مهروماه

ریاضی ۱

کامل‌ترین مرجع آموزش و تمرین ریاضی سال اول دبیرستان

هانی احمدزاده - اکرم فضیلی

بنام پروردگار مهربان

ریاضی ۱

هانی احمدزاده
اکرم فضلی

آموزش کامل منطبق بر کتاب درسی / آموزش کاملاً مفهومی ریاضیات با تکیه بر حل مثال‌های متنوع / پرهیز از فرمول‌محوری در آموزش ریاضیات / آموزش مطالب از صفر تا صد و پرهیز از خلاصه‌گویی/ آموزش ریاضیات بر مبنای ایجاد خلاقیت، علاقه و اعتماد به نفس در دانش‌آموز / آموزش در قالب کلاس درسی شبیه‌سازی شده به زبان ساده و محاوره‌ای/ ارائه‌ی مطالب کلیدی و اساسی در قالب آموزه‌ها/ معرفی اشتباهات رایج دانش‌آموزان در فراگیری ریاضیات/ ارائه‌ی تمرین‌های کامل، کافی و متنوع در پایان هر جلسه به همراه حل کاملاً تشریحی/ ارائه‌ی یک آزمون تستی در انتهای هر جلسه

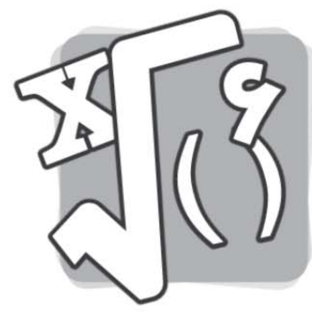
مهر و ماه

فهرست

فصل سوم

۳

توان



برای یه دانش آموز دبیرستانی خیلی مهمه که بتونه عبارات رادیکالی و توان‌دار رو محاسبه یا ساده کنه. تو این فصل، علاوه بر مرور قواعد مربوط به توان که تو دوران راهنمایی باهاش آشنا شدین، با مفهوم رادیکال یک عدد هم آشنا می‌شید. با مطالعه‌ی دقیق این فصل، علاوه بر به دست آوردن ۳/۵ نمره از امتحان نوبت اول و ۱ نمره از امتحان نوبت دوم، از این به بعد می‌تونید هر عبارت رادیکالی و توان‌داری که بهتون دادن رو به ساده‌ترین شکل ممکن بنویسید. تسلط روی این فصل برای یادگیری فصل‌های ۴ و ۷ حیاتیه.

توان‌های صحیح

جلسه‌ی هشتم

- ☐ توان صحیح
- ☐ روابط بین اعداد توان‌دار
  - ☐ روابط حاصل‌ضربی
  - ☐ روابط تقسیمی
- ☐ نماد علمی

۷

۱۰

توان صحیح

محمود بعد از مدتی کارکردن، توانسته است مبلغ یک میلیون تومان، پس‌انداز کند. او برای اینکه سرمایه‌اش را بیشتر کند، این مبلغ را در شرکتی سرمایه‌گذاری می‌کند. این شرکت متعهد شده است که بعد از هر ماه، سرمایه‌اش را ۱/۵ برابر کند. یعنی:

سرمایه‌ی محمود بعد از ۱ ماه $= \underbrace{۱/۵}_{۱\ \text{بار}} \times ۱$ میلیون

سرمایه‌ی محمود بعد از ۲ ماه $= ۱/۵ \times$ (سرمایه بعد از یک ماه)
$= ۱/۵ \times (۱/۵ \times ۱)$ میلیون
$= \underbrace{۱/۵ \times ۱/۵}_{۲\ \text{بار}} \times ۱$ میلیون

سرمایه‌ی محمود بعد از ۳ ماه $= ۱/۵ \times$ (سرمایه بعد از ۲ماه)
$= ۱/۵ \times (۱/۵ \times ۱/۵ \times ۱)$ میلیون
$= \underbrace{۱/۵ \times ۱/۵ \times ۱/۵}_{۳\ \text{بار}} \times ۱$ میلیون

