\\ \beta=-۱\end{matrix}$$

پس مختصات نقطه‌ی A، برابر با $(۳,-۱)$ می‌باشد.

۳.

آموزه ۲

برای یافتن تصویر یک چندضلعی، تحت یک تبدیل، کافی است تصویر رئوس آن چندضلعی را تحت تبدیل مورد نظر پیدا کنیم.

پس طبق آموزه‌ی فوق، مختصات تصویر ذوزنقه‌ی MNPQ تحت تبدیل $T(x,y)=(x+۲,-y)$ به صورت زیر خواهد بود:

الف) $M=(۳,۳)\Rightarrow M'=T(۳,۳)=(۳+۲,-۳)=(۵,-۳)$

$N=(۱,-۱)\Rightarrow N'=T(۱,-۱)=(۳,۱)$

$P=(-۲,۲)\Rightarrow P'=T(-۲,۲)=(۰,-۲)$

$Q=(-۳,۱)\Rightarrow Q'=T(-۳,۱)=(-۱,-۱)$

ب) طول MN و تصویرش را، با توجه به یادآوری ۲، به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{matrix}MN=\sqrt{(۳-۱)^۲+(۳+۱)^۲}=\sqrt{۲۰}\\ M'N'=\sqrt{(۵-۳)^۲+(-۳-۱)^۲}=\sqrt{۲۰}\end{matrix}\right\}\Rightarrow MN=M'N'$$

پس بنابر آموزه‌ی ۱، این تبدیل ایزومتری است.

حال شیب دو خط را با هم مقایسه می‌کنیم:

یادآوری۳ : شیب خط واصل بین دو نقطه‌ی $A(x,y)$ و $B(x',y')$، از رابطه‌ی $m_{AB}=\dfrac{y-y'}{x-x'}$ به دست می‌آید.
هم‌چنین اگر شیب دو خط برابر باشد، آن‌گاه آن دو خط موازی‌اند.

بنابراین خواهیم داشت:

$$\left.\begin{matrix}m_{MN}=\dfrac{۳+۱}{۳-۱}=۲\\ m_{M'N'}=\dfrac{-۳-۱}{۵-۳}=-۲\end{matrix}\right\}\Rightarrow m_{MN}\neq m_{M'N'}$$

پس، این تبدیل شیب خط را حفظ نمی‌کند.

۴. **الف)** نادرست است.
(تبدیل نگاشتی یک به یک از صفحه به روی خودش است.)
ب) صحیح است.

۵. تبدیل یافته‌ی نقطه‌ی $A(\alpha,\beta)$، تحت تبدیل $T(x,y)=(x-۲y,x+y)$، نقطه‌ی $A'(-۳,۳)$ است. بنابراین، بنابر ضابطه‌ی نگاشت T، داریم: $T(\alpha,\beta)=(\alpha-۲\beta,\alpha+\beta)=(-۳,۳)$

در نتیجه، با توجه به یادآوری ۱، برای یافتن α و β، دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}\alpha-۲\beta=-۳\\ \alpha+\beta=۳\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}\beta=۲\\ \alpha=۱\end{matrix}$$

بنابراین: $A=(۱,۲)$

۶. **الف)** بنابر نگاشت $T(x,y)=(۲x+۱,۲y)$ داریم:

$A=(۱,۲)\Rightarrow A'=T(۱,۲)=(۳,۴)$

$B=(۰,۰)\Rightarrow B'=T(۰,۰)=(۱,۰)$

ب) طبق قسمت (الف) و با توجه به یادآوری ۲ و ۳، طول و شیب پاره‌خط‌های AB و A'B' را می‌یابیم:

$$AB=\sqrt{(۱-۰)^۲+(۲-۰)^۲}=\sqrt{۵}$$
$$A'B'=\sqrt{(۳-۱)^۲+(۴-۰)^۲}=۲\sqrt{۵}$$
$$m_{AB}=\frac{۲-۰}{۱-۰}=۲$$
$$m_{A'B'}=\frac{۴-۰}{۳-۱}=۲$$

ج) تبدیل T، ایزومتری نیست، زیرا طول پاره‌خط AB با طول تصویرش یعنی A'B' برابر نیست.
تبدیل T، شیب AB را حفظ کرده است. زیرا: $m_{AB}=m_{A'B'}=۲$

۷. مختصات تصویر نقطه‌ی (α,β) تحت تبدیل $T(x,y)=(-x+۳,۲y)$ برابر است با: $(-۴,۱)$. در نتیجه با توجه به نگاشت T، داریم:

$$T(\alpha,\beta)=(-\alpha+۳,۲\beta)=(-۴,۱)$$

بنابر یادآوری ۱، α و β را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}-\alpha+۳=-۴\Rightarrow\alpha=۷\\ ۲\beta=۱\Rightarrow\beta=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

بنابراین مختصات نقطه‌ی مورد نظر $(۷,\frac{۱}{۲})$ می‌باشد.

