آزمون اول

آنالیز ترکیبی

سطح (۱)

۱- شخصی می‌خواهد از بین سه گروه از دوستانش که گروه اول شامل a_1 و a_2، گروه دوم شامل b_1، b_2 و b_3 و گروه سوم شامل c_1، c_2 و c_3 می‌باشد، سه نفر را انتخاب کند تا با هم در یک مهمانی شرکت کنند. اگر a_1 با b_2، b_3 با c_2 و a_2 با c_1 قهر باشند، این شخص به چند طریق می‌تواند از هر گروه یک نفر را برای شرکت در مهمانی انتخاب کند، به‌طوری که افرادی که قهر هستند، با هم انتخاب نشوند؟ (مشابه تمرین کتاب درسی ریاضیات ۲)

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

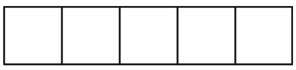
۲- در یک امتحان چهارگزینه‌ای با ۱۰ سؤال متفاوت، اگر همه‌ی دانش‌آموزان به همه‌ی سؤال‌ها پاسخ دهند، چند پاسخ‌نامه‌ی متفاوت می‌توانیم داشته باشیم؟ (تعداد دانش‌آموزان از تعداد حالات بیشتر است.) (آزاد ۷۹)

۱) 10^4 ۲) 10^{10} ۳) 4^{10} ۴) 4^{40}

۳- شخصی دارای ۲ کت، ۳ جفت کفش، ۴ شلوار و ۵ پیراهن ناهم‌رنگ است. با اضافه کردن فقط یک مورد متمایز به کدام یک از پوشش‌های خود، می‌تواند امکان بیشترین شکل متفاوت از آن‌ها را فراهم نماید؟ (آزاد انسانی خارج از کشور ۸۷)

۱) کفش ۲) کت ۳) شلوار ۴) پیراهن

۴- با سه رنگ آبی، قرمز و زرد به چند طریق می‌توان خانه‌های شکل زیر را رنگ کرد، به‌طوری‌که دو رنگ یکسان کنار هم نباشند؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)



۱) ۳۲ ۲) ۴۸ ۳) ۶۴ ۴) ۱۶۲

۵- با حروف کلمه‌ی "Watch" چند کلمه‌ی سه حرفی بدون تکرار حروف می‌توان ساخت به‌طوری که با حروف صدادار شروع نشود؟

۱) ۴۸ ۲) ۲۴ ۳) ۶۰ ۴) ۳۶

۶- چند عدد سه رقمی با ارقام ۲، ۳، ۴، ۰ و ۵ می‌توان بدون تکرار ارقام نوشت؟ (آزاد ۸۱)

۱) ۱۲۰ ۲) ۳۶ ۳) ۲۴ ۴) ۴۸

۷- با ارقام زوج، چند عدد بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ و کوچک‌تر از ۵۰۰۰ می‌توان ساخت؟ (مشابه سراسری ۹۰)

۱) ۶۰ ۲) ۱۲۵ ۳) ۲۵۰ ۴) ۱۲۰

۸- چند عدد سه رقمی متقارن وجود دارد، به‌طوری که مجموع ارقام آن عددی فرد باشد؟ (مشابه تمرین کتاب درسی ریاضیات ۲)

۱) ۵۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۵۵

۹- اگر $\frac{n!}{(n-3)!}=120$ باشد، n کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

۱۰- ۵ دونده در یک مسابقه شرکت می‌کنند. به شرط آن که هیچ دوتایی از آن‌ها با هم از خط پایان عبور نکنند، به چند طریق نفرات اول تا پنجم می‌توانند انتخاب شوند؟ (مشابه تمرین کتاب درسی ریاضیات ۲)

۱) 5^6 ۲) $4!$ ۳) 5^5 ۴) $5!$

۱۱- چند عدد شش رقمی با ارقام ۳، ۳، ۳، ۲، ۲ و ۲ می‌توان نوشت؟ (مشابه آزاد ۸۸)

۱) ۳۰ ۲) ۱۰ ۳) ۴۰ ۴) ۲۰

۱۲- به چند طریق می‌توان ۴ کتاب مذهبی و ۵ کتاب تاریخی متمایز را به صورت یک در میان در یک قفسه‌ی کتابخانه چید؟

۱) $5!\times 4!$ ۲) $5\times 4!$ ۳) $4\times 5!$ ۴) $2\times 5!\times 4!$

۱۳- حروف کلمه‌ی LAGRANGE را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیم. در چند حالت حروف یکسان کنار هم قرار می‌گیرند؟ (سراسری ۸۴)

۱) ۳۶۰ ۲) ۵۴۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۱۴۴۰

۱۴- به چند طریق می‌توان ۱۰ نامه را در ۲۵ پاکت مختلف قرار داد؟ (مشابه تمرین کتاب درسی ریاضیات ۲)

۱) $\frac{۲۵!}{۱۵!}$ ۲) $\frac{۲۵!}{۱۰!}$ ۳) $۱۰!$ ۴) $۲۵!$

۱۵- با ارقام ۰، ۰، ۰، ۲ و ۱ چند عدد چهاررقمی می‌توان نوشت؟ (آزاد ۸۵ و مشابه آزاد ۸۸)

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

۱۶- مقدار n از رابطه‌ی $۳P(n،۲) = \frac{۱}{۲}P(n،۳) - ۳۶$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۶

۱۷- اگر $\frac{P(n،۴)}{C(n-۱،۴)} = ۲۶$ باشد، مقدار n کدام است؟ $(n > ۵)$ (سراسری خارج از کشور ۸۴)

۱) ۵۲ ۲) ۵۳ ۳) ۵۴ ۴) ۵۵

۱۸- به چند طریق می‌توان از میان ۵ مرد و ۳ زن، یک گروه ۵ نفری انتخاب کرد، به طوری که این گروه شامل حداقل ۲ زن باشد؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰ (مشابه سراسری خارج از کشور ۹۰)

۱۹- بر روی یک دایره ۸ نقطه‌ی متمایز وجود دارد. تعداد چهارضلعی‌های محدب که هر رأس چهارضلعی واقع بر نقاط مفروض باشد، کدام است؟

۱) ۵۶ ۲) ۶۸ ۳) ۷۰ ۴) ۶۴ (سراسری ۸۰)

۲۰- تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی از مجموعه‌ی $A = \{a،b،c،d،e،f\}$ شامل عضو a کدام است؟ (سراسری ۸۳)

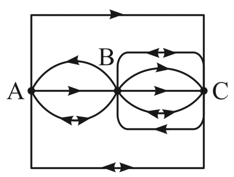
۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

سطح (۲)

۲۱- عبارت $(x-y+z)(a-b)(r+s+t)$ شامل چند جمله با ضریب مثبت است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی ریاضیات ۲)

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۵

۲۲- بین سه شهر A، B و C راه‌های یک طرفه و دوطرفه‌ی مقابل موجود است. به چند طریق می‌توان با حداکثر یک بار عبور از هر شهر، از شهر A شروع به حرکت کرد و دوباره به شهر A بازگشت؟



۱) ۷۳ ۲) ۵۴
۳) ۲۶ ۴) ۳۰

۲۳- چند تابع یک‌به‌یک از $A = \{۱،۲،۳،۴\}$ به $B = \{۱،۲،۳،۴\}$ وجود دارد که شامل عضو $(۱،۱)$ باشد؟ (مشابه تمرین کتاب درسی ریاضیات ۲)

۱) ۲۷ ۲) ۶ ۳) ۲۴ ۴) ۱۲

۲۴- با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد زوج شش رقمی می‌توان نوشت؟ (مشابه آزاد خارج از کشور ۹۰)