اگر با همین روند پیش برویم، سرمایه‌ی محمود بعد از یک سال می‌شود:

سرمایه‌ی محمود بعد از ۱۲ ماه $= ۱/۵ \times$ (سرمایه بعد از ۱۱ ماه)
$= ۱/۵ \times (\underbrace{۱/۵ \times ۱/۵ \times \dots \times ۱/۵}_{۱۱\ \text{بار}} \times ۱)$ میلیون
$= \underbrace{۱/۵ \times ۱/۵ \times ۱/۵ \times \dots \times ۱/۵}_{۱۲\ \text{بار}} \times ۱$ میلیون

اگر می‌خواستم سرمایه‌ی محمود را بعد از دو سال حساب کنم، باید ۲۴ تا ۱/۵ را در هم ضرب می‌کردم (اوووو ... چقدر زیاد!!!)
برای اینکه از شرّ این همه (×) خلاص بشم، بهتره که از توان استفاده کنم، یعنی:

سرمایه‌ی محمود بعد از ۱۲ ماه $= \underbrace{۱/۵ \times \dots \times ۱/۵}_{۱۲\ \text{بار}} \times ۱ = (۱/۵)^{۱۲} \times ۱$ میلیون

سرمایه‌ی محمود بعد از ۲۴ ماه $= \underbrace{۱/۵ \times \dots \times ۱/۵}_{۲۴\ \text{بار}} \times ۱ = (۱/۵)^{۲۴} \times ۱$ میلیون

دیدین که توان چقدر رابطه رو کوچیک و قشنگ کرد، البته چیز جدیدی نیست، تو راهنمایی هم، باهاش آشنا شدین.

آموزه ۱

اگر $a \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}$، آن‌گاه: $a^n = \underbrace{a \times \dots \times a}_{n\ \text{بار}}$. که a را پایه و n را توان می‌نامیم.

آموزه ۲

قرارداد: برای $a \in \mathbb{R} - \{۰\}$ داریم:

۲) $a^{-۱} = \frac{۱}{a}$ ۱) $a^{۰} = ۱$

مثال ۱ **حاصل عبارات زیر را حساب کنید:**

الف) $۲^۳ + ۳^۲ - ۲^۰$

ب) $(۳^{-۱} \times ۶^۲)^{-۱} \times ۳^۲ \times ۲^۳$

پاسخ الف) ابتدا اعداد را به توان می‌رسانیم و بعد عملیات جمع و تفریق را انجام می‌دهیم.

$$\left.\begin{array}{l} 2^3 = 2\times 2\times 2 = 8 \\ 3^2 = 3\times 3 = 9 \\ 2^0 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2^3 + 3^2 - 2^0 = 8 + 9 - 1 = 16$$

ب) ابتدا عبارت داخل پرانتز را حساب می‌کنیم:

$$3^{-1}\times 6^2 = \frac{1}{3}\times 6\times 6 = \frac{1}{3}\times 36 = \frac{36}{3} = 12$$

به این ترتیب داریم:

$$(3^{-1}\times 6^2)^{-1}\times 3^2\times 2^3 = (12)^{-1}\times 3^2\times 2^3 = \frac{1}{12}\times 9\times 8 = \frac{72}{12} = 6$$

روابط بین اعداد توان‌دار

روابط حاصل‌ضربی

از دوره راهنمایی یادمان هست، وقتی می‌خواستیم دو عدد مثل $2^3, 2^2$ را (که پایه‌هاشون یکیه) درهم ضرب کنیم، یکی از پایه‌ها را می‌نوشتیم و توان‌هایشان را با هم جمع می‌کردیم، چون:

$$2^2\times 2^3 = (2\times 2)\times(2\times 2\times 2) = 2\times 2\times 2\times 2\times 2 = 2^5 = 2^{2+3}$$

آموزه ۳

اگر $a\in\mathbb{R}$ و $m,n\in\mathbb{N}$ آن‌گاه:

$$a^m\times a^n = a^{m+n}$$

و برای محاسبه‌ی حاصل‌ضرب دو عدد 2^2 و 3^2 (که توانهاشون یکیه)، پایه‌ها را در هم ضرب می‌کردیم و توان حاصل‌ضرب، همان توان مشترکشان می‌شد.

