فهرست مطالب

فصل ۲: احتمال

iQ NEWS

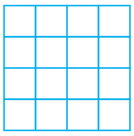
رسیدیم به فصل ۱ کتاب ریاضی سال سوم و ریاضی عمومی، یعنی احتمال. توی ژنتیک هم حضور این فصل رو می‌بینید. معمولاً دو یا سه تست کنکور رو به خودش اختصاص می‌ده. توصیه می‌کنیم برای این‌که بتونید به خوبی مسأله‌هاشو حل کنین به فصل قبل (یعنی ترکیبیات) تسلط کافی داشته باشین.

بودجه بندی فصل دوم

	داخل	خارج
۹۰	۲	۲
۹۱	۳	۳
۹۲	۴	۴
۹۳	۲	۲
۹۴	۲	۲

پدیده‌ی تصادفی و فضای نمونه‌ای

iQ یکی از چیزهایی که توی مسائل احتمال، خیلی مهمه، فضای نمونه‌ای و تعداد اعضای اونه. در این قسمت، سؤال‌هایی رو آوردیم که مستقیماً در مورد فضای نمونه‌ای پرسیده شده.



۱- فضای نمونه‌ای آزمایش «قرار دادن دو عدد صحیح متمایز در خانه‌های مربعی شکل روبه‌رو»، چند عضو دارد؟

۱) ۲۴۰ ۲) ۶۴
۳) ۱۶ ۴) ۸

۲- در جعبه‌ای ۴ مهره‌ی نارنجی و ۶ مهره‌ی بنفش متمایز وجود دارد. یک مهره از جعبه بیرون می‌آوریم و بعد از رؤیت، آن را کنار می‌گذاریم و مهره‌ی دیگری را برمی‌داریم. فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟

۱) ۴۵ ۲) ۹۰ ۳) ۹ ۴) ۱۰۰

۳- سکه‌ای را یک بار پرتاب می‌کنیم. اگر «رو» بیاید، آن‌گاه دو تاس می‌ریزیم و اگر «پشت» بیاید، سکه را سه بار دیگر پرتاب می‌کنیم. در این صورت فضای نمونه‌ای این آزمایش، چند عضو دارد؟

۱) ۴۴ ۲) ۷۲ ۳) ۳۸ ۴) ۲۸۸

۴- فضای نمونه‌ای برای جنسیت فرزندان یک خانواده‌ی چهار فرزندی که لااقل یکی از آن‌ها دختر است، چند عضو دارد؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۷

۵- پنج کارت در یک کیف قرار دارد و روی آن‌ها اعداد ۱ تا ۵ نوشته شده است. یکی از کارت‌ها را به تصادف برمی‌داریم و بعد به تعداد عدد نوشته شده‌ی روی آن، سکه پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟

۱) ۴۸ ۲) ۳۰ ۳) ۶۲ ۴) ۱۲۰

پیشامد تصادفی

iQ خب، حالا که با فضای نمونه‌ای آشنا شرید، وقتش رسیده که پیشامد تصادفی رو بشناسید تا به کمک هر دوی اونا، بتونید وارد بحث احتمال بشید.

۶- در آزمایش پرتاب یک تاس، می‌دانیم که پیشامد «آمدن عدد کوچک‌تر از ۵» اتفاق افتاده است، اما پیشامد «آمدن عدد فرد» اتفاق نیفتاده است. در این صورت کدام‌یک از پیشامدهای زیر حتماً اتفاق افتاده است؟

۱) آمدن عدد زوج ۲) آمدن عدد کوچک‌تر از ۳
۳) آمدن عدد اول ۴) آمدن عدد بزرگ‌تر از ۳

۷- یک تاس آبی و یک تاس سبز را پرتاب کرده‌ایم. پیشامد آن که عدد روشده از تاس آبی، کوچک‌تر از عدد تاس سبز باشد، چند عضو دارد؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

۸- فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس را در نظر بگیرید. چند پیشامد متمایز روی این فضای نمونه‌ای می‌توان تعریف کرد؟

۱) $۳۶^{۲}$ ۲) $۱۶^{۹}$ ۳) $۸^{۹}$ ۴) $۱۲^{۹}$

۹- اگر در یک آزمایش تصادفی، ۲۵۵ پیشامد ناتهی داشته باشیم، آن‌گاه چند پیشامد ۳ عضوی خواهیم داشت؟

۱) ۲۱ ۲) ۷۲ ۳) ۵۶ ۴) ۳۳۶

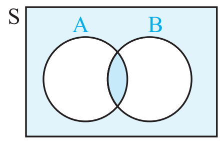
اعمال روی پیشامدها

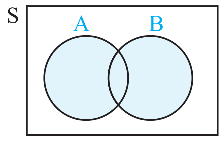
گاهی اوقات طراح، شما رو مجبور می‌کنه که بین دو پیشامد، یه حرکتی بزنید. مثلاً اجتماع یا اشتراک اونا رو حساب کنید. در این‌جا، می‌خوایم شما رو با این مدل از تست‌ها آشنا کنیم.