۱) ۳۱۲ ۲) ۳۶۰ ۳) ۲۸۸ ۴) ۱۸۰

۲۵- چند عدد چهار رقمی وجود دارد که رقم دهگان یا صدگان آن زوج باشد؟

۱) ۴۵۰۰ ۲) ۹۰۰۰ ۳) ۶۷۵۰ ۴) ۷۵۰۰

۲۶- چند عدد سه رقمی وجود دارد که مضرب ۵ نباشد؟ (مشابه آزاد خارج از کشور ۸۸)

۱) ۱۸۰ ۲) ۷۳۸ ۳) ۱۶۲ ۴) ۷۲۰

۲۷- با ارقام ۲، ۰، ۰، ۰ و ۳ چند عدد پنج رقمی می‌توان نوشت؟ (آزاد ۸۶)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۲۸- به چند طریق ۶ نفر می‌توانند دور یک میز بنشینند؟

۱) $۶!$ ۲) $\frac{۶!}{۲}$ ۳) $۵!$ ۴) $\frac{۵!}{۲}$

۲۹- به چند طریق ۵ پسر و ۵ دختر را می‌توان در یک صف نشاند به طوری که هیچ دو دختر و هیچ دو پسری کنار هم قرار نگیرند؟

۱) $۲ \times ۵!$ ۲) $۲ \times (۵!)^۲$ ۳) $۵!$ ۴) $(۵!)^۲$

۳۰- ارقام ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ و ۵ را به طریقی کنار هم قرار داده‌ایم که همواره رقم‌های فرد کنار هم باشند. تعداد پنج‌رقمی‌های حاصل کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸ (سراسری ۸۲)

۳۱- با ارقام ۱ ، ۲ ، ۲ ، ۳ ، ۳ و ۳ چند عدد چهاررقمی می‌توان نوشت؟ (آزاد ۸۲ و مشابه آزاد ۸۹)

۱) ۳۴ ۲) ۲۶ ۳) ۳۸ ۴) ۳۲

۳۲- با ارقام ۲ ، ۲ ، ۰ ، ۰ ، ۱ و ۱ چند عدد چهاررقمی می‌توان نوشت؟ (آزاد ۸۴)

۱) ۳۶ ۲) ۳۰ ۳) ۲۷ ۴) ۲۴

۳۳- ۲۰ عدد صندلی در دو ردیف ۱۰تایی چیده شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۷ دانش‌آموز رشته‌ی ریاضی، ۵ دانش‌آموز رشته‌ی تجربی و ۳ دانش‌آموز رشته‌ی انسانی را در این دو ردیف نشاند، به طوری که دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی در ردیف اول و دانش‌آموزان رشته‌ی تجربی در ردیف دوم بنشینند؟ (مشابه تمرین کتاب درسی ریاضیات ۲)

۱) $P(20,3)P(10,7)P(10,5)$ ۲) $\dfrac{(10!)^2 \times 8!}{6!5!}$

۳) $8 \times \left(\dfrac{10!}{5!}\right)^2$ ۴) $P(20,7)P(14,5)P(8,3)$

۳۴- حاصل $\binom{n+1}{k}+\binom{n}{n-k}+\binom{n}{k+1}$ برابر است با:

۱) $\binom{n+1}{k}$ ۲) $\binom{n+1}{k+1}$ ۳) $\binom{n+2}{k+1}$ ۴) $\binom{n}{k}$

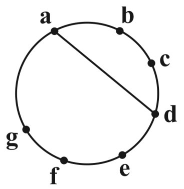
۳۵- از میان ۴ مهره‌ی قرمز و ۵ مهره‌ی آبی، ۴ مهره انتخاب می‌کنیم. در چند حالت حداکثر ۳ مهره‌ی آبی وجود دارد؟

۱) ۸۴ ۲) ۸۱ ۳) ۱۲۶ ۴) ۱۲۱

۳۶- از هر یک از ۴ شهر مختلف یک استان، ۵ نفر به اردوگاهی آمده‌اند. به چند طریق می‌توان از بین این ۲۰ نفر، ۳ نفر را انتخاب کرد به طوری که هیچ ۲ هم‌شهری بین افراد منتخب نباشند؟ (مشابه تمرین کتاب درسی ریاضیات ۲)

۱) ۵۰۰ ۲) ۲۵۰ ۳) ۲۵۰۰ ۴) ۴۸۰

۳۷- با ۷ نقطه‌ی متمایز روی محیط یک دایره، چند چهار ضلعی محدب می‌توان ساخت به طوری که وتر ad ضلع آن‌ها باشد؟ (مشابه تمرین کتاب درسی ریاضیات ۲)



۱) ۵ ۲) ۴

۳) ۳ ۴) ۶

۳۸- اگر $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ باشد، تعداد زیرمجموعه‌های زوج عضوی شامل عضو ۴، کدام است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی ریاضیات ۲)

۱) ۶۹ ۲) ۶۴ ۳) ۶۸ ۴) ۷۲

سطح (۳)

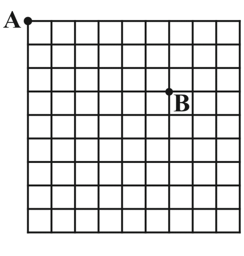
۳۹- یک جدول 3×3 را می‌خواهیم با رنگ‌های سبز، قرمز و آبی رنگ‌آمیزی کنیم، به‌طوری که درهیچ یک از ردیف‌های افقی یا عمودی رنگ تکراری موجود نباشد. این‌کار به چند طریق می‌تواند انجام گیرد؟ (مشابه تمرین کتاب درسی ریاضیات ۲)

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

۴۰- راه‌های مختلف مرتب کردن حرف‌های واژه‌ای ۵ حرفی برابر ۶۰ می‌باشد. در این کلمه چه تعداد حرف، ۲ بار وجود داشته است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱ (آزاد انسانی ۸۳)

۴۱- در یک مسابقه‌ی تلویزیونی شرکت کنندگان درنقطه‌ی A روی یک مستطیل 9×9 مطابق شکل می‌ایستند. در هر مرحله از مسابقه، اگر به سؤال خود پاسخ درست دهند به سمت راست و اگر پاسخ غلط دهند به سمت پایین حرکت می‌کنند. اگر شخصی در پایان مسابقه به نقطه‌ی B رسیده باشد، چند حالت برای پاسخ‌های وی وجود دارد؟



۱) ۳۲۴ ۲) ۶۴۸

۳) ۸۴ ۴) ۱۶۸

۴۲- به چند طریق می‌توان ۶ نفر را دور یک میز نشاند، به طوری که دو نفر به‌خصوص از آن‌ها همواره کنار هم باشند؟

۱) $\frac{۵!}{۲!}$ ۲) $۵!\times ۲!$ ۳) $۴!\times ۲!$ ۴) $\frac{۴!}{۲!}$

۴۳- از بین ۵ جفت دستکش با ۵ رنگ مختلف، ۴ لنگه را انتخاب می‌کنیم. تعداد حالت‌هایی که در بین این ۴ لنگه، یک جفت دستکش هم‌رنگ وجود داشته باشد، کدام است؟

۱) ۱۴۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۸۰

۴۴- به چند طریق می‌توان ۳ دانش‌آموز از ۵ دانش‌آموز رشته‌ی تجربی و ۳ دانش‌آموز از ۶ دانش‌آموز رشته‌ی ریاضی را کنار هم نشاند، به طوری که هیچ دو دانش‌آموز رشته‌ی تجربی کنار هم نباشند؟

