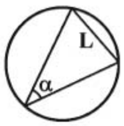
فهرست مطالب

بخش		شماره صفحه	تعداد تست
ریاضیات پایه (۲۲۹ تست)	دنباله‌های حسابی و هندسی (تصاعد)	۱۰	۵۷
	لگاریتم	۱۴	۴۵
	مثلثات	۱۷	۱۲۷
	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	۲۸	
حسابان (۲۳۷ تست)	محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات	۶۸	۱۱۵
	تابع	۷۶	۱۲۲
	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	۸۵	
حساب دیفرانسیل و انتگرال (۹۹۰ تست)	یادآوری مفاهیم پایه	۱۳۵	۳۰
	دنباله‌ها	۱۳۷	۶۳
	حد	۱۴۲	۱۳۰
	پیوستگی	۱۵۲	۷۸
	مجانب	۱۵۸	۶۸
	مشتق	۱۶۵	۲۰۶
	کاربرد مشتق	۱۸۱	۲۱۸
	انتگرال	۲۰۱	۱۹۷
	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	۲۱۷	
هندسه (۱) (۷۶ تست)	هندسه و استدلال	۴۵۶	۱۰
	مساحت و قضیه‌ی فیثاغورس	۴۵۶	۳۰
	تشابه	۴۵۹	۱۳
	شکل‌های فضایی	۴۶۱	۲۳
	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	۴۶۴	

EIGHT BOOK

mathematics

بخش		شماره صفحه	تعداد تست
هندسه (۲) (۱۱۱ تست)	**استدلال در هندسه**	۴۸۰	۳۰
	دایره	۴۸۲	۳۶
	تبدیل‌ها	۴۸۵	۱۹
	هندسه در فضا	۴۸۷	۲۶
	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	۴۹۰	
هندسه تحلیلی و جبر خطی (۱۸۶ تست)	**بردارها**	۵۱۸	۳۶
	معادلات خط و صفحه	۵۲۰	۳۵
	مقاطع مخروطی	۵۲۳	۵۱
	ماتریس و دترمینان	۵۲۷	۵۰
	دستگاه معادلات خطی	۵۳۱	۱۴
	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	۵۳۳	
ریاضیات گسسته و جبر و احتمال (۲۳۰ تست)	**گراف**	۵۷۹	۳۵
	نظریه‌ی اعداد	۵۸۱	۵۳
	ضرب دکارتی	۵۸۴	۳۶
	احتمال	۵۸۷	۶۵
	استدلال ریاضی	۵۹۲	۱۳
	نظریه‌ی مجموعه‌ها	۵۹۳	۲۱
	آنالیز	۵۹۵	۷
	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	۵۹۶	
آمار و مدل‌سازی (۷۰ تست)	**آمار و مدل‌سازی**	۶۳۳	۷۰
	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	۶۳۹	
سؤالات کنکور سراسری ریاضی ۹۳ (با پاسخ‌نامه‌ی کلیدی)		۶۵۶	



۵۷۳– در شکل مقابل، زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به وتری به طول L در دایره‌ی واحد، برابر α است. اگر مساحت قسمت سایه زده برابر S باشد، آهنگ تغییر S نسبت به L وقتی $L = ۱$ است، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$

۵۷۴– در یک مثلث قائم‌الزاویه با وتر ثابت ۴۰ سانتی‌متر، اگر اندازه‌ی یکی از زوایای حاده با آهنگ $\frac{\pi}{۳۶}$ رادیان بر ثانیه کاهش یابد، در لحظه‌ای که اندازه‌ی این زاویه به $\frac{\pi}{۶}$ می‌رسد، آهنگ تغییر مساحت مثلث کدام است؟

۱) $\frac{۵۰\pi}{۹}$ ۲) $\frac{۱۰۰\pi}{۹}$ ۳) $-\frac{۵۰\pi}{۹}$ ۴) $-\frac{۱۰۰\pi}{۹}$

۵۷۵– شخصی بر چرخ و فلکی به شعاع ۱۰ متر سوار شده است که در هر دقیقه یک دور می‌زند. وقتی فاصله‌ی افقی آن شخص از خط گذرا از مرکز چرخ و فلک برابر ۵ متر است، سرعت بالا رفتن یا پایین آمدن شخص چند متر بر دقیقه است؟ (مثال کتاب درسی)

۱) ۱۰/۲ ۲) ۲۱/۵ ۳) ۳۱/۴ ۴) ۶/۲۸

کاربرد مشتق

نقاط بحرانی

۵۷۶– تعداد نقاط بحرانی تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = |\sin x|$ بر بازه‌ی $(\frac{-\pi}{۲}, \frac{۵\pi}{۲})$ کدام است؟ (سراسری ریاضی – ۸۲)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۵۷۷– تابع $y = |x^۳ - x|$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟ (آزاد ریاضی صبح – ۸۹)

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۶

۵۷۸– تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x^۳ - x|$ روی بازه‌ی $[-۱, ۲]$ کدام است؟ (سراسری – ۹۰)

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۶

۵۷۹– تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x|x^۲ - ۱|$ در دامنه‌ی $[-۲, ۲]$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟ (سراسری خارج از کشور – ۸۷)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۵۸۰– نقاط بحرانی بر روی نمودار تابع $f(x) = (x-۱)|x^۲ + x - ۲|$ سه رأس مثلثی هستند، مساحت این مثلث کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج – ۹۲)

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۶ ۴) ۸

۵۸۱– نقاط بحرانی تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = x^{\frac{۴}{۳}} - x^{\frac{۲}{۳}}$ بر $[-۱, ۱]$ کدام است؟ (سراسری تجربی – ۸۰)

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ و $\frac{-\sqrt{۲}}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ و ۰ و $\frac{-\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و ۰ و $\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$

۵۸۲– مجموعه طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x - ۲|\sqrt[۳]{x^۲}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی – ۸۵)

۱) $\{۰, \frac{۴}{۵}, ۲\}$ ۲) $\{۰, \frac{۲}{۳}, ۲\}$ ۳) $\{۰, ۱\}$ ۴) $\{\frac{۲}{۳}, ۲\}$

۵۸۳– تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = [x]\sin \pi x$ روی بازه‌ی $[-۱, ۲]$ کدام است؟ (سراسری خارج از کشور – ۸۵)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) بی‌شمار

۵۸۴– تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{\sqrt{۱ + x^۲}}{x}$ بر روی دامنه‌ی خود، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور – ۹۰)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۵۸۵– طول نقطه‌ی بحرانی تابع $f(x) = xe^x$ کدام است؟

۱) e ۲) صفر ۳) $\frac{۱}{e}$ ۴) -۱

اکسترمم‌های موضعی (نسبی) ناپیوسته

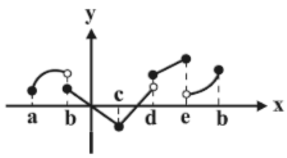
۵۸۶- تابع f در بازه‌ی $[a\,,\,b]$ تعریف شده است. در این مورد کدام بیان درست است؟ (سراسری ریاضی - ۸۳)

۱) هر نقطه‌ی بحرانی نقطه‌ی اکسترمم نسبی است.
۲) هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی نقطه‌ی بحرانی است.
۳) در هر نقطه‌ی بحرانی مشتق تابع صفر است.
۴) در هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی مشتق تابع صفر است.