چون:

$$2^2\times 3^2 = (2\times 2)\times(3\times 3) = (2\times 3)\times(2\times 3) = (2\times 3)^2 = 6^2$$

آموزه ۴

برای $a,b\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{N}$ داریم:

$$a^n\times b^n = (a\times b)^n$$

مثال ۲ **عبارات زیر را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.**

الف) $2^4\times 3^4\times 6^5$

ب) $(\frac{1}{2})^3\times 2^{-1}\times 12^4$

ج) $2\times 2^3 + \frac{1}{2}\times 2^5 + (2^2)^2 + 2^4$

د) $(1/5)^3\times(\frac{2}{3})^{-1}\times(1\frac{1}{2})^2$

پاسخ الف)

$$2^4\times 3^4\times 6^5 = (2\times 3)^4\times 6^5 = 6^4\times 6^5 = 6^{4+5} = 6^9$$

ب)

$$(\frac{1}{2})^3\times 2^{-1}\times 12^4 = (\frac{1}{2})^3\times\frac{1}{2}\times 12^4 = (\frac{1}{2})^{3+1}\times 12^4 = (\frac{1}{2})^4\times 12^4 = (\frac{1}{2}\times 12)^4 = 6^4$$

ج)

$$2\times 2^3 + \frac{1}{2}\times 2^5 + (2^2)^2 + 2^4 = 2^{1+3} + \frac{1}{2}\times 2\times 2^4 + 2^2\times 2^2 + 2^4 = 2^4 + 1\times 2^4 + 2^{2+2} + 2^4 = 2^4 + 2^4 + 2^4 + 2^4 = 4\times 2^4$$

$$= 2^2\times 2^4 = 2^{2+4} = 2^6$$

د)

$$(1/5)^3\times(\frac{2}{3})^{-1}\times(1\frac{1}{2})^2 = (1/5)^3\times\left(\dfrac{\frac{1}{1}}{\frac{2}{3}}\right)\times(\frac{3}{2})^2 = (\frac{3}{2})^3\times(\frac{3}{2})\times(\frac{3}{2})^2 = (\frac{3}{2})^{3+1+2} = (\frac{3}{2})^6$$

همون‌طور که تو قسمت «ج» مثال ۲ دیدیم، ممکنه که یه عبارت توان‌دار، دوباره به توان برسه. مثلاً تو عبارت $(5^2)^3$ داریم:

$$(5^2)^3 = 5^2\times 5^2\times 5^2 = 5^{2+2+2} = 5^{3\times 2}$$

به‌طور کلی خواهیم داشت:

آموزه ۵

اشتباه نکنید **حواستون باشه که در حالت کلی a^{m^n} با $(a^m)^n$ یکسان نیست:**

$$a^{m^n} \neq (a^m)^n$$

حالا با استفاده از رابطه $\frac{1}{a} = a^{-1}$، می‌ریم که با عددهای با توان منفی هم آشنا بشیم.

برای پیدا کردن جواب سؤال باید معادله‌ی درجه ۲یِ $6x^2+x-1=0$ را حل کنیم $(a=6\,,\,b=1\,,\,c=-1)$:

$$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=1-4\times6\times(-1)\Rightarrow \Delta=25$$

$$\Rightarrow x_1=\frac{-1+\sqrt{25}}{2\times6}\Rightarrow x_1=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}\Rightarrow \boxed{x_1=\frac{1}{3}}$$

$$x_2=\frac{-1-\sqrt{25}}{2\times6}\Rightarrow x_2=\frac{-6}{12}\Rightarrow \boxed{x_2=\frac{-1}{2}}$$

هر چی روش برای حل معادله‌ی درجه‌ی ۲ بود، تو این سه جلسه گفتم. دیگه هر معادله‌ی درجه‌ی دومی رو که بذارن جلوتون می‌تونین حل کنین. 🙂 با تموم شدن این جلسه، این فصل هم تموم شد.