۱) $\binom{۶}{۳}\times\binom{۵}{۳}\times ۳!\times ۳!$ ۲) $\binom{۶}{۳}\times\binom{۵}{۳}\times ۳!\times ۴!$ ۳) $\binom{۱۱}{۶}\times ۳!\times ۳!$ ۴) $\binom{۱۱}{۶}\times ۳!\times ۴!$

۴۵- در یک همایش، ۵ نفر جهت سخنرانی ثبت نام کرده‌اند. چند طریق ترتیب سخنرانی برای آنان وجود دارد، به طوری که بین سخنرانی دو فرد مورد نظر a و b از آنان فقط یک نفر سخنرانی کند؟ (سراسری ریاضی ۸۷)

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۰

۴۶- به چند طریق می‌توان ۱۰ نفر را به یک گروه ۴ نفره و دو گروه ۳ نفره تقسیم کرد؟

۱) ۱۴۰۰ ۲) ۲۱۰۰ ۳) ۴۲۰۰ ۴) ۶۰۰

۴۷- ارقام عدد ۱۳۳۶۷۷۷ را بر روی ۷ گوی می‌نویسیم. به چند طریق می‌توان ۴ گوی از این ۷ گوی انتخاب کرد؟

۱) ۱۴۰ ۲) ۴۲ ۳) ۱۱۲ ۴) ۳۵

۴۸- ۹ نقطه مطابق شکل مفروض است. تعداد مثلث‌های قابل رسم به‌طوری که رئوس مثلث‌ها روی این نقاط واقع باشند، کدام است؟

۱) ۸۴ ۲) ۷۹ ۳) ۸۰ ۴) ۷۵

۴۹- اگر به تعداد اعضای مجموعه‌ای ۳ عضو اضافه شود، به تعداد زیرمجموعه‌های آن ۴۴۸ عضو افزوده می‌شود. تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی مجموعه‌ی اولیه کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳۵ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

۵۰- اختلاف تعداد مستطیل‌ها و تعداد مربع‌های یک صفحه‌ی شطرنجی ۵×۵ چه‌قدر است؟

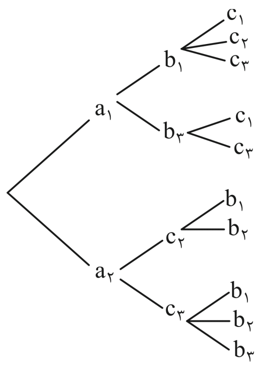
۱) ۱۷۰ ۲) ۱۳۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۱۲۰

آزمون اول

آنالیز ترکیبی

سطح (۱)

۱- (۲) نمودار درختی حالت‌های ممکن، برای انتخاب این سه نفر را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار درختی روبه‌رو، این شخص به ۱۰ حالت می‌تواند این گروه ۳ نفری را انتخاب کند.

۲- (۳)

> **نکته (۱) (اصل ضرب):** هرگاه عملی از ۲ جزء مختلف تشکیل شده باشد به‌طوری که جزء اول به m طریق و در ادامه‌ی آن جزء دوم به n طریق قابل انجام باشد، آن‌گاه این عمل به $m \times n$ طریق قابل انجام است.
>
> **نتیجه:** اگر عملی دارای n جزء مختلف باشد و اجزای آن به‌طور متوالی به m_i $(i = ۱, ..., n)$ طریق قابل انجام باشند، آن‌گاه این عمل به $m_۱ \times m_۲ \times ... \times m_n$ طریق قابل انجام است.
>
> **نکته (۲) (اصل جمع):** اگر عملی به $n_۱$ یا $n_۲$ یا ... یا n_k طریق قابل انجام باشد، به‌طوری که انجام آن‌ها با یک‌دیگر اشتراک نداشته باشد، آن‌گاه این عمل به $n_۱ + n_۲ + ... + n_k$ طریق قابل انجام است.

برای پاسخ‌گویی به هر سؤال ۴ حالت داریم، پس بنا به اصل ضرب تعداد حالت‌های ممکن برای پاسخ‌گویی به ۱۰ سؤال (یعنی تعداد پاسخ‌نامه‌های متفاوت) برابر است با:

$$\underbrace{۴ \times ۴ \times ... \times ۴}_{\text{۱۰ بار}} = ۴^{۱۰}$$

۳- (۲)

افزودن کت: $۳ \times ۳ \times ۴ \times ۵ = ۱۸۰$

افزودن کفش: $۲ \times ۴ \times ۴ \times ۵ = ۱۶۰$

افزودن شلوار: $۲ \times ۳ \times ۵ \times ۵ = ۱۵۰$

افزودن پیراهن: $۲ \times ۳ \times ۴ \times ۶ = ۱۴۴$

پس با افزودن یک کت، بیشترین شکل متفاوت فراهم می‌شود.

۴- (۲) برای خانه‌ی (۱) سه انتخاب داریم.

(۵)	(۴)	(۳)	(۲)	(۱)

برای خانه‌ی (۲)، دو انتخاب وجود دارد. (رنگی که در خانه‌ی (۱) به کار رفته است دیگر نمی‌تواند به کار رود.) به همین شکل برای خانه‌های (۳) و (۴) و (۵) نیز دو انتخاب وجود دارد. پس طبق اصل ضرب داریم:

تعداد کل حالات: $۳ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۴۸$

۵- (۱) حرف اول باید حروف غیر صدادار باشد، پس حرف a نمی‌تواند در شروع کلمه قرار بگیرد، لذا برای حرف اول ۴ حالت داریم، برای حرف دوم یک حرف از ۵ حرف را استفاده کرده‌ایم. پس برای حرف دوم نیز ۴ حالت داریم و در نهایت برای حرف سوم ۳ حالت داریم، بنابراین تعداد کلمات مطلوب برابر است با:

$$\underset{\text{حرف اول}}{۴} \times \underset{\text{حرف دوم}}{۴} \times \underset{\text{حرف سوم}}{۳} = ۴۸$$

۶- (۴) صفر در مرتبه‌ی صدگان نمی‌تواند قرار بگیرد و ارقام غیرتکراری هستند، پس داریم:

$$\underset{\text{صدگان}}{۴} \times \underset{\text{دهگان}}{۴} \times \underset{\text{یکان}}{۳} = ۴۸$$

۷- (۲) با ارقام ۰، ۲، ۴، ۶ و ۸ می‌خواهیم اعداد چهاررقمی بین ۳۰۰۰ و ۵۰۰۰ بسازیم. چون باید عدد بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ باشد، لذا در مکان هزارگان ارقام ۰ و ۲ نمی‌توانند قرار بگیرند و به‌علاوه چون عدد کوچک‌تر از ۵۰۰۰ است، ارقام ۶ و ۸ نیز نمی‌توانند در این مکان قرار بگیرند. درنتیجه مکان هزارگان فقط می‌تواند شامل رقم ۴ باشد و چون ارقام می‌توانند تکراری باشند داریم:

$$\underset{\text{هزارگان=۴}}{۱} \times \underset{\text{صدگان}}{۵} \times \underset{\text{دهگان}}{۵} \times \underset{\text{یکان}}{۵} = ۵^۳ = ۱۲۵$$

۸- (۲) عدد سه رقمی موردنظر متقارن است، لذا رقم یکان و صدگان آن با هم برابرند و چون صدگان نمی‌تواند صفر باشد، پس این دو رقم یکی از اعداد ۱ تا ۹ می‌باشند. از طرفی اگر رقم‌های یکان و صدگان برابر x و رقم دهگان برابر y باشد، چون مجموع ارقام باید عدد فرد باشد لذا $۲x + y$ فرد است و چون $۲x$ عددی زوج است، بنابراین باید y عددی فرد باشد. پس برای رقم دهگان ۵ حالت وجود دارد و بنا به اصل ضرب داریم:

تعداد اعداد مطلوب $= ۹ \times ۵ = ۴۵$

۹- (۱)

> **نکته (فاکتوریل):** $n! = n \times (n-۱) \times ... \times ۲ \times ۱$

$$\frac{n!}{(n-۳)!} = ۱۲۰ \Rightarrow \frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)!}{(n-۳)!} = ۱۲۰$$

$$\Rightarrow n(n-۱)(n-۲) = ۱۲۰$$

حال عدد ۱۲۰ را به‌صورت حاصل‌ضرب ۳ عدد طبیعی متوالی تجزیه می‌کنیم:

$$\Rightarrow n(n-۱)(n-۲) = ۶ \times ۵ \times ۴ \Rightarrow n = ۶$$

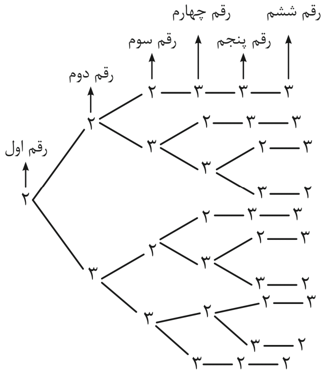
۱۰- (۴)

> **نکته:** اگر ترتیب قرار گرفتن n شیء متمایز برای ما مهم باشد، به هر یک از حالت‌هایی که این n شیء می‌توانند در یک ردیف کنار هم قرار بگیرند، یک جایگشت از این n شیء می‌گوییم. طبق اصل ضرب تعداد کل جایگشت‌های n شی متمایز در یک ردیف برابر است با:
>
> $$\underset{\text{مکان اول}}{n} \times \underset{\text{مکان دوم}}{n-۱} \times \cdots \times \underset{\text{مکان } n \text{ام}}{۱} = n!$$

ترتیب قرار گرفتن این ۵ دونده پشت سر هم، نفرات اول تا پنجم را تعیین می‌کند. پس تعداد حالت‌های ممکن همان تعداد جایگشت‌های این ۵ نفر است که برابر با $۵!$ است.

۱۱- (۴)

راه اول: از نمودار درختی کمک می‌گیریم:



بنابراین با شمارش تعداد شاخه‌های انتهایی مشخص می‌شود که ۱۰ عدد ۶ رقمی می‌توان ساخت به‌طوری که با ۲ شروع شود و به‌طور مشابه ۱۰ عدد ۶ رقمی می‌توان ساخت که با ۳ شروع شود. در نتیجه در کل ۲۰ عدد ۶ رقمی می‌توان ساخت.

راه دوم:

نکته: اگر بخواهیم n شیء را کنار هم قرار دهیم به‌طوری که n_1 شیء از نوع اول، n_2 شیء از نوع دوم و ... و n_k شیء از نوع kام مشابه هم باشند، تعداد جایگشت‌های متمایز این n شیء برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times\dots\times n_k!}$$

تعداد اعداد ۶ رقمی مطلوب برابر با جایگشت‌های ۶ رقم است که در آن سه رقم ۳ و سه رقم ۲ وجود دارند، بنابراین:

$$\text{تعداد اعداد مطلوب}=\frac{۶!}{\underbrace{۳!}_{\text{جایگشت‌های سه رقم ۳}}\times\underbrace{۳!}_{\text{جایگشت‌های سه رقم ۲}}}=\frac{۶\times۵\times۴}{۶}=۲۰$$

۱۲- (۱)

نکته: اگر بخواهیم اعضای ۲ گروه را به‌صورت یک در میان کنار هم قرار دهیم، آن‌گاه دو حالت داریم:
۱) اگر تعداد اعضای دو گروه با هم برابر باشند، یک بار ترتیب چیدمان را از اعضای گروه اول و بار دیگر از اعضای گروه دوم آغاز می‌کنیم.
۲) اگر تعداد اعضای یک گروه از تعداد اعضای گروه دیگر یک واحد بیشتر باشد، همواره چیدمان را از گروهی که تعداد اعضای بیشتری دارد آغاز می‌کنیم.

برای آن که کتاب‌ها به صورت یک در میان چیده شوند، داریم:

$$\underset{ت}{\underline{۵}}\ \underset{م}{\underline{۴}}\ \underset{ت}{\underline{۴}}\ \underset{م}{\underline{۳}}\ \underset{ت}{\underline{۳}}\ \underset{م}{\underline{۲}}\ \underset{ت}{\underline{۲}}\ \underset{م}{\underline{۱}}\ \underset{ت}{\underline{۱}}=\overset{\text{جایگشت کتاب‌های تاریخی}}{۵!}\times\underset{\text{جایگشت کتاب‌های مذهبی}}{۴!}$$

توجه دارید که چون تعداد کتاب‌های تاریخی بیشتر از مذهبی است، ابتدا و انتهای چیدمان کتاب تاریخی قرار می‌گیرد.

۱۳- (۳)

نکته: اگر بخواهیم n شیء را کنار هم قرار دهیم به‌طوری که چند شیء مشخص همواره کنار هم باشند، آن چند شیء را در یک دسته قرار داده و یک شیء در نظر می‌گیریم و سپس جایگشت این شیء را با اشیای دیگر می‌یابیم.

تذکر: اگر در کنار هم قرار دادن اشیا مشخص ترتیب خاصی ذکر **نشود**، جایگشت خود این اشیا (موجود در دسته) را نیز در جواب به‌دست آمده ضرب می‌کنیم.

حروف یکسان را کنار هم در یک دسته قرار می‌دهیم و آن را یک شیء در نظر می‌گیریم، پس داریم:

L AA GG RNE

حال تعداد جایگشت‌های ۶ شیء بالا حالت‌های مطلوب ما است. بنابراین تعداد حالات مطلوب برابر است با:

$$۶!=۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۷۲۰$$

۱۴- (۱) **راه اول:**

نکته: تعداد حالات انتخاب k شیء از n شیء متمایز که ترتیب آن‌ها برای ما مهم است، برابر با تعداد جایگشت‌های k تایی از n شیء متمایز است و آن را ترتیب (تبدیل) k از n می‌گوییم و با $P(n,k)$ نشان می‌دهیم.

$$(n)_k=P(n,k)=\underset{\text{مکان اول}}{\underline{n}}\times\underset{\text{مکان دوم}}{\underline{n-1}}\times\underset{\text{مکان سوم}}{\underline{n-2}}\times\dots\times\underset{\text{مکان k ام}}{\underline{n-k+1}}=\frac{n!}{(n-k)!}\ ;\ k\le n$$

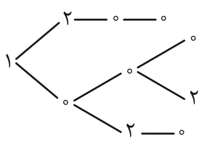
باید ۱۰ پاکت را انتخاب کنیم، اما اگر نامه‌ها را در جایگاه‌های ۱ تا ۱۰ در نظر بگیریم، ترتیب پاکت‌ها برای نامه‌ها، حالت‌های مختلف ایجاد می‌کند، پس تعداد حالات مطلوب برابر است با:

$$P(۲۵,۱۰)=\frac{۲۵!}{(۲۵-۱۰)!}=\frac{۲۵!}{۱۵!}$$

راه دوم: این مسئله را به کمک اصل ضرب حل می‌کنیم. برای نامه‌ی اول هر کدام از آن ۲۵ پاکت را می‌توان انتخاب کرد، ولی برای نامه‌ی دوم ۲۴ پاکت و به همین ترتیب برای نامه‌ی دهم ۱۶ پاکت برای انتخاب داریم، پس تعداد حالات مطلوب برابر است با:

$$۲۵\times۲۴\times۲۳\times\dots\times۱۶=\frac{۲۵!}{۱۵!}$$

۱۵- (۲) **راه اول:** از نمودار درختی کمک می‌گیریم:



بنابراین ۴ عدد چهار رقمی داریم که با ۱ شروع می‌شوند و به‌طور مشابه ۴ عدد چهار رقمی هم داریم که با ۲ شروع می‌شوند. لذا در کل ۸ عدد ۴ رقمی داریم.