۵۸۷- تابع f در نقطه‌ی c دارای می‌نیمم است و مشتق راست دارد. الزاماً این مشتق چگونه است؟ (سراسری خارج از کشور - ۹۰)

۱) مثبت
۲) منفی
۳) نامنفی
۴) نامثبت

۵۸۸- شکل زیر، نمودار تابع f در $[a\,,\,b]$ است. تعداد نقاط اکسترمم نسبی f کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۸۰)



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۵۸۹- تابع براکت $y=[۲x]-۲x$: (آزاد ریاضی صبح - ۸۹)

۱) ماکزیمم نسبی و می‌نیمم نسبی ندارد.
۲) ماکزیمم نسبی و می‌نیمم نسبی دارد.
۳) ماکزیمم نسبی ندارد و می‌نیمم نسبی دارد.
۴) ماکزیمم نسبی دارد و می‌نیمم نسبی ندارد.

۵۹۰- اگر $f(x)=[x]-x$ و $g(x)=۲^x$، آن‌گاه تابع gof از نظر اکسترمم نسبی کدام نوع را دارد؟ ([ ] علامت جزء صحیح است.) (سراسری ریاضی - ۹۱)

۱) فاقد ماکسیمم - فاقد می‌نیمم
۲) دارای ماکسیمم - فاقد می‌نیمم
۳) فاقد ماکسیمم - دارای می‌نیمم
۴) دارای ماکسیمم - دارای می‌نیمم

۵۹۱- در تابع $y=\begin{cases}(x-۱)^۲-۲ & ;\; x>۰\\ k+۱ & ;\; x=۰\\ ۱-|x-۱| & ;\; x<۰\end{cases}$، حدود k برای آن‌که نقطه‌ی $x=۰$ اکسترمم نسبی نباشد؟ (آزاد ریاضی عصر - ۸۴)

۱) $-۲\le k\le -۱$
۲) $-۲<k\le -۱$
۳) $k\ge -۱$
۴) $-۲\le k<-۱$

اکسترمم‌های موضعی (نسبی) پیوسته (مشتق‌پذیر و مشتق‌ناپذیر) - آزمون‌های مشتق

۵۹۲- تابع $y=(x-۱)^۷(x-۲)^۸$: (آزاد خارج از کشور - ۸۷)

۱) فقط یک ماکزیمم نسبی دارد.
۲) فقط یک می‌نیمم نسبی دارد.
۳) ماکزیمم و می‌نیمم نسبی ندارد.
۴) یک ماکزیمم نسبی و یک می‌نیمم نسبی دارد.

۵۹۳- به ازای چه مقدار a، می‌نیمم نمودار تابع $y=ax^۲-۲\sqrt{۲}\,x+a$ بر روی خط $y=۱$ واقع است؟ (سراسری ریاضی - ۷۷)

۱) -۱
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۱
۴) ۲

۵۹۴- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^۴-۶x^۲+۸x$ از نظر اکسترمم نسبی کدام وضع را دارد؟ (سراسری خارج از کشور - ۹۰)

۱) می‌نیمم نسبی
۲) ماکسیمم نسبی
۳) می‌نیمم نسبی و ماکسیمم نسبی
۴) فاقد اکسترمم نسبی

۵۹۵- به‌ازای کدام مقادیر a، تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^۲+\frac{a}{x}$، دارای ماکزیمم نسبی است؟ (سراسری خارج از کشور - ۸۹)

۱) $|a|>۲$
۲) $a<۰$
۳) $a>۰$
۴) هیچ مقدار a

۵۹۶- به ازای کدام مجموعه مقادیر a، طول یکی از نقاط اکسترمم نسبی با ضابطه‌ی $f(x)=x^۳+ax^۲-۸x$، در بازه‌ی $(۱\,,\,۴)$ قرار می‌گیرد؟ (سراسری ریاضی خارج - ۹۲)

۱) $-۳<a<۱/۵$
۲) $-۳<a<۲/۵$
۳) $-۵<a<۱/۵$
۴) $-۵<a<۲/۵$

۵۹۷- تابع $f(x)=\frac{a}{x}+bx^۲$ در نقطه‌ی $(۲\,,\,-۱)$ دارای اکسترمم نسبی است. مقدار عددی a و نوع اکسترمم نسبی کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۸۸)

۱) $-\frac{۴}{۳}$، می‌نیمم
۲) $-\frac{۴}{۳}$، ماکزیمم
۳) $\frac{۴}{۳}$، می‌نیمم
۴) $\frac{۴}{۳}$، ماکزیمم

۵۹۸- تابع $y=\frac{x+1}{x^2-2x}$ چند اکسترمم نسبی دارد؟ (آزاد ریاضی عصر - ۸۴)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۹۹- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x|x^2-3|$، در چند نقطه اکسترمم نسبی دارد؟ (سراسری خارج از کشور - ۸۸)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۰۰- نقاط اکسترمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\cos^2 x-\cos x$ روی بازه‌ی $[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}]$ چگونه‌اند؟ (سراسری ریاضی - ۸۵)

۱) یک نقطه‌ی ماکزیمم- یک نقطه‌ی می‌نیمم
۲) یک نقطه‌ی ماکزیمم- دو نقطه‌ی می‌نیمم
۳) دو نقطه‌ی ماکزیمم- یک نقطه‌ی می‌نیمم
۴) دو نقطه‌ی ماکزیمم- دو نقطه‌ی می‌نیمم

۶۰۱- نقاط اکسترمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\cos 2x-2\cos x$ روی بازه‌ی $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ چگونه است؟ (سراسری خارج از کشور - ۸۵)

۱) فاقد ماکزیمم - یک نقطه‌ی می‌نیمم
۲) یک نقطه‌ی ماکزیمم یک نقطه‌ی می‌نیمم
۳) یک نقطه‌ی ماکزیمم - دو نقطه‌ی می‌نیمم
۴) دو نقطه‌ی ماکزیمم - یک نقطه‌ی می‌نیمم

۶۰۲- طول نقطه‌ی اکسترمم تابع $f(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}$ در فاصله‌ی $[0,\pi]$ کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۸۳)

۱) $\frac{2\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۶۰۳- نمودار تابع $y=\frac{3\sin x+1}{4\sin x+1}$ در کدام نقطه می‌نیمم دارد؟ (آزاد ریاضی عصر - ۸۵)

۱) صفر ۲) $\frac{3\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۶۰۴- طول نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع $y=\tan x+\cot x$ کدام است؟ (آزاد پزشکی - ۷۶)

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{5\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

۶۰۵- نمودار تابع $f(x)=x^2e^{-x^2}$ دارای .... ماکزیمم موضعی و .... می‌نیمم موضعی است. (تمرین کتاب درسی)

۱) یک - یک ۲) یک - دو ۳) دو - یک ۴) دو - دو

اکسترمم‌های سراسری (مطلق)

۶۰۶- کدام بیان درباره‌ی پیوستگی تابع درست است؟ (سراسری ریاضی - ۸۷)

۱) اگر تابعی در بازه‌ی (a,b) یکنوا و کران‌دار باشد، در این بازه پیوسته است.
۲) اگر تابعی در بازه‌ی $[a,b]$ کران‌دار و دارای ماکسیمم و می‌نیمم باشد، در این بازه پیوسته است.
۳) اگر تابعی در بازه‌ی (a,b) پیوسته باشد، در این بازه کران‌دار و دارای ماکسیمم و می‌نیمم سراسری است.
۴) اگر تابعی در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد، در این بازه کران‌دار و دارای ماکسیمم و می‌نیمم سراسری است.

۶۰۷- کدام عبارت در مورد توابع پیوسته صحیح است؟ (سراسری ریاضی - ۸۶)

۱) اگر تابعی بر یک بازه پیوسته باشد، بر آن بازه کران‌دار است.
۲) اگر تابعی بر یک بازه‌ی بسته صعودی و کران‌دار باشد، بر آن بازه پیوسته است.
۳) اگر تابعی حد چپ و حد راست برابر در یک نقطه داشته باشد، در آن نقطه پیوسته است.
۴) اگر تابعی از چپ و راست در یک نقطه پیوسته باشد، در آن نقطه پیوسته است.