و فقط یه فصل دیگه از درسمون مونده که تو جلسه‌ی بعدی، اونم تموم می‌شه 🙂 با این تمرینایی که الآن حل می‌کنید، نکات مهمی که کلاً از اول کتاب تا الآن خوندید رو دوره می‌کنید.

پس خیلی مهمن! 🙂

تمرینات

جلسه‌ی بیست و پنجم

۱ معادلات زیر را به کمک روش مربع کامل‌کردن، حل کنید:

الف) $x^2+3x-4=0$ ب) $2x^2+6x-3=0$ ج) $-3x^2-5x+6=0$ د) $2x^2+x+1=0$

۲ معادلات زیر را به کمک روش Δ حل کنید.

الف) $x^2+2x-4=0$ ب) $x^2+8x+15=0$ ج) $x^2+x-6=0$ د) $x^2+3x+2=0$

۳ حاصل‌ضرب دو عدد متوالی برابر ۱۳۲ می‌باشد. در صورتی‌که بدانیم دو عدد منفی هستند، مجموع دو عدد را بیابید.

۴ مقدار m را چنان تعیین کنید که معادله‌ی $(2m-1)x^2+mx-1=0$ دارای ریشه‌ی مضاعف باشد.

۵ دو عدد را چنان بیابید که مجموع آن‌ها برابر ۳- و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۲- باشد.

۶ حاصل $\sqrt{3-\sqrt{3-\sqrt{3-\sqrt{3-\dots}}}}$ را بیابید.

۷ حاصل $2+\cfrac{3}{2+\cfrac{3}{2+\cfrac{3}{\vdots}}}$ را بیابید.

۸ فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}t\\3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1\\t+1\end{bmatrix}$ برابر ۳ می‌باشد، در صورتی‌که بدانیم A و B هر دو در ربع اول قرار دارند، مقدار t را بیابید.

۹ مساحت یک مستطیل برابر ۱۳ و محیط آن برابر ۲۰ است. طول اضلاع مستطیل را بیابید.

۱۰ نشان دهید، $x=-1$ تنها ریشه‌ی معادله‌ی $x^3-x^2+x+3=0$ می‌باشد.

۱۱ جواب معادلات زیر را به دست آورید:

الف) $x+2=\sqrt{2x^2+3}$ ب) $\frac{x-1}{3x+1}=\frac{x+2}{2x-3}$

ج) $x^6+3x^3-5=0$ د) $2x^3+3x-5=0$

هـ) $|x^2-5x+6|+|3x^2-7x+2|=0$ و) $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^3-2x-1}=0$

۱۲ مجموع یک عدد با وارونش برابر (۳-) می‌باشد، این عدد را بیابید.

۱۳ معادلات زیرا را با اختیار یک متغیر کمکی حل کنید.

الف) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$ ب) $3\left(x^2-x+1\right)-\frac{2}{x^2-x+1}+1=0$

ج) $\frac{2x^2+2x+1}{x^2+x-1}=\frac{3x^2+3x-1}{2x^2+2x-3}$

۱۴ θ یک زاویه‌ی حاده می‌باشد و داریم $\sin\theta+\frac{1}{\sin\theta}=\frac{10}{3}$، $\tan\theta$ را بیابید.

۱۵ در صورتی‌که $\tan\theta$ و $\cot\theta$ جواب‌های معادله‌ی $12x^2-25x+c=0$ باشند و در صورتی‌که θ یک زاویه‌ی حاده باشد، حاصل $\sin\theta+\cos\theta$ را بیابید.

۱۶ جواب‌های دستگاه $\begin{cases} x^2+x+y^2-2y=4 \\ 2x^2+2x-3y^2+6y=-7 \end{cases}$ را بیابید.