راه دوم:

برای رقم اول ۱ یا ۲ قرار می‌گیرد و تعداد جایگشت‌های ۳ تایی از ۴ رقم باقی‌مانده نیز حالت‌های مختلفی ایجاد می‌کند. اما توجه دارید که از ۴ رقم باقی‌مانده ۳ تا صفر مشابه هم‌اند. پس داریم:

$$\text{تعداد حالات مطلوب}=۲\times\frac{\frac{۴!}{(۴-۳)!}}{۳!}=۲\times\frac{۴!}{۳!۱!}=۲\times۴=۸$$

راه سوم:

نکته: اگر بخواهیم از میان n شیء غیر متمایز، k شیء را جایگشت دهیم، ابتدا دسته‌های kتایی از این n شیء می‌سازیم، سپس در هر دسته تعداد جایگشت‌های تکراری یا غیرتکراری را محاسبه کرده و در نهایت طبق اصل جمع تعداد همه‌ی حالت‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

با ارقام ۰، ۰، ۰ و ۱ یا ۰، ۰، ۰ و ۲ تنها یک عدد می‌توان ساخت، از طرفی با ارقام ۰، ۰، ۲ و ۱، شش عدد چهاررقمی می‌توان ساخت، زیرا:

$$\frac{\overbrace{۲\times۳\times۲\times۱}^{\text{جایگشت ارقام ۰،۰،۲،۱}}}{\underbrace{۲!}_{\text{جایگشت ارقام تکراری صفر}}}=۶$$

لذا در مجموع ۸ = ۶ + ۱ + ۱ عدد می‌توان ساخت.

۱۶- (۱)

$$3P(n,2)=\frac{1}{2}P(n,3)-36$$

$$3\frac{n!}{(n-2)!}=\frac{1}{2}\times\frac{n!}{(n-3)!}-36$$

$$\Rightarrow 3\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{2(n-3)!}-36$$

$$\Rightarrow 3n(n-1)=\frac{n(n-1)(n-2)}{2}-36$$

$$\Rightarrow 6n(n-1)-n(n-1)(n-2)=-72$$

$$\Rightarrow n(n-1)(6-n+2)=-72$$

$$\Rightarrow n(n-1)(n-8)=72=9\times8\times1\Rightarrow n=9$$

۱۷- (۱)

> **نکته (۱):** به انتخاب‌های k تایی از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اشیا برای ما مهم **نباشد**، ترکیب‌های k تایی از n شیء متمایز می‌گویند که تعداد آن‌ها برابر است با:
>
> $$C(n,k)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\qquad (k\le n)$$
>
> **نکته (۲):** ترکیب k شیء از n شیء متمایز دارای ویژگی‌های زیر است:
>
> ۱) $\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1$ ۲) $\binom{n}{1}=n$
>
> ۳) $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ ۴) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$
>
> ۵) $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$ **(قاعده‌ی پاسکال)**
>
> ۶) $C(n,k)=\frac{P(n,k)}{k!}$
>
> ۷) $\underbrace{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{n}}_{\text{تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی } n \text{ عضوی}}=2^n$
>
> **تذکر:** اگر در حل مسائل فقط انتخاب اشیا مد نظر باشد، از ترکیب و اگر انتخاب کردن و جای انتخاب (ترتیب) اشیا مد نظر باشد، از جایگشت کمک می‌گیریم.

$$\frac{P(n,4)}{C(n-1,4)}=26\Rightarrow\frac{\frac{n!}{(n-4)!}}{\frac{(n-1)!}{4!(n-5)!}}=26\Rightarrow\frac{\overset{n}{\cancel{n!}}(\cancel{n-5})!4!}{\cancel{(n-1)!}\,\underset{(n-4)}{\cancel{(n-4)!}}}=26$$

$$\Rightarrow\frac{n\times4!}{(n-4)}=26\Rightarrow\frac{n}{n-4}=\frac{26}{4\times3\times2}\Rightarrow\frac{n}{n-4}=\frac{13}{12}$$

$$\Rightarrow 13n-52=12n\Rightarrow n=52$$

۱۸- (۴) برای آن‌که حداقل ۲ زن انتخاب شوند، باید این گروه ۵ نفری شامل ۲ زن و ۳ مرد یا ۳ زن و ۲ مرد باشند. داریم:

$$\underset{\text{انتخاب ۲ زن}}{\binom{3}{2}}\times\underset{\text{انتخاب ۳ مرد}}{\binom{5}{3}}\overset{\text{یا}}{+}\underset{\text{انتخاب ۳ زن}}{\binom{3}{3}}\times\underset{\text{انتخاب ۲ مرد}}{\binom{5}{2}}=3\times10+1\times10=40$$

(و)

۱۹- (۳) برای داشتن یک ۴ ضلعی محدب، کافی است ۴ نقطه از ۸ نقطه‌ی متمایز را انتخاب کرده و به هم وصل کنیم. پس تعداد ۴ ضلعی‌های مطلوب برابر است با:

$$\binom{8}{4}=\frac{8!}{4!4!}=\frac{8\times7\times6\times5\times4!}{4\times3\times2\times4!}=\frac{7\times6\times5}{3}=70$$

۲۰- (۲)

> **نکته:** تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی برابر با $\binom{n}{r}$ می‌باشد.

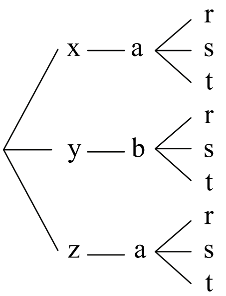
برای ساختن زیرمجموعه‌های سه عضوی باید ۳ عضو از ۶ عضو مجموعه‌ی A را انتخاب کنیم، اما چون این زیرمجموعه‌ها شامل عضو a می‌باشند، کافی است عضو a را به همراه ۲ عضو دیگر از ۵ عضو باقی‌مانده انتخاب کنیم.

پس تعداد زیرمجموعه‌های مطلوب برابر است با:

$$\binom{5}{2}=\frac{5\times4}{2}=10$$

سطح (۲)

۲۱- (۳) برای آن‌که جملات با ضرایب مثبت به‌وجود آیند، باید حروف با ضرایب منفی در هر پرانتز تنها با حروف با ضرایب منفی ضرب شوند، یعنی بین پرانتز اول و دوم، x فقط در a، y فقط در b و z فقط در a می‌تواند ضرب شود. بنابراین با توجه به نمودار درختی داریم:



لذا عبارت شامل ۹ جمله با ضریب مثبت می‌باشد.

۲۲- (۳)

> **نکته (۱) (اصل ضرب):** هرگاه عملی از ۲ جزء مختلف تشکیل شده باشد به‌طوری که جزء اول به m طریق و در ادامه‌ی آن جزء دوم به n طریق قابل انجام باشد، آن‌گاه این عمل به $m\times n$ طریق قابل انجام است.
>
> **نتیجه:** اگر عملی دارای n جزء مختلف باشد و اجزای آن به‌طور متوالی به m_i $(i=1,\dots,n)$ طریق قابل انجام باشند، آن‌گاه این عمل به $m_1\times m_2\times\dots\times m_n$ طریق قابل انجام است.
>
> **نکته (۲) (اصل جمع):** اگر عملی به n_1 یا n_2 یا ... یا n_k طریق قابل انجام باشد، به‌طوری که انجام آن‌ها با یک‌دیگر اشتراک نداشته باشد، آن‌گاه این عمل به $n_1+n_2+\dots+n_k$ طریق قابل انجام است.