۶۰۸- اگر c طول نقطه‌ی اکسترمم مطلق تابع f روی دامنه‌ی آن باشد و تابع در همسایگی آن نقطه تعریف شده باشد، الزاماً تابع f در نقطه‌ی c کدام وضعیت را دارد؟ (سراسری ریاضی - ۸۸)

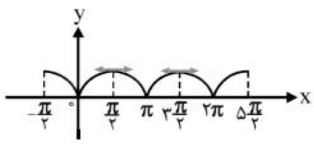
۱) پیوسته ۲) مشتق‌پذیر ۳) خط مماس افقی ۴) اکسترمم نسبی

۶۰۹- تابع f روی $[a,b]$ تعریف شده و $a<c<b$ است. کدام بیان نادرست است؟ (سراسری - ۹۰)

۱) اگر c نقطه‌ی اکسترمم نسبی و $f'(c)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه خط مماس بر منحنی در c افقی است.
۲) اگر c نقطه‌ی بحرانی باشد، آن‌گاه c نقطه‌ی اکسترمم نسبی است.
۳) اگر c نقطه‌ی اکسترمم نسبی باشد، آن‌گاه c نقطه‌ی بحرانی است.
۴) اگر c نقطه‌ی اکسترمم مطلق باشد، آن‌گاه c نقطه‌ی بحرانی است.

درسنامه **نقطه‌ی بحرانی:** نقطه‌ی درونی به طول $x_۰ \in D_f$ را یک نقطه‌ی بحرانی تابع $f(x)$ می‌نامند، هرگاه: $f'(x_۰)=۰$ یا $f'(x_۰)$ ناموجود باشد.

۵۷۶- (۴) **روش اول:** مطابق نمودار تابع، نقاطی به طول‌های $x=۰, \frac{\pi}{۲}, \pi, \frac{۳\pi}{۲}, ۲\pi$ نقاط بحرانی‌اند. زیرا در نقاط $x=\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}$ خط مماس افقی است، یعنی مشتق صفر است $\left(f'(\frac{\pi}{۲})=f'(\frac{۳\pi}{۲})=۰\right)$ و در نقاط $x=۰, \pi, ۲\pi$ دو نیم‌مماس با زوایای مختلف داریم. $\left(f'(۲\pi), f'(\pi), f'(۰)\right)$ ناموجودند) یعنی مشتق وجود ندارد. (نقاط زاویه‌دار منحنی)



نکته **در توابع به فرم کلی $y=|f(x)|$، ریشه‌های معادلات $f(x)=۰$ و $f'(x)=۰$ طول نقاط بحرانی تابع هستند.**

روش دوم: بر اساس نکته‌ی فوق، کافی است ریشه‌های معادلات $\sin x=۰$ و $\cos x=۰$ را در بازه‌ی $\left(-\frac{\pi}{۲}, \frac{۵\pi}{۲}\right)$ به‌دست آوریم. بنابراین داریم:

$$\sin x=۰ \Rightarrow x=k\pi \xrightarrow{x\in(-\frac{\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۲})} x=۰, \pi, ۲\pi$$

$$\cos x=۰ \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲} \xrightarrow{x\in(-\frac{\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۲})} x=\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}$$

۵۷۷- (۲)

$$y=|x^۳-x| \Rightarrow \begin{cases} f(x)=x^۳-x=۰ \Rightarrow x(x^۲-۱)=۰ \Rightarrow x(x-۱)(x+۱)=۰ \Rightarrow x=۰, \pm۱ \\ f'(x)=۳x^۲-۱=۰ \Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۳} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳} \end{cases}$$

بنابراین تابع $y=|x^۳-x|$ پنج نقطه‌ی بحرانی به طول‌های $\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و ±۱ و $x=۰$ دارد.

۵۷۸- (۳) به‌طور کلی اگر g تابعی مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی نقاط بحرانی تابع $f(x)=|g(x)|$ از اجتماع جواب‌های معادلات $g(x)=۰$ و $g'(x)=۰$ به دست می‌آید. چون $f(x)=|x^۳-x|$، قرار می‌دهیم $g(x)=x^۳-x$ و داریم:

$$g(x)=۰ \Rightarrow x^۳-x=۰ \Rightarrow x(x^۲-۱)=۰ \Rightarrow x=۰ \text{ یا } x=۱ \text{ یا } x=-۱$$

$$g'(x)=۰ \Rightarrow ۳x^۲-۱=۰ \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

چون همه‌ی نقاط به‌دست آمده به‌جز $x=-۱$ در بازه‌ی $(-۱, ۲)$ قرار دارند، لذا همگی آن‌ها به‌جز $x=-۱$ بحرانی هستند. بنابراین تعداد نقاط بحرانی f در بازه‌ی $[-۱, ۲]$، ۴ نقطه است.

۵۷۹- (۲) **نکته** **در توابع به فرم $y=g(x)|f(x)|$ ریشه‌های معادلات $f(x)=۰$ و نیز $(gf)'(x)=۰$، طول نقاط بحرانی تابع هستند. (به شرط آن‌که نقطه‌ی درونی دامنه باشند.)**

با توجه به نکته‌ی فوق، در مورد تابع $y=x|x^۲-۱|$ می‌توان نوشت:

اولاً: $x^۲-۱=۰ \Rightarrow x=\pm۱$

ثانیاً: $(x(x^۲-۱))'=۰ \Rightarrow (x^۳-x)'=۰ \Rightarrow ۳x^۲-۱=۰ \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

در نتیجه طول نقاط بحرانی تابع به‌صورت $\left\{-۱, -\frac{\sqrt{۳}}{۳}, \frac{\sqrt{۳}}{۳}, ۱\right\}$ می‌باشند.

۵۸۰- (۳) با توجه به نکته‌ی تست قبل، نقاط بحرانی تابع $y=(x-۱)|x^۲+x-۲|$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

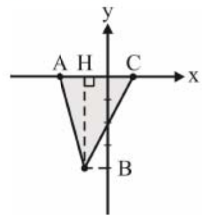
اولاً: $x^۲+x-۲=۰ \Rightarrow (x+۲)(x-۱)=۰ \Rightarrow x=-۲, ۱$

ثانیاً: $((x-۱)(x^۲+x-۲))'=۰ \Rightarrow ((x-۱)^۲(x+۲))'=۰ \Rightarrow ۲(x-۱)(x+۲)+(x-۱)^۲=۰ \Rightarrow (x-۱)(۲x+۴+x-۱)=۰$

$\Rightarrow (x-۱)(۳x+۳)=۰ \Rightarrow x=-۱, ۱$

در نتیجه مجموعه‌ی طول نقاط بحرانی تابع به صورت $\{1, -1, -2\}$ باشد. بنابراین مساحت مثلث موردنظر برابر است با:

مختصات نقاط بحرانی تابع f : $\begin{cases} x=-2\ ;\ f(-2)=0 & \Rightarrow A\Big|_{0}^{-2} \\ x=-1\ ;\ f(-1)=-4 & \Rightarrow B\Big|_{-4}^{-1} \\ x=1\ \ ;\ f(1)=0 & \Rightarrow C\Big|_{0}^{1} \end{cases}$



$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\times BH=\frac{1}{2}(3\times 4)=6$$

۵۸۱– (۳)

$$f'(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}=\frac{4\sqrt[3]{x}}{3}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{4\sqrt[3]{x^2}-2}{3\sqrt[3]{x}}=0\Rightarrow \sqrt[3]{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{1}{8}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}=0\Rightarrow x=0$$

$\Rightarrow$ طول نقاط بحرانی $=\left\{\frac{-\sqrt{2}}{4}, 0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$

۵۸۲– (۱)