آزمونک

جلسه‌ی بیست و پنجم

۱ معادله‌ی $x^2-2mx+6-m=0$ به ازای کدام یک از مقادیر m دارای دو ریشه‌ی مساوی است؟ (سراسری انسانی)

۱) -2 و 3 ۲) 2 و -3 ۳) -1 و $\frac{3}{2}$ ۴) 1 و $\frac{-3}{2}$

۲ کدام یک از مقادیر زیر، ریشه‌ی معادله‌ی $150x^2-2x-148=0$ است؟

۱) $\frac{-2}{150}$ ۲) $\frac{-148}{150}$ ۳) $\frac{2}{150}$ ۴) $\frac{148}{150}$

۳ اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^2-(4a+4)x+(3a^2+6a+3)=0$ برابر ۲ باشد، ریشه‌ی دیگر کدام است؟ (سراسری انسانی)

۱) -6 ۲) -3 ۳) 1 ۴) 6

۴ اگر α یک ریشه‌ی معادله‌ی $x^2-4x+1=0$ باشد، حاصل $\frac{(\alpha-2)^2}{\alpha(\alpha-4)}$ کدام است؟

۱) -3 ۲) -4 ۳) 4 ۴) 3

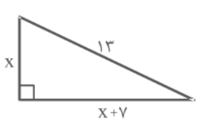
۵ اگر عبارت $5x^2+mx+10$ به صورت توان دوم مجموع دو جمله باشد، m کدام است؟ (سراسری انسانی)

۱) $2\sqrt{10}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $10\sqrt{2}$ ۴) $5\sqrt{2}$

۶ ۴ برابر مربع عددی از ۱۲ برابر آن عدد ۹ واحد کمتر است. معکوس آن عدد کدام است؟ (سراسری انسانی)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{6}$

۷ در شکل مقابل محیط مثلث کدام است؟



۱) ۲۹ ۲) ۳۰
۳) ۲۸ ۴) ۲۷

۸ اگر $a>0$ و معادله‌ی $x^2+2x+a=0$ و $x^2-x-2a=0$ دارای یک ریشه‌ی مشترک باشند، آنگاه این ریشه‌ی مشترک کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۹ مجموع مربعات دو عدد صحیح متوالی ۹۲۵ است. مجموع این دو عدد کدام است؟ (سراسری انسانی)

۱) ۴۱ ۲) ۴۳ ۳) ۴۵ ۴) ۴۷

۱۰ حاصل‌ضرب یک عدد مثبت در خودش از سه برابر آن عدد، ۴۰ واحد بیشتر است. آن عدد کدام است؟ (سراسری تجربی)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ تمرینات

جلسه‌ی بیست و پنجم

۱ الف)

$$x^2+3x-4=0$$

$$\Rightarrow x^2+3x+(\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2-4=0$$

$$\Rightarrow (x+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}-4=0 \Rightarrow (x+\frac{3}{2})^2=\frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow \left|x+\frac{3}{2}\right|=\frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x+\frac{3}{2}=\frac{5}{2} \\ x+\frac{3}{2}=-\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=1} \\ \boxed{x=-4} \end{cases}$$

ب)

$$2x^2+6x-3=0 \Rightarrow x^2+3x-\frac{3}{2}=0$$

$$\Rightarrow x^2+3x+(\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2-\frac{3}{2}=0$$

$$\Rightarrow (x+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}-\frac{3}{2}=0$$

$$\Rightarrow (x+\frac{3}{2})^2=\frac{15}{4} \Rightarrow \left|x+\frac{3}{2}\right|=\frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+\frac{3}{2}=-\frac{\sqrt{15}}{2} \\ x+\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{15}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=\frac{-\sqrt{15}-3}{2}} \\ \boxed{x=\frac{\sqrt{15}-3}{2}} \end{cases}$$