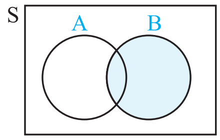
۱۰- در یک آزمایش تصادفی، مجموعه‌ی $S=\{a,b,\Delta\}$ فضای نمونه‌ای و $A=\{a,b\}$ و $B=\{a,\Delta\}$ دو پیشامد از S هستند. در این صورت کدام‌یک از پیشامدهای زیر، «نشدنی» است؟

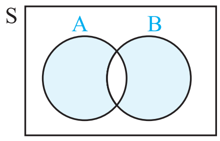
۱) $A-B$ ۲) $A\cap B$ ۳) $A'\cap B'$ ۴) $B-A$

۱۱- کدام نمودار زیر، نشانگر این است که «فقط پیشامد A یا فقط پیشامد B رخ بدهد»؟ تمرین کتاب درسی

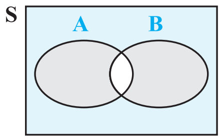
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۲- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، شکل مقابل، کدام پیشامد را مشخص می‌کند؟ آزمون‌های گاج



۱) دقیقاً یکی از دو پیشامد A یا B اتفاق بیفتد.
۲) هیچ یک از دو پیشامد A یا B اتفاق نیفتد.
۳) حداکثر یکی از دو پیشامد A یا B اتفاق بیفتد.
۴) حداقل یکی از دو پیشامد A یا B اتفاق بیفتد.

احتمال رخداد پیشامد A

تا این قسمت از کار، با فضای نمونه‌ای و پیشامد تصادفی آشنا شرید. حالا می‌خوایم از طریق اونا به بررسی احتمال وقوع یک رفداد بپردازیم.

۱۳- اعداد ۱،۲،...،۹ بر روی ۹ کارت یکسان نوشته شده است. به تصادف دو کارت از بین آن‌ها بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، مجموع عدد این دو کارت، برابر ۱۱ است؟ ریاضی داخل ۹۱

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۱۴- در آزمایشگاهی ۳ موش سفید و ۵ موش سیاه نگهداری می‌شوند. اگر به طور تصادفی ۴ موش از بین آن‌ها جهت آزمایشی برداشته شود، با کدام احتمال فقط یکی از موش‌های مورد آزمایش، سفید است؟ تجربی داخل ۸۶

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۱۵- از ۱۲ کتاب که ۵ عدد از آن‌ها در مورد ادبیات و ۷ عدد از آن‌ها در مورد تاریخ است به طور تصادفی ۵ کتاب انتخاب کرده‌ایم. احتمال این‌که ۳ کتاب ادبیات و ۲ کتاب تاریخ انتخاب شده باشد، کدام است؟ ریاضی خارج ۹۱

۱) $\frac{۱۵}{۶۶}$ ۲) $\frac{۱۷}{۶۶}$ ۳) $\frac{۳۵}{۱۳۲}$ ۴) $\frac{۳۷}{۱۳۲}$

۱۶- در ظرفی ۴ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، مهره‌های خارج شده، هم رنگ‌اند؟ تجربی خارج ۹۲

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۳}{۱۴}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۱۴}$

۱۷- در جعبه‌ای ۷ مهره‌ی سفید، ۵ مهره‌ی سیاه و ۲ مهره‌ی قرمز موجود است. به تصادف ۴ مهره از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، ۱ مهره‌ی قرمز و حداقل ۲ مهره‌ی سفید، خارج شده است؟ تجربی خارج ۹۴

۱) $\frac{۳۰}{۹۱}$ ۲) $\frac{۲۵}{۷۷}$ ۳) $\frac{۴۰}{۱۴۳}$ ۴) $\frac{۵۰}{۱۴۳}$

۱۸- از جعبه‌ای که حاوی ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب خراب است، ۳ سیب به تصادف برمی‌داریم. احتمال آن که تعداد سیب‌های سالم از تعداد سیب‌های خراب بیشتر باشد، چه‌قدر است؟ تمرین کتاب درسی