$f(x)=|x-2|\sqrt[3]{x^2}\Rightarrow x=2$ (مشتق‌ناپذیری) نقطه‌ی بحرانی $\Rightarrow$ نقطه‌ی گوشه

اگر $x\geq 2$ ($|x-2|=x-2$):

$$f'(x)=\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(x-2)=\frac{3x+2x-4=0\Rightarrow x=\frac{4}{5}\ \text{غ ق ق}}{3\sqrt[3]{x}=0\ \ \Rightarrow x=0}$$

اگر $x<2$ ($|x-2|=2-x$):

$$f'(x)=-\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(2-x)=\frac{-3x+4-2x=0\Rightarrow x=\frac{4}{5}}{3\sqrt[3]{x}=0\ \ \Rightarrow x=0}$$

نتیجه: در توابع به فرم کلی $y=\sqrt[2n+1]{(x-a)^m g(x)}$ ($g(a)\neq 0, m,n\in\mathbb{N}$ و تابع g در همسایگی a تعریف شده و کراندار است.)، اگر $m<2n+1$ باشد، نقطه به طول $x=a$، نقطه‌ی بحرانی مشتق‌ناپذیر است و اگر $m>2n+1$، آن‌گاه $x=a$ نقطه‌ی بحرانی مشتق‌پذیر $(y'(a)=0)$ خواهد بود. در حالت $m=2n+1$، $x=a$ طول نقطه‌ی عادی نمودار تابع می‌باشد.

۵۸۳– (۴) تابع $f(x)=[x]\sin\pi x$ را ساده کرده و با حذف جزء صحیح، تابع را در بازه‌ی $[-1, 2]$ به‌صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases} -\sin\pi x & ; & -1\leq x<0 \\ 0 & ; & 0\leq x<1 \\ \sin\pi x & ; & 1\leq x<2 \\ 0 & ; & x=2 \end{cases}$$

با توجه به این‌که در بازه‌ی $(0, 1)$ تابع به‌صورت خط افقی $y=0$ درمی‌آید، پس در تمام نقاط این بازه، مشتق تابع برابر صفر بوده و در نتیجه تمام نقاط بازه‌ی $(0, 1)$ بحرانی‌اند. بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

۵۸۴– (۱) با توجه به این‌که $f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$، لذا $f(x)$ در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است. داریم:

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}(\sqrt{1+x^2})+\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1+x^2}}\Rightarrow f'(x)=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{-(1+x^2)+x^2}{x^2\sqrt{1+x^2}}=-\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}<0$$

چون مقدار مشتق، همواره منفی می‌باشد، بنابراین به ازای تمام $x\in D_f$، $f(x)$ هیچ نقطه‌ی بحرانی ندارد.

۵۸۵– (۴) کافی است معادله‌ی $f'(x)=0$ را حل کنیم. داریم:

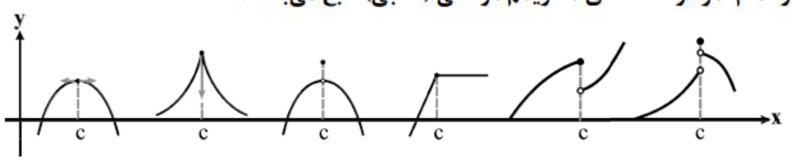
$$f(x)=xe^x\Rightarrow f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x\xrightarrow{f'(x)=0}(1+x)e^x=0\xrightarrow{e^x>0}1+x=0\Rightarrow x=-1$$

درسنامه **اکسترمم‌های موضعی (نسبی) یک تابع:**

تعریف: اگر تابع f روی بازه‌ای شامل بازه‌ی باز I تعریف شده باشد و $c \in I$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$ آن‌گاه نقطه به طول c را ماکزیمم موضعی (نسبی) نمودار تابع f گویند.

نکته **از لحاظ نموداری (هندسی) نقطه به طول c را ماکزیمم موضعی (نسبی) گویند، هرگاه عرض آن نقطه نسبت به عرض نقاط مجاور خود بالاتر یا مساوی باشد. (پایین‌تر نباشد)**

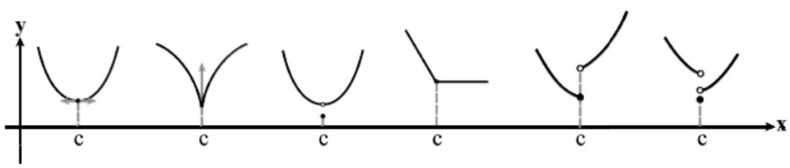
❖ **مثال: در شکل‌های زیر نقطه به طول $x = c$ در تمام نمودارها، نقطه‌ی ماکزیمم موضعی (نسبی) تابع می‌باشد.**



تعریف: اگر تابع f روی بازه‌ای شامل بازه‌ی باز I تعریف شده باشد و $c \in I$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$، آن‌گاه نقطه به طول c را می‌نیمم موضعی (نسبی) نمودار تابع f گویند.

نکته **نقطه به طول c را می‌نیمم موضعی (نسبی) گویند، هرگاه عرض آن نقطه نسبت به عرض نقاط مجاورش پایین‌تر یا مساوی باشد. (بالاتر نباشد)**

❖ **مثال: در شکل‌های زیر، نقطه به طول c، می‌نیمم موضعی (نسبی) تابع f است:**



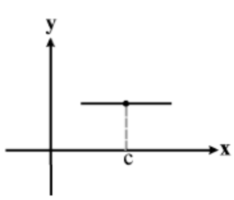
تذکر ۱: هر نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم موضعی، به طور کلی یک نقطه‌ی اکسترمم موضعی نامیده می‌شود.

تذکر ۲: هر نقطه‌ی اکسترمم موضعی یک نقطه‌ی بحرانی تابع است ولی عکس این مطلب برقرار نیست. یعنی تمام نقاط بحرانی یک تابع، لزوماً اکسترمم موضعی نیستند.

تذکر ۳: نقاط انتهایی (راست یا چپ) بازه‌ی تعریف یک تابع هرگز نمی توانند اکسترمم موضعی باشند، زیرا تابع در مجاورت این نقاط تعریف نشده است. در واقع شرط لازم برای آن‌که نقطه‌ی c اکسترمم موضعی تابع f باشد، آن است که تابع در همسایگی دو طرفه‌ی این نقطه تعریف شده باشد.

تذکر ۴: هر تابع در نقطه‌ی اکسترمم موضعی خود ممکن است پیوسته، ناپیوسته، مشتق‌پذیر یا مشتق‌ناپذیر باشد.

تذکر ۵: نقاط درونی واقع بر نمودار توابع ثابت هم می‌نیمم موضعی و هم ماکزیمم موضعی می‌باشند.



۵۸۶– (۲) **نکته** **قضیه: اگر $x = c$ طول نقطه‌ی اکسترمم موضعی (نسبی) مشتق‌پذیر تابع f باشد، آن‌گاه: $f'(c) = 0$.**

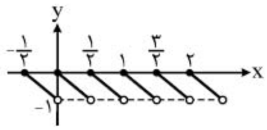
براساس قضیه‌ی فوق، فقط در اکسترمم‌های موضعی (نسبی) و مشتق‌پذیر مشتق تابع صفر است. در سایر اکسترمم‌های موضعی (ناپیوسته یا پیوسته‌ی مشتق‌ناپذیر) مشتق تابع وجود ندارد. بنابراین گزینه‌ی (۴) حذف می‌شود. از طرفی می‌دانیم در نقاط بحرانی هر تابع یا مشتق برابر صفر است و یا وجود ندارد. پس گزینه‌ی (۳) هم لزوماً همواره برقرار نیست و حذف می‌شود. در نهایت بر اساس مطالب درسنامه‌ی قبل می‌دانیم هر نقطه‌ی اکسترمم موضعی (نسبی) یک نقطه‌ی بحرانی است ولی عکس این مطلب لزوماً برقرار نیست. لذا گزینه‌ی (۱) نیز حذف و گزینه‌ی (۲) به عنوان جواب انتخاب می‌شود.