ج) $-3x^2-5x+6=0$

$$\Rightarrow -3(x^2+\frac{5}{3}x-2)=0 \Rightarrow x^2+\frac{5}{3}x-2=0$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{5}{3}x+(\frac{5}{6})^2-(\frac{5}{6})^2-2=0$$

$$\Rightarrow (x+\frac{5}{6})^2-\frac{25}{36}-2=0 \Rightarrow (x+\frac{5}{6})^2=\frac{97}{36}$$

$$\Rightarrow \left|x+\frac{5}{6}\right|=\frac{\sqrt{97}}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+\frac{5}{6}=\frac{\sqrt{97}}{6} \\ x+\frac{5}{6}=-\frac{\sqrt{97}}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-5+\sqrt{97}}{6} \\ x=\frac{-5-\sqrt{97}}{6} \end{cases}$$

د) $2x^2+x+1=0 \Rightarrow 2(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})=0$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow x^2+\frac{1}{2}x+(\frac{1}{4})^2-(\frac{1}{4})^2+\frac{1}{2}=0$$

$$\Rightarrow (x+\frac{1}{4})^2-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow (x+\frac{1}{4})^2=-\frac{1}{16}$$

باتوجه به اینکه $(x+\frac{1}{2})^2$ عددی است همواره مثبت و تساوی به دست آمده منفی است، می‌توان نتیجه گرفت که معادله فاقد جواب است.

۲ الف) $x^2+2x-4=0 \Rightarrow \Delta=(2)^2-4\times(1)\times(-4)$

$$\Rightarrow \Delta=20$$

$$\Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{20}}{2} \Rightarrow \boxed{x=-1\pm\sqrt{5}}$$

ب) $x^2+8x+15=0 \Rightarrow \Delta=8^2-4\times15 \Rightarrow \Delta=4$

$$\Rightarrow x=\frac{-8\pm\sqrt{4}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=-5} \\ \boxed{x=-3} \end{cases}$$

ج) $x^2+x-6=0 \Rightarrow \Delta=1^2-4\times(-6) \Rightarrow \Delta=25$

$$\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=-3} \\ \boxed{x=2} \end{cases}$$

د) $x^2+3x+2=0 \Rightarrow \Delta=3^2-4\times2 \Rightarrow \Delta=1$

$$\Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{1}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=-2} \\ \boxed{x=-1} \end{cases}$$

۳ دو عدد متوالی را به صورت x و $x+1$ در نظر می‌گیریم:

$$x(x+1)=132 \Rightarrow x^2+x=132 \Rightarrow$$

$$x^2+x-132=0 \Rightarrow \Delta=1+528 \Rightarrow \Delta=529$$

$$\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{529}}{2} \Rightarrow x=\frac{-1\pm23}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=11 & \text{غ ق ق} \\ x=-12 & \text{ق ق} \end{cases}$$

چون دو عدد منفی هستند، پس مطلوب مسأله دو عدد ۱۱- و ۱۲- می‌باشد: ۳۳- = مجموع دو عدد

۴ برای اینکه ریشه‌ی مضاعف داشته باشیم، باید $\Delta=0$ باشد:

$$\Delta=0 \Rightarrow m^2-4(2m-1)(-1)=0 \Rightarrow$$

$$m^2+8m-4=0$$

به این ترتیب باید معادله‌ی $m^2+8m-4=0$ را حل کنیم:

$$m^2+8m-4=0 \Rightarrow \Delta'=64+16=80$$

$$\Rightarrow m=\frac{-8\pm\sqrt{80}}{2} \Rightarrow \boxed{m=-4\pm2\sqrt{5}}$$

۵ α و β را چنان در نظر گیریم که $S=\alpha+\beta=-3$ و $P=\alpha\beta=-2$. به این ترتیب، α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2-Sx+P=0$ می‌باشند.

$$x^2+3x-2=0 \Rightarrow \Delta=3^2-4\times(-2) \Rightarrow$$

$$\Delta=17 \Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$$

به این ترتیب:

$$\boxed{\beta=\frac{-3-\sqrt{17}}{2}} \ , \ \boxed{\alpha=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}}$$