مسیرهای ممکن برای سفر رفت و برگشت مورد نظر عبارت‌اند از:

$ACA: 2\times1=2$

$ABA: 2\times2=4$

$ACBA: 2\times3\times2=12$

$ABCA: 2\times4\times1=8$

پس تعداد کل مسیرها، بنا به اصل جمع برابر است با:

$$2+4+12+8=26$$

۲۳- (۲) تابع $f:A\to B$ یک‌به‌یک است و شامل عضو (۱،۱)، پس داریم $f(۱)=۱$. اما چون f یک‌به‌یک است، برای $f(۲)$، ۳ حالت، برای $f(۳)$، ۲ حالت و برای $f(۴)$ تنها یک حالت باقی می‌ماند. لذا تعداد توابع یک‌به‌یک مطلوب برابر است با:

$$\frac{۱}{f(۱)}\times\frac{۳}{f(۲)}\times\frac{۲}{f(۳)}\times\frac{۱}{f(۴)}=۶$$

۲۴- (۱)

> **نکته:** در حل مسائل با استفاده از اصل ضرب، شمارش را از جایی آغاز می‌کنیم که دارای شرط یا محدودیت باشد.

چون اعداد زوج شش رقمی مورد نظر است، لذا یکان رقمی زوج است و در نتیجه یکی از ارقام ۰، ۲ یا ۴ می‌باشد. بنابراین ۲ حالت در نظر می‌گیریم:

الف) رقم یکان صفر باشد:

$$\text{تعداد اعداد مطلوب}=\underset{\text{غیر صفر}}{\underline{۵}}\times\underline{۴}\times\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underline{۱}\times\underset{\text{رقم صفر}}{\underline{۱}}=۱۲۰$$

ب) رقم یکان ۲ یا ۴ باشد:

$$\text{تعداد اعداد مطلوب}=\underset{\text{غیرصفر و غیریکان}}{\underline{۴}}\times\underline{۴}\times\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underline{۱}\times\underset{\text{رقم ۲ یا ۴}}{\underline{۲}}=۱۹۲$$

لذا بنا به اصل جمع تعداد کل اعداد شش رقمی زوج برابر است با:

$$۱۲۰+۱۹۲=۳۱۲$$

۲۵- (۳) **راه اول:** به کمک اصل متممی، ابتدا تعداد کل اعداد چهار رقمی را تعیین می‌کنیم، سپس منهای تعداد اعداد چهار رقمی می‌کنیم که ارقام دهگان و صدگان آن‌ها هر دو فرد هستند:

$$\begin{cases}\text{تعداد کل چهار رقمی‌ها:}\ \underline{۹}\times\underline{۱۰}\times\underline{۱۰}\times\underline{۱۰}=۹۰۰۰\\ \text{تعداد چهار رقمی‌ها با دهگان و صدگان فرد:}\ \underline{۹}\times\underset{\text{فرد}}{\underline{۵}}\times\underset{\text{فرد}}{\underline{۵}}\times\underline{۱۰}=۲۲۵۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{جواب}=۹۰۰۰-۲۲۵۰=۶۷۵۰$$

راه دوم: دو حالت داریم:

الف) دهگان عددی زوج باشد، لذا صدگان می‌تواند هم زوج و هم فرد باشد:

$$\underset{\text{رقم غیرصفر}}{\underline{۹}}\times\underline{۱۰}\times\underset{\text{ارقام زوج}}{\underline{۵}}\times\underline{۱۰}=۹\times۵\times۱۰\times۱۰=۴۵۰۰$$

ب) دهگان عددی فرد باشد، لذا صدگان باید عدد زوج باشد:

$$\underset{\text{رقم غیرصفر}}{\underline{۹}}\times\underset{\text{ارقام زوج}}{\underline{۵}}\times\underset{\text{ارقام فرد}}{\underline{۵}}\times\underline{۱۰}=۹\times۵\times۵\times۱۰=۲۲۵۰$$

بنابراین تعداد کل اعداد مطلوب برابر است با: $۴۵۰۰+۲۲۵۰=۶۷۵۰$

۲۶- (۴) **راه اول:** برای آن که عددی مضرب ۵ باشد، باید رقم یکان آن صفر یا ۵ باشد. پس تعداد اعداد سه رقمی بخش‌پذیر بر ۵ برابر است با:

$$\underset{\text{رقم غیرصفر}}{\underline{۹}}\times\underline{۱۰}\times\underset{\text{رقم ۰ یا ۵}}{\underline{۲}}=۹\times۱۰\times۲=۱۸۰$$

حال از کل اعداد سه رقمی، اعداد مضرب ۵ را کم می‌کنیم.

$$\underbrace{۹۰۰}_{\text{تعداد اعداد ۳ رقمی}}-\underbrace{۱۸۰}_{\text{تعداد اعداد مضرب ۵}}=۷۲۰$$

راه دوم:

> **نکته:** تعداد اعداد طبیعی مضرب m که کوچک‌تر یا مساوی n باشند $(m،n\in\mathbb{N})$، برابر است با: $\left[\frac{n}{m}\right]$
> ([ ] علامت جزء صحیح است.)

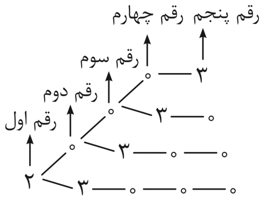
اعداد سه رقمی مضرب ۵ برابر است با:

$$\underbrace{\left[\frac{۹۹۹}{۵}\right]}_{\text{اعداد کوچک‌تر از ۱۰۰۰ و مضرب ۵}}-\underbrace{\left[\frac{۹۹}{۵}\right]}_{\text{اعداد کوچک‌تر از ۱۰۰ و مضرب ۵}}=۱۹۹-۱۹=۱۸۰$$

پس تعداد اعداد سه رقمی که مضرب ۵ نیست برابر است با:

$$\underbrace{۹۰۰}_{\text{کل اعداد ۳ رقمی}}-۱۸۰=۷۲۰$$

۲۷- (۳) **راه اول:** از نمودار درختی استفاده می‌کنیم:



۴ عدد ۵ رقمی وجود دارد که با ۲ شروع می‌شود. به‌طور مشابه ۴ عدد ۵ رقمی نیز وجود دارد که با ۳ شروع می‌شود، پس مجموعاً ۸ عدد ۵ رقمی وجود دارد.

راه دوم:

> **نکته (۱):** اگر ترتیب قرار گرفتن n شیء متمایز مهم باشد، به هر یک از حالت‌هایی که این n شیء می‌توانند در یک ردیف کنار هم قرار بگیرند، یک جایگشت از این n شیء می‌گوییم. بنا به اصل ضرب تعداد کل جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با:
>
> $$\underset{\text{مکان اول}}{\underline{n}}\times\underset{\text{مکان دوم}}{\underline{n-۱}}\times\dots\times\underset{\text{مکان n ام}}{\underline{۱}}=n!$$
>
> **نکته (۲):** تعداد جایگشت‌های n شیء در یک ردیف به‌طوری‌که، $m_۱$ شیء مثل هم، $m_۲$ شیء دیگر مثل هم و ... و m_k شیء نیز مثل هم باشند، برابر است با:
>
> $$\frac{n!}{m_۱!m_۲!\dots m_k!}$$
>
> **نتیجه:** به‌طور کلی تعداد حالت‌های مطلوب برای n شیء غیر متمایز برابر با نسبت تعداد حالت‌های مطلوب برای n شیء متمایز به جایگشت اشیاء غیر متمایز است.