۱) $\frac{۳۳}{۶۸}$ ۲) $\frac{۵۵}{۶۸}$ ۳) $\frac{۱۱}{۳۴}$ ۴) $\frac{۱۴۳}{۳۴۰}$

۱۹- درون کیسه‌ای ۲ مهره‌ی سفید، ۱ مهره‌ی سیاه و ۵ مهره‌ی زرد وجود دارد. از این کیسه ۴ مهره با هم و به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که تعداد مهره‌های سفید و سیاه خارج شده با هم برابر باشند، کدام است؟ آزمون‌های گاج

۱) $\frac{۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۳}{۱۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲۸}$ ۴) $\frac{۵}{۲۸}$

۲۰- درون کیسه‌ای ۴ کارت سفید از شماره‌های ۱ تا ۴ و ۵ کارت سیاه از شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. از درون کیسه دو کارت با هم و به تصادف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، دو کارت خارج شده، هم‌رنگ یا با شماره‌ی یکسان می‌باشند؟ آزمون‌های گاج

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۱۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۲۱- در یک صندوق، ۸ جفت کفش متمایز وجود دارد. دو لنگه به طور تصادفی از صندوق خارج می‌کنیم. چه‌قدر احتمال دارد که آن دو لنگه متعلق به یک جفت باشند؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۱۵}$ ۳) $\frac{۱}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۲۲- اعداد ۹، ۶ و ۲ را به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال، دو رقم زوج، کنار هم قرار می‌گیرند؟ آزمایشی سنجش

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۲۳- ۶ نفر که دو نفر آن‌ها برادر یک‌دیگرند به تصادف در یک صف می‌ایستند. چه‌قدر احتمال دارد دو برادر در اول و آخر صف قرار داشته باشند؟ مثال کتاب درسی

۱) $\frac{۱}{۳۰}$ ۲) $\frac{۱}{۱۵}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۲}{۱۵}$

۲۴- پدر و مادری به همراه ۳ فرزند خود به تصادف در یک ردیف با ۶ صندلی می‌نشینند. با چه احتمالی همه‌ی آن‌ها به تصادف روی صندلی‌های متوالی می‌نشینند و فرزندان نیز کنار هم هستند؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۱۰}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۱۰}$

۲۵- احتمال آن‌که مجموع ارقام یک عدد دو رقمی برابر ۷ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۹۰}$ ۲) $\frac{۴}{۴۵}$ ۳) $\frac{۷}{۱۰۰}$ ۴) $\frac{۱}{۱۵}$

۲۶- با ارقام ۱، ۲، ۴ و ۵ تمام اعداد دو رقمی با ارقام متمایز را روی کارت‌های متمایز نوشته، سپس کارتی را به تصادف برمی‌داریم. چه‌قدر احتمال دارد که عدد روی کارت، مضرب ۲ یا ۳ باشد و مضرب ۶ نباشد؟

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۶۶ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۳۳

۲۷- در یک خانواده‌ی ۴ فرزندی احتمال آن‌که فرزند اول دختر و خانواده دقیقاً سه فرزند دختر داشته باشد، چه‌قدر است؟ آزمون‌های گاج

۱) $\frac{۵}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۱۶}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۱۶}$

۲۸- چهار رقم ۳، ۲، ۱ و ۰ را به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم تا عددی چهاررقمی حاصل شود. با کدام احتمال، یک عدد چهار رقمی مضرب ۶، حاصل می‌شود؟ تجربی خارج ۸۹

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$

۲۹- یک عدد پنج رقمی با جابه‌جایی ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۶ حاصل می‌شود. احتمال آن‌که عدد حاصل، فرد باشد و رقم دهگان آن ۲ نباشد، کدام است؟ آزمون‌های گاج

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۲

۳۰- در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به طور تصادفی، پی‌درپی بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، دو مهره با شماره‌ی فرد، متوالیاً خارج نمی‌شوند؟ تجربی داخل ۹۲

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۲۵

۳۱- با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ اعداد چهاررقمی و بدون تکرار ارقام می‌سازیم. با چه احتمالی این عدد، زوج بوده و بین ۹۹۹ و ۴۴۰۰ قرار دارد؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۳۲- با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ یک عدد شش رقمی بدون تکرار ارقام به وجود می‌آید. احتمال آن‌که رقم صفر بین ارقام ۱ و ۴ باشد، چه‌قدر است؟ آزمون‌های گاج