۵۸۷– (۳) چون تابع f در نقطه‌ی c مشتق راست دارد، پس در این نقطه از راست پیوسته و $f(c)$ تعریف شده است. هم‌چنین چون f در نقطه‌ی c می‌نیمم دارد، $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) \geq f(c)$. بنابراین داریم:

$$f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{\overbrace{f(x) - f(c)}^{\geq 0}}{\underbrace{x - c}_{\geq 0}} \geq 0 \Rightarrow$$ علامت مشتق راست همواره نامنفی است.

۵۸۸- (۲) نقطه به طول c می‌نیمم موضعی (نسبی) است. چون نسبت به نقاط مجاور خود پایین‌تر است.
نقطه به طول e ماکزیمم موضعی (نسبی) است. چون نسبت به نقاط مجاور خود بالاتر است.

۵۸۹- (۴) نمودار تابع $y=[۲x]-۲x$ را رسم می‌کنیم. (برد تابع $(R_f=(-۱,۰]$



مطابق شکل، نقاط به طول $x=\frac{k}{۲}\ (k\in\mathbb{Z})$ ماکزیمم موضعی (نسبی) نمودار تابع هستند ولی تابع می‌نیمم موضعی (نسبی) ندارد.

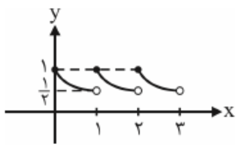
۵۹۰- (۲) **روش اول:** می‌دانیم $۰\le x-[x]<۱$، بنابراین از آن‌جایی که $gof(x)=۲^{[x]-x}$، داریم:

$$-۱<[x]-x\le ۰\Rightarrow ۲^{-۱}<۲^{[x]-x}\le ۲^{۰}\Rightarrow \frac{۱}{۲}<gof(x)\le ۱$$

بنابراین تابع gof دارای ماکسیممی برابر ۱ بوده و فاقد می‌نیمم می‌باشد.

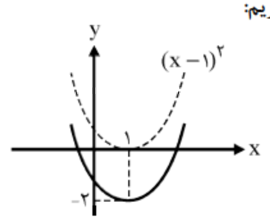
روش دوم: نمودار تابع gof را با توجه به متناوب بودن در چند بازه رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases}۰\le x<۱\Rightarrow gof(x)=۲^{-x}\\ ۱\le x<۲\Rightarrow gof(x)=۲^{۱-x}\\ ۲\le x<۳\Rightarrow gof(x)=۲^{۲-x}\end{cases}$$

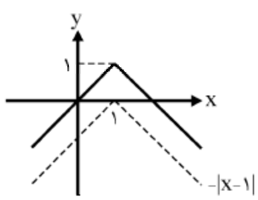


مطابق با نمودار فوق، تابع gof دارای ماکسیممی برابر ۱ بوده و می‌نیمم ندارد.

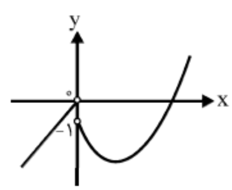
۵۹۱- (۴) ابتدا نمودار توابع $y=(x-۱)^۲-۲$ و $y=۱-|x-۱|$ را با استفاده از عملیات مربوط به انتقال منحنی توابع، رسم می‌کنیم تا در نهایت به شکل نمودار f برسیم. داریم:



$y=(x-۱)^۲-۲$



$y=۱-|x-۱|$



$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}(x-۱)^۲-۲ & ;\ x>۰\\ k+۱ & ;\ x=۰\\ ۱-|x-۱| & ;\ x<۰\end{cases}$$

برای آن که $x=۰$ اکسترمم موضعی (نسبی) نباشد باید $-۱\le f(۰)<۰$ یعنی $-۱\le k+۱<۰$ و لذا: $-۲\le k<-۱$

درسنامه

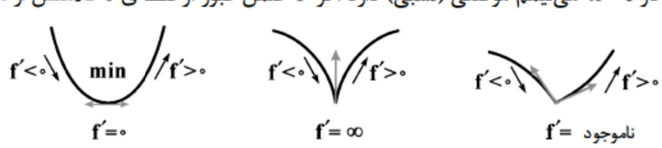
آزمون مشتق اول: اگر نقطه به طول $x=c$ یک نقطه‌ی بحرانی پیوسته‌ی تابع f باشد، آن‌گاه:

۱) تابع f در $x=c$ می‌نیمم موضعی (نسبی) دارد اگر f' ضمن عبور از نقطه‌ی c علامتش از منفی به مثبت تغییر کند.

x		c	
f'	−		+
f	↘		↗

min موضعی (نسبی)

حالات مختلف می‌نیمم موضعی $\xrightarrow{\hspace{2cm}}$ (نسبی) پیوسته‌ی تابع f

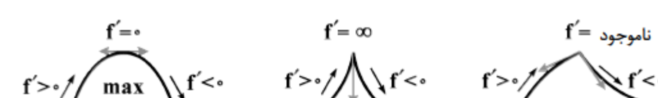


۲) تابع f در $x=c$ ماکزیمم موضعی (نسبی) دارد اگر f' ضمن عبور از نقطه‌ی c علامتش از مثبت به منفی تغییر کند.

x		c	
f'	+		−
f	↗		↘

max موضعی (نسبی)

حالات مختلف ماکزیمم موضعی $\xrightarrow{\hspace{2cm}}$ (نسبی) پیوسته‌ی تابع f



۳) اگر f' ضمن عبور از نقطه‌ی c تغییر علامت ندهد، f در $x=c$ اکسترمم موضعی (نسبی) ندارد.

تذکر ۱: از آن‌جا که هر تابع در ریشه‌های ساده‌ی خود تغییر علامت می‌دهد، لذا ریشه‌های ساده‌ی f' طول نقاط اکسترمم موضعی (نسبی) تابع f هستند، زیرا علامت f' ضمن عبور از آن‌ها تغییر می‌کند.

تذکر ۲: ریشه‌های مضاعف f' طول نقطه‌ی اکسترمم موضعی (نسبی) تابع f نیستند.

۵۹۲- (۴) **روش اول:**

$$f(x)=(x-1)^7(x-2)^8 \Rightarrow f'(x)=7(x-1)^6(x-2)^8+8(x-2)^7(x-1)^7$$

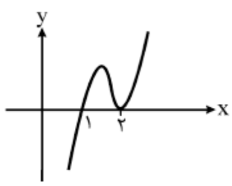
$$\Rightarrow f'(x)=(x-1)^6(x-2)^7(7x-14+8x-8)=(x-1)^6(x-2)^7(15x-22)$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 & \text{ریشه‌ی مضاعف} \\ x=2 \\ x=\frac{22}{15} \end{cases} \Rightarrow$$

x	$-\infty$		1		$\frac{22}{15}$		2		$+\infty$
y'		+	0	+	0	−	0	+	
y		↗		↗	max	↘	min	↗	

پس گزینه‌ی (۴) صحیح است.

روش دوم: تابع در اطراف $x=2$ تغییر علامت نمی‌دهد چون $x=2$ ریشه‌ی مرتبه‌ی زوج است. واضح است که در اطراف $x=2$ مقدار تابع مثبت است پس $x=2$ طول می‌نیمم موضعی (نسبی) تابع است. از طرفی در طرف راست $x=1$ مقدار تابع مثبت و در طرف چپ آن مقدار تابع منفی است. پس تابع به شکل مقابل است و همان‌طور که دیده می‌شود، این تابع یک ماکزیمم موضعی (نسبی) و یک می‌نیمم موضعی (نسبی) دارد.