۸. الف) تبدیل
ب) ایزومتری

۹. ضابطه‌ی تبدیل تصویر قائم نیم‌دایره به صورت: $T(x,y)=(x,۰)$ می‌باشد، بنابراین:
الف) بنابر ضابطه‌ی تبدیل T، داریم:

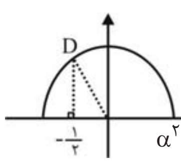
$$T(۰,۱)=(۰,۰)$$
$$T(-۱,۰)=(-۱,۰)$$

ب) تصویر نقطه‌ی (α,β) تحت تبدیل T، برابر با $(-\frac{۱}{۲},۰)$ است.

لذا با توجه به تبدیل T داریم: $T(\alpha,\beta)=(\alpha,۰)=(-\frac{۱}{۲},۰)$

در نتیجه بنابر یادآوری ۱ خواهیم داشت: $\alpha=-\frac{۱}{۲}$

برای یافتن β، باید نقطه‌ای را روی دایره بیابیم که مؤلفه‌ی اولش $-\frac{۱}{۲}$ باشد. بنابراین از نقطه‌ی $x=-\frac{۱}{۲}$ خطی عمود بر محور ox رسم می‌کنیم، تا نیم‌دایره را در D قطع کند. سپس از D به مبدأ مختصات وصل می‌کنیم.
در مثلث ایجاد شده، بنابر قضیه‌ی فیثاغورس داریم:



$$\alpha^۲+\beta^۲=۱\xrightarrow{\alpha=-\frac{۱}{۲}}(-\frac{۱}{۲})^۲+\beta^۲=۱\Rightarrow\beta^۲=\frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\beta=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\\ \beta=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

بنابراین، $(-\frac{۱}{۲},۰)$ تصویر نقطه‌ی $(-\frac{۱}{۲},\frac{\sqrt{۳}}{۲})$ از نیم‌دایره است.

۱۰. الف) تبدیل: تبدیل نگاشتی یک به یک از صفحه به روی خودش است. یعنی در تبدیل، هیچ دو نقطه‌ای دارای یک تصویر نیستند و هر نقطه در صفحه، تصویر یک نقطه از صفحه است.
ب) ایزومتری: تبدیلی که فاصله‌ی بین نقطه‌ها را حفظ کند، ایزومتری نامیده می‌شود.
ج) نگاشت: یک نگاشت از D به R، یک عمل نظیرسازی است که به هر عضو مجموعه‌ی D، یک و تنها یک عضو از مجموعه‌ی R را نظیر می‌کند.

۱۱. الف) تحت تبدیل $R(x,y)=(-y,-x)$، تصویر نقاط A و B بصورت زیر خواهد بود:

$$A=(۲,۳)\Rightarrow A'=R(۲,۳)=(-۳,-۲)$$
$$B=(-۱,۴)\Rightarrow B'=R(-۱,۴)=(-۴,۱)$$

ب) با توجه به یادآوری‌های ۲ و ۳، طول و شیب AB و A'B' را به دست آورده و مقایسه می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}AB=\sqrt{(۲+۱)^۲+(۳-۴)^۲}=\sqrt{۱۰}\\ A'B'=\sqrt{(-۳+۴)^۲+(-۲-۱)^۲}=\sqrt{۱۰}\end{array}\right\}\Rightarrow AB=A'B'$$

$$\left.\begin{array}{l}m_{AB}=\frac{۳-۴}{۲+۱}=-\frac{۱}{۳}\\ m_{A'B'}=\frac{-۲-۱}{-۳+۴}=-۳\end{array}\right\}\Rightarrow m_{AB}\neq m_{A'B'}$$

۱۲.

آموزه ۳

ضابطه‌ی انتقالی که نقطه‌ی $A(a_۱,a_۲)$ را بر روی نقطه‌ی $B(b_۱,b_۲)$ تصویر می‌کند، به صورت زیر به دست می‌آید:

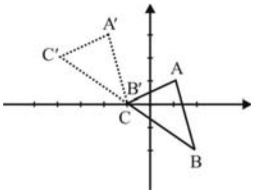
$$\overrightarrow{AB}=(b_۱-a_۱,b_۲-a_۲)$$
$$T(x,y)=(x+(b_۱-a_۱),y+(b_۲-a_۲))$$

الف) بنابراین، طبق آموزه‌ی فوق، برای انتقالی که رأس $B=(۲,-۲)$ را بر رأس $C=(-۱,۰)$ تصویر می‌کند، داریم:

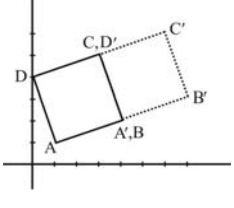
$$\overrightarrow{BC}=(-۱-۲,۰-(-۲))=(-۳,۲)$$
$$\Rightarrow T(x,y)=(x-۳,y+۲)$$

ب) با توجه به تبدیل T، داریم:

$$A=(۱,۱)\Rightarrow A'=T(۱,۱)=(-۲,۳)$$
$$B=(۲,-۲)\Rightarrow B'=T(۲,-۲)=(-۱,۰)$$
$$C=(-۱,۰)\Rightarrow C'=T(-۱,۰)=(-۴,۲)$$



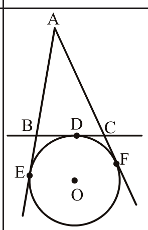
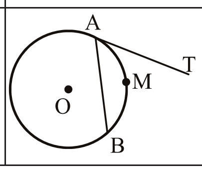
۱۳. برای رسم تصویر مربع، بنابر آموزه‌ی ۲، ابتدا باید مختصات تصویر رئوس آن را تحت انتقال $T(x,y)=(x+۳,y+۱)$ بیابیم:



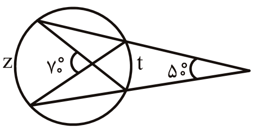
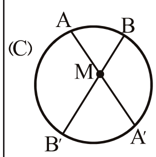
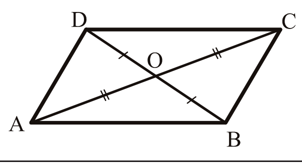
$$A=(۱,۱)\Rightarrow A'=T(۱,۱)=(۴,۲)$$
$$B=(۴,۲)\Rightarrow B'=T(۴,۲)=(۷,۳)$$
$$C=(۳,۵)\Rightarrow C'=T(۳,۵)=(۶,۶)$$
$$D=(۰,۴)\Rightarrow D'=T(۰,۴)=(۳,۵)$$

آزمون‌های نهایی اخیر

<table>
<tr><td colspan="4">بسمه تعالی</td></tr>
<tr><td>سوالات امتحان نهایی درس: هندسه (۲)</td><td>کلیه رشته‌های نظری</td><td>ساعت شروع: ۸ صبح</td><td>مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه</td></tr>
<tr><td colspan="2">سال سوم آموزش متوسطه</td><td colspan="2">تاریخ امتحان: ۱۳۹۰/۳/۳</td></tr>
<tr><td colspan="4">دانش‌آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خردادماه سال ۱۳۹۰</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>ردیف</th><th>سوالات</th><th>نمره</th></tr>
<tr><td>۱</td><td>الف) یک مثلث متساوی‌الاضلاع به دقت رسم نمایید. وسط ضلع‌ها را پیدا کرده و به هم وصل کنید.
ب) سه مثلثی را که در گوشه ایجاد می‌شود، نگه دارید و مثلث میانی را با سیاه کردن حذف کنید.
این فرایند را روی سه مثلث باقی‌مانده تکرار کنید و با استفاده از استدلال استقرایی جدول زیر را کامل کنید.
(در مرحله دوم شکل را رسم کنید.)
<table>
<tr><td>مرحله</td><td>۰</td><td>۱</td><td>۲</td><td>...</td><td>n</td></tr>
<tr><td>تعداد مثلث‌ها</td><td>۱</td><td>؟</td><td>؟</td><td>...</td><td>؟</td></tr>
</table></td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۲</td><td>درستی یا نادرستی نتایج زیر را معلوم کنید.
الف) هر مربعی متوازی‌الاضلاع است. چهار ضلعی ABCD مربع است.
نتیجه: چهار ضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است.
ب) تجانس طول پاره‌خط را با ضریب k (ضریب تجانس) تغییر می‌دهد.
نتیجه: طول تصویر پاره‌خط AB در یک تجانس بزرگ‌تر می‌شود.
ج) چند صفحه در فضا روی دو خط، پاره‌خط‌های متناظر متناسب ایجاد کرده‌اند.
نتیجه: آن صفحه‌ها باهم موازیند.
د) P و Q دو صفحهٔ عمود برهم می‌باشند.
نتیجه: هر کدام شامل خطی است که بر دیگری عمود است.</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۳</td><td>با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن مقداری ثابت است. سپس آن مقدار ثابت را به دست آورید.</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۴</td><td>قضیه: با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر از ضلع روبه‌روی زاویه کوچک‌تر است.</td><td>۱/۲۵</td></tr>
<tr><td>۵</td><td>ثابت کنید نیمساز یک زاویه، مکان هندسی نقطه‌ای در صفحهٔ آن زاویه است که فاصلهٔ آن از دو ضلع زاویه برابر باشد.</td><td>۱/۵</td></tr>
<tr><td>۶</td><td>خط‌های AE، AF و BC به ترتیب در نقطه‌های E، F و D بر دایره (O) مماس هستند. مماس BC، خطهای AE و AF را به ترتیب در نقطه‌های B و C قطع کرده است. ثابت کنید با تغییر مکان نقطه‌ی D روی دایره بین دو نقطه‌ی ثابت E و F، محیط مثلث ABC ثابت می‌ماند.