ابتدا توجه کنید که اولین رقم ۲ یا ۳ می‌تواند باشد، پس برای اولین رقم ۲ حالت داریم و ترتیب قرار گرفتن ۴ رقم دیگر، حالت‌های مختلف ایجاد می‌کنند پس تعداد اعداد پنج رقمی مطلوب برابر است با:

$$\underbrace{۲}_{\text{حالت‌های رقم اول}}\times\frac{۴!}{\underbrace{۳!}_{\text{جایگشت بقیه ارقام}}}=۲\times۴=۸$$

توجه دارید که در ۴ رقم باقی‌مانده ۳ رقم مشابه‌اند (برابر صفرند.)، پس تعداد جایگشت‌ها را بر تعداد جایگشت‌های این سه رقم تقسیم می‌کنیم.

۲۸- (۳)

> **نکته:** تعداد حالت‌هایی که n شیء متمایز می‌توانند کنار هم دور یک میز (در یک صف بسته) قرار گیرند، برابر با $(n-۱)!$ است.

بنابر نکته‌ی بالا این ۶ نفر به $(۶-۱)!=۵!$ حالت می‌توانند کنار هم بنشینند.

۲۹- (۲)

> **نکته:** اگر بخواهیم اعضای دو گروه را به‌صورت یک در میان در کنار هم بنشانیم، آن‌گاه دو حالت داریم:
> **۱)** اگر تعداد اعضای دو گروه با هم برابر باشند یک بار ترتیب چیدمان را از اعضای گروه اول و بار دیگر از اعضای گروه دوم آغاز می‌کنیم.
> **۲)** اگر تعداد اعضای یک گروه یک واحد بیشتر از گروه دیگر باشد، چیدمان را از گروه بزرگ‌تر آغاز می‌کنیم.

برای آن که هیچ دو پسر و هیچ دو دختری کنار هم قرار نگیرند، کافی است دخترها و پسرها یک در میان باشند. به ۲ حالت می‌توان این کار را انجام داد:

$$\underset{پ}{۱}\ \underset{د}{۱}\ \underset{پ}{۲}\ \underset{د}{۲}\ \underset{پ}{۳}\ \underset{د}{۳}\ \underset{پ}{۴}\ \underset{د}{۴}\ \underset{پ}{۵}\ \underset{د}{۵} = ۵!\times ۵!$$

$$\underset{د}{۱}\ \underset{پ}{۱}\ \underset{د}{۲}\ \underset{پ}{۲}\ \underset{د}{۳}\ \underset{پ}{۳}\ \underset{د}{۴}\ \underset{پ}{۴}\ \underset{د}{۵}\ \underset{پ}{۵} = ۵!\times ۵!$$

$\xRightarrow{\text{اصل جمع}}$ تعداد حالت‌های مطلوب $= ۲\times(۵!)^۲$

۳۰- (۳)

> **نکته:** اگر بخواهیم n شیء را کنار هم قرار دهیم، به‌طوری که چند شیء مشخص همواره کنار هم باشند، آن‌گاه آن چند شیء را در یک دسته قرار داده و یک شیء در نظر می‌گیریم، سپس جایگشت این شیء را با اشیاء دیگر می‌یابیم.
> **تذکر:** اگر در کنار هم قرار دادن اشیاء مشخص، ترتیب خاصی ذکر **نشود**، جایگشت خود این اشیاء را نیز در جواب به‌دست آمده ضرب می‌کنیم.

ابتدا رقم‌های فرد را در یک دسته قرار می‌دهیم و آن را یک رقم جدید به شمار می‌آوریم، تعداد پنج رقمی‌های مطلوب برابر جایگشت این ۳ شیء جدید است. اما توجه داریم که سه رقم فرد موجود در یک دسته، خود با هم می‌توانند جایگشت داشته باشند، در نتیجه تعداد ۵ رقمی‌های ممکن برابر است با:

۴ و ۲ و (۵ و ۳ و ۱)

$۳!\times ۳! = ۶\times ۶ = ۳۶$

۳۱- (۳)

> **نکته (۱):** تعداد جایگشت‌های k تایی از n شیء متمایز $(k \le n)$ برابر است با:
> $$(n)_k = P(n,k) = \underset{\text{مکان اول}}{n} \times \underset{\text{مکان دوم}}{n-۱} \times \dots \times \underset{\text{مکان } k \text{ ام}}{n-k+۱} = \frac{n!}{(n-k)!}$$
> **نکته (۲):** اگر بخواهیم k شیء را از میان n شیء غیرمتمایز جایگشت دهیم، ابتدا دسته‌های k تایی از آن n شیء می‌سازیم، سپس تعداد جایگشت‌های ممکن (تکراری یا غیرتکراری) در هر دسته را می‌یابیم و در نهایت طبق اصل جمع، تعداد همه‌ی حالت‌های به‌دست آمده را با هم جمع می‌کنیم.

حالت‌های مختلف برای ساختن این عدد ۴ رقمی عبارت است از:

۱) ۱، ۲، ۲ و ۳: تعداد اعداد $= \frac{۴!}{۲!} = ۱۲$

۲) ۱، ۳، ۳ و ۲: تعداد اعداد $= \frac{۴!}{۲!} = ۱۲$

۳) ۱، ۳، ۳ و ۳: تعداد اعداد $= \frac{۴!}{۳!} = ۴$

۴) ۲، ۲، ۳ و ۳: تعداد اعداد $= \frac{۴!}{۲!۲!} = ۶$

۵) ۲، ۳، ۳ و ۳: تعداد اعداد $= \frac{۴!}{۳!} = ۴$

بنابراین در مجموع $۱۲ + ۱۲ + ۴ + ۶ + ۴ = ۳۸$ عدد مختلف می‌توانیم بسازیم.

۳۲- (۱)

۱) اعداد حاصل از ارقام ۲، ۱، ۰ و ۰: $\frac{۲\times ۳\times ۲\times ۱}{۲!} = ۶$

۲) اعداد حاصل از ارقام ۲، ۰، ۱ و ۱: $\frac{۳\times ۳\times ۲\times ۱}{۲!} = ۹$

۳) اعداد حاصل از ارقام ۱، ۰، ۲ و ۲: $\frac{۳\times ۳\times ۲\times ۱}{۲!} = ۹$

۴) اعداد حاصل از ارقام ۱، ۱، ۰ و ۰: $\frac{۲\times ۳\times ۲\times ۱}{۲!۲!} = ۳$

۵) اعداد حاصل از ارقام ۲، ۲، ۰ و ۰: $\frac{۲\times ۳\times ۲\times ۱}{۲!\times ۲!} = ۳$

۶) اعداد حاصل از ارقام ۲ و ۲ و ۱ و ۱: $\frac{۴\times ۳\times ۲\times ۱}{۲!۲!} = ۶$

بنابراین در مجموع تعداد اعداد چهار رقمی مطلوب برابر است با:

$۶ + ۹ + ۹ + ۳ + ۳ + ۶ = ۳۶$

۳۳- (۲)

> **نکته:** تعداد حالت‌های انتخاب k شیء از n شیء متمایز که ترتیب انتخاب آن‌ها برای ما مهم باشد، برابر با تعداد جایگشت‌های k تایی از n شیء متمایز است و آن را ترتیب (تبدیل) k از n می‌گوییم.