نتیجه: در توابع به فرم $y=(x-a)^{2n}g(x)$ ($n\in\mathbb{N}$ و $g(a)\neq 0$ و g در همسایگی a کراندار است)، نقطه به طول $x=a$ اکسترمم موضعی (نسبی) مشتق‌پذیر تابع است و داریم:

الف) اگر $g(a)>0 \Leftarrow x=a$ می‌نیمم موضعی (نسبی) است.

ب) اگر $g(a)<0 \Leftarrow x=a$ ماکزیمم موضعی (نسبی) است.

یعنی به طور کلی ریشه‌های مکرر مرتبه‌ی زوج هر تابع، طول نقاط اکسترمم موضعی (نسبی) آن تابع می‌باشد.

۵۹۳- (۴) **روش اول:**

$$y=ax^2-2\sqrt{2}x+a \Rightarrow y'=2ax-2\sqrt{2}=0 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{a} \quad \text{طول نقطه‌ی می‌نیمم}$$

$$\Rightarrow y=a\left(\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^2-2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{a}\right)+a=\frac{2}{a}-\frac{4}{a}+a \xrightarrow{\text{طبق فرض مسأله}} \frac{2}{a}-\frac{4}{a}+a=1 \Rightarrow \frac{2-4+a^2}{a}=1$$

$$\Rightarrow a^2-a-2=0 \Rightarrow a=2 \ \text{ق ق} \ , \ a=-1 \ \text{غ ق ق}$$ (اگر $a<0$ باشد تابع درجه (۲) ماکزیمم خواهد داشت.)

نکته در تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ نقطه‌ی اکسترمم عبارت است از: $S\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$

روش دوم:

$$\text{طبق فرض مسأله}: \ y_{min}=1 \Rightarrow \frac{-\Delta}{4a}=1 \Rightarrow -\frac{8-4a^2}{4a}=1 \Rightarrow 4a^2-4a-8=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-1 & \text{غ ق ق} \\ a=2 & \text{ق ق} \end{cases}$$

۵۹۴- (۱)

$$f(x)=x^4-6x^2+8x \Rightarrow f'(x)=4x^3-12x+8 \xrightarrow{f'(x)=0} 4(x^3-3x+2)=0$$

$$\xrightarrow[\text{صفر است.}]{\text{جمع ضرایب}} (x-1)(x^2+x-2)=0 \Rightarrow (x-1)^2(x+2)=0$$

$x=1$ ریشه‌ی مضاعف تابع مشتق $(f'(x))$ بوده و لذا در $x=1$، تابع نقطه‌ی عطف دارد و $x=-2$ ریشه‌ی ساده‌ی مشتق بوده و از آزمون مشتق اول داریم:

x		−2	
f'	−	0	+
f	↘	min	↗

$\Rightarrow$ $x=-2$ طول نقطه‌ی می‌نیمم موضعی (نسبی) تابع است.

بنابراین این تابع، تنها یک می‌نیمم موضعی (نسبی) دارد.

درسنامه **آزمون مشتق دوم:** اگر نقطه به طول $x=c$، نقطه‌ی بحرانی پیوسته‌ی تابع f باشد، آن‌گاه:

۱) اگر $f''(c)>0$، آن‌گاه f در c می‌نیمم موضعی (نسبی) دارد.

۲) اگر $f''(c)<0$، آن‌گاه f در c ماکزیمم موضعی (نسبی) دارد.

۳) اگر $f''(c)=0$، آن‌گاه آزمون بی‌نتیجه است. یعنی نمی‌توان نوع اکسترمم موضعی (یا وجود نقطه‌ی عطف) را در این نقطه با آزمون مشتق دوم مشخص نمود.

۵۹۵- (۴) تابع f در دامنه‌ی خود $(\mathbb{R}-\{0\})$ مشتق‌پذیر است، بنابراین مشتق آن در نقاط اکسترمم موضعی (نسبی) برابر صفر می‌باشد. حال طول اکسترمم موضعی (نسبی) تابع f را به‌دست می‌آوریم و داریم:

$$f(x)=x^2+\frac{a}{x}\Rightarrow f'(x)=2x-\frac{a}{x^2}=0\Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{a}{2}}$$

نقطه‌ی $x=\sqrt[3]{\frac{a}{2}}$، طول اکسترمم موضعی (نسبی) تابع f است. برای تشخیص نوع اکسترمم (ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی بودن) به کمک آزمون مشتق دوم داریم:

$$f''(x)=2+\frac{2a}{x^3}\Rightarrow f''\left(\sqrt[3]{\frac{a}{2}}\right)=2+\frac{2a}{\frac{a}{2}}=6>0$$

بنابراین به‌ازای هر مقداری برای a، $x=\sqrt[3]{\frac{a}{2}}$ طول نقطه‌ی می‌نیمم موضعی (نسبی) است، لذا تابع f به‌ازای هیچ مقدار a، نمی‌تواند ماکزیمم موضعی (نسبی) داشته باشد.

۵۹۶- (۴) تابع f یک چندجمله‌ای درجه‌ی ۳ می‌باشد که روی تمام نقاط دامنه‌ی خود مشتق‌پذیر است، پس تابع f در نقاط اکسترمم نسبی خود، دارای مشتق صفر خواهد بود.

طبق فرض، تابع f در نقطه‌ی c عضو بازه‌ی $(1,4)$، اکسترمم نسبی دارد، پس $f'(c)=0$ و لذا با توجه به آزمون مشتق اول، مقادیر $f'(1)$ و $f'(4)$ مختلف‌العلامه هستند، پس:

$$f'(1)\cdot f'(4)<0 \qquad (*)$$

داریم:

$$f'(x)=3x^2+2ax-8\Rightarrow\begin{cases}f'(1)=2a-5\\ f'(4)=8a+40\end{cases}\xrightarrow{(*)}(2a-5)(8a+40)<0\Rightarrow\boxed{-5<a<2/5}$$

۵۹۷- (۲) تابع f در نقطه به طول $x=1$ مشتق‌پذیر است و چون در این نقطه دارای اکسترمم موضعی (نسبی) است، لذا $f'(1)=0$، از طرف دیگر نقطه‌ی $(1,-2)$ در معادله‌ی تابع صدق می‌کند، پس داریم:

$$f(x)=\frac{a}{x}+bx^2\Rightarrow f'(x)=-\frac{a}{x^2}+2bx$$

$$\left.\begin{array}{l}f(1)=-2\Rightarrow a+b=-2\\ f'(1)=0\Rightarrow -a+2b=0\end{array}\right\}\Rightarrow a=-\frac{4}{3},\ b=-\frac{2}{3}$$

بنابراین معادله‌ی تابع f را به‌صورت $f(x)=-\frac{4}{3x}-\frac{2}{3}x^2$ در می‌آید. برای تشخیص نوع نقطه به طول $x=1$، به کمک آزمون مشتق دوم، داریم:

$$f(x)=-\frac{4}{3x}-\frac{2}{3}x^2\Rightarrow f'(x)=\frac{4}{3x^2}-\frac{4}{3}x\Rightarrow f''(x)=-\frac{8}{3x^3}-\frac{4}{3}$$

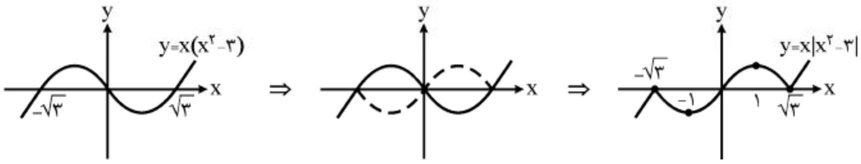
$\Rightarrow f''(1)=-\frac{8}{3}-\frac{4}{3}<0\Rightarrow$ $x=1$ طول نقطه‌ی ماکزیمم موضعی (نسبی) است.