</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۷</td><td>قضیه: با توجه به شکل ثابت کنید در دایره (O) اندازه هر زاویه‌ی ظلی برابر با نصف کمان روبه‌روی آن است.

</td><td>۱/۲۵</td></tr>
<tr><td colspan="3">«ادامه سؤالات در صفحه‌ی دوم»</td></tr>
</table>

بسمه تعالی			
سوالات امتحان نهایی درس: هندسه (۲)	کلیه رشته‌های نظری	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۹۰/۳/۳	
دانش‌آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور **در خردادماه سال ۱۳۹۰**			

ردیف	سوالات	نمره
۸	در شکل زیر مقدار z و t را بیابید. 	۱
۹	قضیه: از نقطه‌ی M واقع در داخل دایره (C) دو وتر دلخواه AA' و BB' رسم شده‌اند. ثابت کنید: $MA \times MA' = MB \times MB'$ 	۱/۲۵
۱۰	طول خط المرکزین در دو دایره متقاطع به شعاع‌های ۴ و ۳ سانتی‌متر برابر ۶ سانتی‌متر است. طول مماس مشترک خارجی دو دایره را به دست آورید.	۰/۵
۱۱	نقاط $P=(۴,۲)$ و $Q=(۲,۲)$ و $R=(۲,-۲)$ راس‌های یک مثلث هستند. الف) مثلث PQR و تصویر مجانس آن را با در نظر گرفتن $O(۰,۰)$ به عنوان مرکز تجانس، تحت تبدیل تجانس $D(x,y)=(۳x,۳y)$ را رسم کنید. ب) مساحت مثلث PQR و تصویرش را محاسبه و آن‌ها را باهم مقایسه کنید.	۱/۷۵
۱۲	معادله تصویر خط $l: ۲x+۶y-۱۲=۰$ را تحت بازتاب نسبت به محور xها به دست آورید.	۱/۲۵
۱۳	قطرهای چهار ضلعی ABCD یکدیگر را نصف کرده‌اند. با استفاده از ویژگی‌های تبدیل دوران ثابت کنید. ABCD یک متوازی‌الاضلاع است. 	۱/۵
۱۴	جاهای خالی را به طور مناسب پرکنید. الف) در تبدیل انتقال $T(x,y)=(x-۳\ ,\ y+۲)$ بردار انتقال برابر با .... است. ب) در هر صفحه حداقل .... نقطه وجود دارد که بر یک خط قرار ندارند. ج) اگر دو صفحه متمایز یک نقطه مشترک داشته باشند، آنگاه در یک .... مشترک خواهند بود.	۰/۷۵
۱۵	قضیه: ثابت کنید اگر خط L با یکی از خط‌های صفحه P موازی باشد، آنگاه، خط L با صفحه P موازی است.	۱/۲۵
۱۶	اگر O نقطه‌ای خارج از صفحه‌ای مانند P باشد، ثابت کنید کلیه خط‌های گذرنده از O که با P موازی هستند در یک صفحه موازی P قرار دارند.	۱/۲۵
۱۷	ثابت کنید اگر L و L' دو خط متنافر باشند، از هر نقطه A یک و تنها یک خط می‌گذرد که بر L و L' عمود است.	۱/۵
	«موفق باشید» جمع نمره	۲۰

مجموعه کتاب‌های مرجع نهایی

ویژگی‌های کتاب

- ☑ کامل‌ترین مرجع سؤالات امتحان نهایی
- ☑ همه‌ی سؤالات امتحان نهایی از سال ۸۴ تا سال ۹۲
- ☑ طبقه‌بندی سؤالات براساس عناوین کتاب درسی
- ☑ چیدمان سؤالات براساس ترتیب موضوع و سال
- ☑ پاسخ‌های تشریحی و مختصر و مفید
- ☑ نمونه امتحانات کامل سال‌های اخیر در انتهای کتاب

انتشارات مهروماه نو
۶۶۴۰۸۴۰۰-۳
www.mehromah.ir
sms: ۳۰۰۰۷۲۱۲۰
9786005799736