ابتدا دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی را در ۱۰ صندلی ردیف اول می‌نشانیم، این کار به $P(۱۰,۷)$ حالت انجام پذیر است. سپس دانش‌آموزان رشته‌ی تجربی را در ردیف دوم می‌نشانیم، این کار نیز به $P(۱۰,۵)$ حالت امکان‌پذیر است.

در نهایت دانش‌آموزان رشته‌ی انسانی را در ۸ صندلی خالی باقی مانده به $P(۸,۳)$ حالت می‌نشانیم. پس مقدار کل حالات برابر است با:

$$P(۱۰,۷)P(۱۰,۵)P(۸,۳) = \frac{۱۰!}{۳!}\times\frac{۱۰!}{۵!}\times\frac{۸!}{۵!} = \frac{(۱۰!)^۲\times ۸!}{۶!۵!}$$

۳۴- (۳)

> **نکته (۱):** انتخاب‌های k تایی از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اشیاء برای ما مهم **نباشد** را ترکیب k تایی از n شیء متمایز می‌نامیم که تعداد حالات آن برابر است با:
> $$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad ; \quad k \le n$$
> **نکته (۲):** ترکیب k شیء از n شیء متمایز دارای خواص زیر است:
>
> ۱) $\binom{n}{n} = \binom{n}{۰} = ۱$ ۲) $\binom{n}{۱} = n$
>
> ۳) $\binom{n}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲}$ ۴) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

۵) $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$ (قاعده‌ی پاسکال)

۶) $C(n,k)=\frac{P(n,k)}{k!}$

۷) $\underbrace{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{n}}_{\text{تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی n عضوی}}=2^n$

تذکر: اگر در حل مسائل فقط انتخاب اشیا مد نظر باشد از ترکیب، و اگر انتخاب کردن و جادادن (ترتیب دادن) اشیا مد نظر باشد، از جایگشت کمک می‌گیریم.

$$\binom{n}{k+1}+\binom{n}{n-k}+\binom{n+1}{k}=\underbrace{\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}}_{\text{قاعده‌ی پاسکال}}+\binom{n+1}{k}$$

$$=\binom{n+1}{k+1}+\binom{n+1}{k}\xlongequal{\text{قاعده‌ی پاسکال}}\binom{n+2}{k+1}$$

۳۵- (۴) **راه اول:** برای آن‌که حداکثر سه مهره‌ی آبی داشته باشیم، باید تعداد مهره‌های آبی ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳ باشد، پس داریم:

$$\text{تعداد حالات}=\underbrace{\binom{5}{0}\times\binom{4}{4}}_{\text{صفر آبی و ۴ قرمز}}\overset{\text{یا}}{+}\underbrace{\binom{5}{1}\times\binom{4}{3}}_{\text{۱ آبی و ۳ قرمز}}\overset{\text{یا}}{+}\underbrace{\binom{5}{2}\times\binom{4}{2}}_{\text{۲ آبی و ۲ قرمز}}\overset{\text{یا}}{+}\underbrace{\binom{5}{3}\times\binom{4}{1}}_{\text{۳ آبی و ۱ قرمز}}$$

$$=1+20+60+40=121$$

راه دوم: از تعداد کل حالات انتخاب ۴ مهره، حالت‌هایی که تعداد مهره‌های آبی بیش از ۳ (یعنی ۴ مهره) باشد را کم می‌کنیم:

$$\text{تعداد حالات مطلوب}=\binom{9}{4}-\binom{5}{4}\times\binom{4}{0}=\frac{9!}{5!4!}-5\times1$$

$$=126-5=121$$

۳۶- (۱) ابتدا سه شهر از این ۴ شهر را انتخاب می‌کنیم، سپس به ۵ حالت مختلف، یک نفر را از هر شهر انتخاب می‌کنیم. پس تعداد حالات ممکن برابر است با:

$$\binom{4}{3}\times5\times5\times5=4\times5^3=500$$

۳۷- (۲) برای آن‌که ad ضلع چهارضلعی محدب مطلوب باشد، باید دو رأس دیگر چهارضلعی را از نقاط واقع در یک طرف وتر ad انتخاب کنیم، پس تعداد چهارضلعی‌های موردنظر برابر است با:

$$\underbrace{\binom{2}{2}}_{\text{انتخاب ۲ رأس از b و c}}\overset{\text{یا}}{+}\underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{انتخاب ۲ رأس از رئوس e و f و g}}=1+3=4$$

تمرین: تعداد چهارضلعی‌های محدب که ad قطر آن‌ها باشد، چه‌قدر است؟

پاسخ:

$$\binom{2}{1}\times\binom{3}{1}=6$$

۳۸- (۲)

راه اول:

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی برابر با $\binom{n}{r}$ است.

حالت‌های مختلف را درنظر می‌گیریم. از آن‌جا که هر زیرمجموعه‌ی n عضوی شامل ۴ است، پس کافی است $n-1$ عضو دیگر را از ۷ عضو باقی‌مانده انتخاب کنیم:

تعداد زیرمجموعه‌های ۰ عضوی $\xlongequal{\text{شامل ۴}} 0$

تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی $\xlongequal{\text{شامل ۴}}\binom{7}{1}=7$

تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی $\xlongequal{\text{شامل ۴}}\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!4!}=35$

تعداد زیرمجموعه‌های ۶ عضوی $\xlongequal{\text{شامل ۴}}\binom{7}{5}=\frac{7\times6}{2}=21$

تعداد زیرمجموعه‌های ۸ عضوی $\xlongequal{\text{شامل ۴}}\binom{7}{7}=1$

بنابراین در مجموع $7+35+21+1=64$ زیرمجموعه‌ی زوج عضوی و شامل عضو ۴ داریم.

راه دوم:

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های زوج عضوی و فرد عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی $(n\in\mathbb{N})$ با هم یکسان و برابر 2^{n-1} می‌باشد.

تعداد زیرمجموعه‌های شامل عدد ۴، برابر تعداد زیرمجموعه‌های ساخته شده توسط ۷ عضو دیگر است. (چرا؟) از این تعداد نصف آن‌ها زوج‌عضوی و نصف دیگر فردعضوی است. پس $2^6=64$ زیرمجموعه‌ی زوج‌عضوی شامل عدد ۴ داریم.

سطح (۳)

۳۹- (۱) خانه‌ی A_1 به ۳ طریق قابل رنگ‌آمیزی است.

A_1	A_2	A_3
A_4	A_5	A_6
A_7	A_8	A_9

با رنگ‌آمیزی خانه‌ی A_1، چون هیچ‌یک از خانه‌های ردیف‌های افقی و عمودی هم‌رنگ نیستند، A_2 و A_4 به دو طریق و خانه‌های A_3 و A_7 به یک طریق قابل رنگ‌آمیزی هستند.

چون رنگ خانه‌های A_4 و A_7 متمایز است، لذا رنگ خانه‌ی A_2 با رنگ خانه‌ی A_4 یا A_7 متمایز است. فرض کنید رنگ خانه‌های A_2 و A_4 متمایز باشند، خانه‌ی A_5 نیز رنگی متفاوت با A_2 و A_4 دارد، پس رنگ خانه‌ی A_5 هم مشخص می‌شود. با مشخص شدن رنگ خانه‌های A_5 و A_2 رنگ خانه‌ی A_8 و با مشخص شدن رنگ خانه‌های A_5 و A_4 رنگ خانه‌ی A_6 مشخص می‌شود. در نهایت با مشخص شدن رنگ همه‌ی خانه‌ها رنگ خانه‌ی A_9 نیز مشخص می‌شود.