۵۹۸- (۳)

$$y=\frac{x+1}{x^2-2x}\Rightarrow y'=\frac{(x^2-2x)-(2x-2)(x+1)}{(x^2-2x)^2}=0\Rightarrow y'=x^2-2x-2x^2+2=0\Rightarrow x^2+2x-2=0$$

$\Rightarrow \Delta=4-4(-2)>0$ پس y' دو ریشه‌ی ساده دارد. یعنی دو اکسترمم موضعی (نسبی) دارد.

۵۹۹– (۴) تابع $y = x|x^۲-۳|$ دارای سه ریشه‌ی $x=-\sqrt{۳}$ ، $x=\sqrt{۳}$ و $x=۰$ است. در بازه‌ی $-\sqrt{۳}<x<\sqrt{۳}$ مقدار $x^۲-۳$ منفی است. بنابراین نمودار تابع $y=x|x^۲-۳|$ ، همان نمودار تابع $y=x(x^۲-۳)$ است که در بازه‌ی $(-\sqrt{۳}\,,\sqrt{۳})$ نسبت به محور xها قرینه شده است. بنابراین ابتدا نمودار تابع $y=x(x^۲-۳)$ را رسم کرده و سپس در بازه‌ی $(-\sqrt{۳}\,,\sqrt{۳})$ ، نمودار را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. در تابع $y=x(x^۲-۳)$ ، با توجه به این‌که ضریب $x^۳$ مثبت است، نمودار از ربع سوم شروع شده و به ربع اول ختم می‌شود. با توجه به این‌که $\sqrt{۳}$ ، $-\sqrt{۳}$ و صفر سه ریشه‌ی این تابع هستند، نمودار آن به‌صورت زیر خواهد بود و داریم:



با توجه به نمودار، می‌توان گفت تابع $y=x|x^۲-۳|$ در ۴ نقطه‌ی مشخص شده دارای اکسترمم موضعی (نسبی) است.

ضابطه‌ی تابع $y=x|x^۲-۳|$ را ساده می‌کنیم و داریم:

$$f(x)=\begin{cases}x(x^۲-۳) & ; \quad |x|\ge\sqrt{۳}\\ x(۳-x^۲) & ; \quad |x|<\sqrt{۳}\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x^۳-۳x & ; \quad |x|\ge\sqrt{۳}\\ ۳x-x^۳ & ; \quad |x|<\sqrt{۳}\end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۳x^۲-۳ & ; \quad |x|>\sqrt{۳}\\ ۳-۳x^۲ & ; \quad |x|<\sqrt{۳}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳x^۲-۳=۰\Rightarrow x=\pm۱ & \text{غ ق ق}\\ ۳-۳x^۲=۰\Rightarrow x=\pm۱ & \text{ق ق}\end{cases}$$

$x=\pm۱$ ، ریشه‌های ساده‌ی $f'(x)$ هستند، بنابراین هر دو اکسترمم موضعی (نسبی) هستند و هم‌چنین با توجه به این‌که $f'_+(\sqrt{۳})=۶$ و $f'_-(\sqrt{۳})=-۶$ و $f'_-(-\sqrt{۳})=۶$ و $f'_+(-\sqrt{۳})=-۶$ است، لذا دو نقطه‌ی $x=\pm\sqrt{۳}$ نیز اکسترمم‌های موضعی (نسبی) تابع f هستند.

۶۰۰– (۴) **روش اول:**

$$f(x)=\cos^۲x-\cos x\Rightarrow f'(x)=-۲\cos x\sin x+\sin x=۰$$

$$\Rightarrow \sin x(۱-۲\cos x)=۰\Rightarrow\begin{cases}\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\Rightarrow x=\pi\ ,\ ۲\pi\\ ۱-۲\cos x=۰\Rightarrow \cos x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{۷\pi}{۳}\\ x=۲k\pi-\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{۵\pi}{۳}\end{cases}\end{cases}$$

x	$\frac{\pi}{۲}$		π		$\frac{۵\pi}{۳}$		۲π		$\frac{۷\pi}{۳}$		$\frac{۵\pi}{۲}$
f′		−	۰	+	۰	−	۰	+	۰	−	
f		↘	min	↗	max	↘	min	↗	max	↘	

روش دوم: از آزمون مشتق دوم استفاده می‌کنیم:

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=\pi\ ,\ ۲\pi+\frac{\pi}{۳}\ ,\ ۲\pi-\frac{\pi}{۳}\ ,\ ۲\pi$$

$$f''(x)=-۲\cos۲x+\cos x$$

$f''(\pi)=-۳<۰\Rightarrow$ $x=\pi$ طول max موضعی (نسبی)

$f''\left(۲\pi+\frac{\pi}{۳}\right)=\frac{۱}{۲}>۰\Rightarrow$ $x=۲\pi+\frac{\pi}{۳}$ طول min موضعی (نسبی)

$f''(۲\pi)=-۱<۰\Rightarrow$ $x=۲\pi$ طول max موضعی (نسبی)

$f''\left(۲\pi-\frac{\pi}{۳}\right)=\frac{۳}{۲}>۰\Rightarrow$ $x=۲\pi-\frac{\pi}{۳}$ طول min موضعی (نسبی)

۶۰۱– (۳) با مشتق‌گیری و تعیین نقاط بحرانی تابع و آزمون مشتق اول، نقاط اکسترمم موضعی (نسبی) تابع را در بازه‌ی داده شده پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\cos۲x-۲\cos x\Rightarrow f'(x)=-۲\sin۲x+۲\sin x=-۴\sin x\cos x+۲\sin x$$

$$\xrightarrow{f'(x)=۰} y'=۲\sin x(۱-۲\cos x)=۰\Rightarrow\begin{cases}\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\xrightarrow{x\in[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]}x=۰\\ ۱-۲\cos x=۰\Rightarrow\cos x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=-\frac{\pi}{۳}\ ,\ \frac{\pi}{۳}\end{cases}$$

x	$-\frac{\pi}{۲}$		$-\frac{\pi}{۳}$		۰		$\frac{\pi}{۳}$		$\frac{\pi}{۲}$
y′		−	۰	+	۰	−	۰	+	
y	−۱	↘	min	↗	max	↘	min	↗	−۱

$\Rightarrow$ تابع یک max موضعی (نسبی) و دو min موضعی (نسبی) دارد.

۶۰۲– (۱)

$$f(x)=\frac{\sin x}{۲+\cos x}\Rightarrow f'(x)=\frac{\cos x(۲+\cos x)-(-\sin x)(\sin x)}{(۲+\cos x)^۲}=۰\Rightarrow ۲\cos x+\cos^۲ x+\sin^۲ x=۰$$

$$\Rightarrow ۲\cos x+۱=۰\Rightarrow \cos x=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{۲\pi}{۳}$$

۶۰۳– (۳)

$$y=\frac{۳\sin x+۱}{۴\sin x+۱}\Rightarrow y'=\frac{۳\cos x(۴\sin x+۱)-(۴\cos x)(۳\sin x+۱)}{(۴\sin x+۱)^۲}\Rightarrow y'=\frac{-\cos x}{(۴\sin x+۱)^۲}=۰$$

$$\xrightarrow[\text{اکسترمم موضعی (نسبی)}]{\text{ریشه‌های مشتق طول نقاط}} y'=۰\Rightarrow \cos x=۰\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲},\ k\in\mathbb{Z}$$

چون تابع متناوب و دوره‌ی تناوب اصلی آن $T=۲\pi$ می‌باشد، لذا با تشکیل جدول تغییرات در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ مشخص می‌شود که $x=\frac{\pi}{۲}$ طول min موضعی (نسبی) تابع می‌باشد.

x	۰		$\frac{\pi}{۲}$		$\frac{۳\pi}{۲}$		۲π
y'		−	۰	+	۰	−	
y		↘	min	↗	max	↘	

۶۰۴– (۱) ابتدا نقاط بحرانی تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$y=\tan x+\cot x\Rightarrow y'=۱+\tan^۲ x-۱-\cot^۲ x\Rightarrow y'=\tan^۲ x-\cot^۲ x\xrightarrow{y'=۰}\tan^۲ x=\cot^۲ x\Rightarrow \tan^۴ x=۱\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\tan x=۱\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} x=\frac{\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴}\\ \tan x=-۱\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۴}\xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} x=\frac{۳\pi}{۴}\end{cases}$$

حال با استفاده از آزمون مشتق دوم داریم:

$$y''=۲\tan x(۱+\tan^۲ x)+۲\cot x(۱+\cot^۲ x)$$

$\xrightarrow{x=k\pi+\frac{\pi}{۴}} y''(k\pi+\frac{\pi}{۴})=۸>۰\Rightarrow$ نقاط با طول‌های $x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$، می‌نیمم نسبی منحنی هستند.