۶

$$x=\sqrt{3-\sqrt{3-\sqrt{3-\sqrt{3-\dots}}}}$$

$$\Rightarrow x^2=3-\sqrt{3-\sqrt{3-\sqrt{3-\dots}}}$$

$$\Rightarrow x^2=3-x \Rightarrow x^2+x-3=0$$

$$\Rightarrow \Delta=1-4\times(-3) \Rightarrow \Delta=13$$

$$\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2} \xrightarrow{x>0} \boxed{x=\frac{\sqrt{13}-1}{2}}$$

۷

$$x=2+\cfrac{3}{2+\cfrac{3}{2+\cfrac{3}{\vdots}}}$$

$$\Rightarrow x=2+\frac{3}{x} \xrightarrow{x\neq0} x^2=2x+3$$

$$\Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow \Delta=4-4\times(-3)$$

$$\Rightarrow \Delta=16 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-1 \end{cases} \xrightarrow{x>0} \boxed{x=3}$$

۸ باتوجه به اینکه A و B هر دو در ربع اول قرار دارند، پس:

$$\begin{cases} t\geq ۰ \\ , \\ t+۱\geq ۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t\geq ۰ \\ t\geq -۱\end{cases} \xrightarrow{\cap} t\geq ۰ \qquad (۱)$$

به علاوه:

$$|AB|=\sqrt{(t-۱)^۲+(t-۲)^۲}$$

$$\Rightarrow ۳=\sqrt{t^۲-۲t+۱+t^۲-۴t+۴}$$

$$\Rightarrow ۲t^۲-۶t+۵=۹ \Rightarrow ۲t^۲-۶t-۴=۰$$

$$\Rightarrow \Delta=(-۶)^۲-۴\times۲\times(-۴)\Rightarrow\Delta=۶۸$$

$$\Rightarrow t=\frac{۶\pm\sqrt{۶۸}}{۴}\Rightarrow t=\frac{۶\pm۲\sqrt{۱۷}}{۴}$$

$$\Rightarrow t=\frac{۳\pm۲\sqrt{۱۷}}{۲}\xrightarrow{(۱)}\boxed{t=\frac{۳+۲\sqrt{۱۷}}{۲}}$$

۹ اگر x و y را طول و عرض مستطیل در نظر گیریم، داریم:

$$\begin{cases} ۲(x+y)=۲۰ \\ xy=۱۳\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+y=۱۰ \\ xy=۱۳\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=۱۰-x \\ xy=۱۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow x(۱۰-x)=۱۳$$

$$\Rightarrow x^۲-۱۰x+۱۳=۰ \Rightarrow \Delta=۱۰۰-۴\times(۱۳)\Rightarrow \Delta=۴۸$$

$$\Rightarrow x=\frac{۱۰\pm\sqrt{۴۸}}{۲}\Rightarrow x=\frac{۱۰\pm۴\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow \boxed{x=۵\pm۲\sqrt{۳}}$$

به این ترتیب $\boxed{x=۵+۲\sqrt{۳}}$ و $\boxed{y=۵-۲\sqrt{۳}}$ (یا بالعکس)

۱۰ با جایگذاری $x=-۱$ در معادله داریم:

$$(-۱)^۳-(-۱)^۲-۱+۳=-۱-۱-۱+۳=۰$$

در نتیجه $x=-۱$ ریشه‌ی معادله‌ی $x^۳-x^۲+۳=۰$ می‌باشد

پس $x^۳-x^۲+x+۳$ بر $x+۱$ بخش‌پذیر است:

$$\begin{array}{l|l} x^۳-x^۲+x+۳ & x+۱ \\ \cline{2-2} & x^۲-۲x+۳ \\ -(x^۳+x^۲) & \\ \hline -۲x^۲+x+۳ & \\ -(-۲x^۲-۲x) & \\ \hline ۳x+۳ & \\ -(۳x+۳) & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

$$\Rightarrow x^۳-x^۲+x+۳=(x+۱)(x^۲-۲x+۳)$$

$$\Rightarrow (x+۱)(x^۲-۲x+۳)=۰ \xrightarrow{x\neq -۱} x^۲-۲x+۳=۰$$

$$\Rightarrow \Delta=(-۲)^۲-۴\times۳\Rightarrow\Delta=-۸<۰$$

پس $x=-۱$ تنها جواب معادله‌ی مذکور می‌باشد.