$\xrightarrow{x=k\pi-\frac{\pi}{۴}} y''(k\pi-\frac{\pi}{۴})=-۸<۰\Rightarrow$ نقاط با طول‌های $x=k\pi-\frac{\pi}{۴}$، ماکزیمم نسبی منحنی هستند.

در نتیجه تابع داده شده در نقاط با طول‌های $x=\frac{\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴}$ دارای می‌نیمم موضعی (نسبی) و در نقطه به طول $x=\frac{۳\pi}{۴}$، دارای ماکزیمم موضعی (نسبی) است.

۶۰۵– (۳)

$$f(x)=x^۲e^{-x^۲}\Rightarrow f'(x)=۲xe^{-x^۲}+x^۲(-۲xe^{-x^۲})\Rightarrow f'(x)=۲x(۱-x^۲)e^{-x^۲}\xrightarrow[e^{-x^۲}\neq ۰]{f'(x)=۰}۲x(۱-x^۲)=۰$$

$$\Rightarrow x=-۱,۰,۱\xrightarrow{e^{-x^۲}>۰}$$

x		−۱		۰		۱	
f'	+	۰	−	۰	+	۰	−
y	↗	max	↘	min	↗	max	↘

بنابراین، تابع دارای دو نقطه‌ی ماکزیمم موضعی (نسبی) در طول‌های $x=-۱$ و $x=۱$ و یک نقطه‌ی می‌نیمم موضعی (نسبی) در طول $x=۰$ می‌باشد.

درسنامه **اکسترمم‌های سراسری (مطلق):**

ماکزیمم سراسری (مطلق): نقطه‌ی $(x_۰\,,f(x_۰))$ را نقطه‌ی ماکزیمم سراسری (مطلق) تابع f گوییم، هرگاه به‌ازای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $f(x_۰)\geq f(x)$.

می‌نیمم سراسری (مطلق): نقطه‌ی $(x_۰\,,f(x_۰))$ را نقطه‌ی می‌نیمم سراسری (مطلق) تابع f گوییم، هرگاه به‌ازای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $f(x_۰)\leq f(x)$.

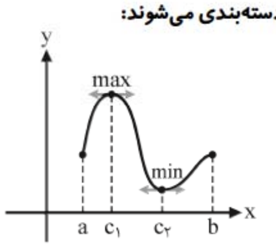
قضیه‌ی نقطه‌ی بحرانی: اگر تابع f روی بازه‌ی I تعریف شده و c نقطه‌ی درونی این بازه باشد و $f(c)$ مقدار اکسترمم سراسری (مطلق) تابع f باشد، آن‌گاه c قطعاً نقطه‌ی بحرانی تابع است. یعنی c یکی از دو مورد زیر خواهد بود:

الف) c یک نقطه‌ی درونی بازه‌ی I است به طوری که $f'(c) = 0$ (اکسترمم سراسری مشتق‌پذیر).

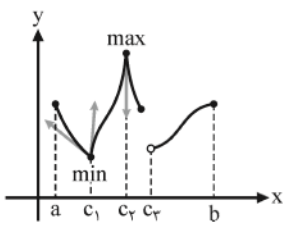
ب) c یک نقطه‌ی درونی بازه‌ی f است و $f'(c)$ موجود نیست (اکسترمم سراسری مشتق‌ناپذیر).

نکته **اکسترمم‌های سراسری (مطلق) تابع f، در بازه‌ی $[a,b]$ با توجه به قضیه‌ی فوق، در حالت‌های زیر دسته‌بندی می‌شوند:**

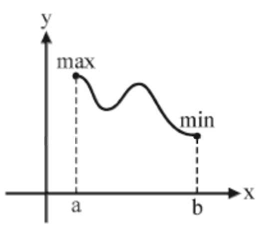
دسته‌ی اول: اکسترمم‌های سراسری (مطلق) در نقاط درون‌بازه و مشتق‌پذیر: یعنی اکسترمم سراسری که نقطه‌ی درونی تابع باشد و مقدار مشتق در آن صفر باشد.



دسته‌ی دوم: اکسترمم‌های سراسری (مطلق) در نقاط درون‌بازه ولی مشتق‌ناپذیر: یعنی اکسترمم مطلقی که نقطه‌ی درونی تابع باشد ولی مشتق در آن نقطه موجود نباشد. (مانند نقاط بازگشتی، گوشه یا ناپیوستگی).
به عنوان مثال، در شکل مقابل نقطه به طول c_1، می‌نیمم مطلق مشتق‌ناپذیر (از نوع گوشه) و نقطه به طول c_2، ماکزیمم مطلق مشتق‌ناپذیر (از نوع بازگشتی) می باشند.

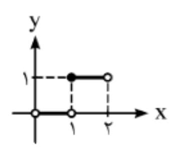


دسته‌ی سوم: اکسترمم‌های سراسری (مطلق) در نقاط انتهایی بازه.

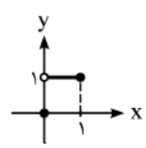


۶۰۶– (۴) گزینه‌ی (۴) به‌دلیل آن‌که مطابق با قضیه‌ی کتاب درسی می‌باشد، پاسخ صحیح تست است.

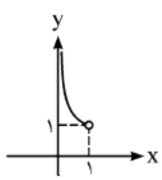
بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) 

$y = [x]\ ;\ x \in (0, 2)$

۲) 

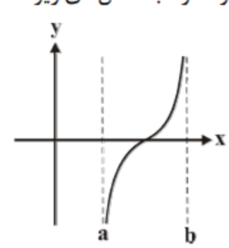
$y = \mathrm{sgn}(x)\ ;\ x \in [0, 1]$

۳) 

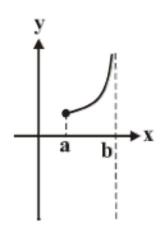
$y = \frac{1}{x}\ ;\ x \in (0, 1)$

۶۰۷– (۴) هر یک از گزینه‌های نادرست را می‌توان با یک مثال نقض حذف نمود.

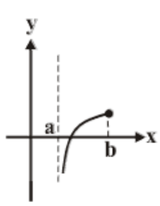
در گزینه‌ی (۱) چون قید نکرده بازه‌ی بسته، لذا ممکن است بازه باز یا نیم‌باز (از یک طرف باز) باشد، در این صورت امکان این‌که کران‌دار نباشد وجود دارد. به شکل‌های زیر دقت کنید:



۳) تابع بر بازه‌ی (a , b) پیوسته ولی بی‌کران است.



۲) تابع بر بازه‌ی $[a , b)$ پیوسته ولی بی‌کران است.



۱) تابع بر بازه‌ی $(a , b]$ پیوسته ولی بی‌کران است.