۱۱ الف)

$$x+۲=\sqrt{۲x^۲+۳}$$

$$\Rightarrow (x+۲)^۲=۲x^۲+۳\Rightarrow x^۲+۴x+۴=۲x^۲+۳$$

$$\Rightarrow x^۲-۴x-۱=۰\Rightarrow\Delta=(-۴)^۲-۴(-۱)\Rightarrow\Delta=۲۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{۴\pm\sqrt{۲۰}}{۲}\Rightarrow\boxed{x=۲\pm\sqrt{۵}}$$

توجه داریم که باتوجه به معادله‌ی $x+۲=\sqrt{۲x^۲+۳}$. $x+۲$ عددی مثبت است، پس: $x+۲\geq ۰\Rightarrow x\geq -۲$

باتوجه به اینکه $۲+\sqrt{۵}\geq -۲$ و هم $۲-\sqrt{۵}\geq -۲$ پس هر دو جواب معادله هستند: $\boxed{x=۲\pm\sqrt{۵}}$

ب)

$$\frac{x-۱}{۳x+۱}=\frac{x+۲}{۲x-۳}$$

$$\Rightarrow (x-۱)(۲x-۳)=(x+۲)(۳x+۱)$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-۵x+۳=۳x^۲+۷x+۲$$

$$\Rightarrow x^۲+۱۲x-۱=۰\Rightarrow\Delta=۱۴۴+۴=۱۴۸$$

$$\boxed{x=\frac{-۱۲\pm\sqrt{۱۴۸}}{۲}}$$

ج) با درنظر گرفتن $y=x^۳$ داریم:

$$x^۶+۳x^۳-۵=۰\Rightarrow y^۲+۳y-۵=۰$$

$$\Rightarrow\Delta=۹+۲۰\Rightarrow\Delta=۲۹$$

$$\Rightarrow y=\frac{-۳\pm\sqrt{۲۹}}{۲}\Rightarrow x^۳=\frac{-۳\pm\sqrt{۲۹}}{۲}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[۳]{\frac{-۳\pm\sqrt{۲۹}}{۲}}$$

د)

$$۲x^۳+۳x-۵=۰$$

با جایگذاری $x=۱$ در معادله، متوجه می‌شویم که $x=۱$ یک جواب معادله است و به علاوه $۲x^۳+۳x-۵$ بر x-۱ بخش‌پذیر می‌باشد، لذا:

$$\begin{array}{l|l} ۲x^۳+۳x-۵ & x-۱ \\ \cline{2-2} & ۲x^۲+۲x+۵ \\ -(۲x^۳-۲x^۲) & \\ \hline ۲x^۲+۳x-۵ & \\ -(۲x^۲-۲x) & \\ \hline ۵x-۵ & \\ -(۵x-۵) & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

ریاضی ۱

ویژگی‌های کتاب

- آموزش کامل منطبق بر کتاب درسی
- آموزش مفهومی ریاضیات با تکیه بر حل مثال‌های متنوع
- پرهیز از فرمول محوری در آموزش ریاضیات
- آموزش مطالب از صفر تا صد و پرهیز از خلاصه گویی
- آموزش ریاضیات بر مبنای ایجاد خلاقیت، علاقه و اعتماد به نفس در دانش‌آموز
- آموزش در قالب کلاس درسی شبیه سازی شده به زبان ساده و محاوره‌ای
- ارائه‌ی مطالب کلیدی و اساسی در قالب آموزه‌ها
- معرفی اشتباهات رایج دانش آموزان در فراگیری ریاضیات
- ارائه‌ی تمرین‌های کامل، کافی و متنوع در پایان هر جلسه به همراه حل کاملا تشریحی
- ارائه‌ی یک آزمون تستی در انتهای هر جلسه

انتشارات مهروماه
۶۶۴۰۸۴۰۰۰-۳
www.mehromah.ir
پیامک: ۳۰۰۰۰۷۲۱۲۰