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۳۳- سکه‌ای را ۹ بار پرتاب کرده‌ایم. چه‌قدر احتمال دارد که تعداد «پشت» آمدن‌ها بیش‌تر از تعداد «رو» آمدن‌ها باشد؟

۱) $\frac{۹}{۱۲۸}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۹}{۳۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۳۴- مجموعه‌ی ۳ عضوی A و مجموعه‌ی ۵ عضوی B را در نظر بگیرید. تابعی را با دامنه‌ی A به مجموعه‌ی B تعریف می‌کنیم. با چه احتمالی این تابع یک‌به یک است؟

۱) $\frac{۱۲}{۲۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۱۰}{۱۲۵}$ ۴) $\frac{۱۲۰}{۱۲۵}$

۳۵- در جعبه‌ای ۱۵ لامپ وجود دارد که تعدادی از آن‌ها سالم می‌باشند. اگر دو لامپ به تصادف از جعبه خارج کنیم، احتمال سالم بودن هر دو لامپ $\frac{۳}{۷}$ است. درون جعبه چند لامپ سالم قرار دارد؟ آزمون‌های گاج

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۳۶- در آزمایشگاهی $(k-۳)$ موش سفید و k موش سیاه وجود دارد. اگر دو موش به‌طور تصادفی از آزمایشگاه بیرون آوریم و احتمال این‌که هر دو از یک رنگ باشند برابر ۰/۵ باشد، آن‌گاه در این آزمایشگاه چند موش وجود دارد؟

۱) ۵ ۲) ۱۱ ۳) ۷ ۴) ۹

احتمال‌های پرتاب تاس

رسیدیم به مسائل مربوط به پرتاب تاس. هدفمون در این قسمت اینه که شما عزیزان رو با چندتا از تیپ‌های معروف مسائل پرتاب تاس آشنا کنیم.

۳۷- در پرتاب دو تاس، احتمال آن‌که مجموع اعداد رو شده، مربع یک عدد طبیعی باشد، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۷}{۳۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۳۸- در پرتاب دو تاس، احتمال آن‌که مجموع اعداد رو شده بین ۲ و ۷ باشد، چند برابر احتمال آن است که مجموع دو عدد بین ۷ و ۱۲ باشد؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۷}{۸}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۳۹- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده، مضرب ۴ است؟ تجربی داخل ۹۲

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۱۸}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

۴۰- تاسی را در نظر بگیرید که یک وجه آن سفید است و روی پنج وجه دیگرش اعداد ۵،۴،۳،۱ و ۶ دیده می‌شود. احتمال این‌که در پرتاب یک بار این تاس، عدد زوج ظاهر شود، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۴۱- در پرتاب دو تاس، احتمال آن‌که جمع اعداد رو شده، کم‌تر از ۸ باشد و هیچ یک از اعداد رو شده زوج نباشند، کدام است؟ آزمون‌های گاج

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

۴۲- تاسی را سه بار می‌اندازیم. احتمال آن‌که مجموع اعداد ظاهر شده، بزرگ‌تر از ۱۶ باشد، کدام است؟ آزمون‌های گاج

۱) $\frac{۵}{۲۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰۸}$ ۳) $\frac{۱}{۷۲}$ ۴) $\frac{۱}{۵۴}$

۴۳- شخص A یک تاس و شخص B دو تاس پرتاب می‌کند. احتمال آن‌که مجموع عدد دو تاسی که B پرتاب می‌کند برابر عدد تاس A باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۲۱۶}$ ۲) $\frac{۵}{۲۱۶}$ ۳) $\frac{۳}{۲۱۶}$ ۴) $\frac{۱۰}{۲۱۶}$

۴۴- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که اعداد رو شده، یکسان نباشند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۴۵- تاسی را دو مرتبه پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که عدد ظاهر شده در پرتاب دوم، کم‌تر از پرتاب اول باشد، چه‌قدر از عدد ۱ کم‌تر است؟

۱) $\frac{۷}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۴۶- تاسی را سه بار پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که در بار سوم، ۵ بیاید، چند برابر احتمال آن است که فقط در بار سوم، ۵ بیاید؟

۱) $(\frac{۴}{۳})^۲$ ۲) $(\frac{۶}{۵})^۲$ ۳) $(\frac{۷}{۶})^۲$ ۴) $(\frac{۵}{۶})^۲$

احتمال پیشامد متمم

یه‌سری از مسائل هستن که تعداد حالت‌های مطلوبشون، اون‌قدر زیاده که آگه آدم بخواد اونا رو بشماره، کلافه می‌شه. این‌جور وقتاست که استفاده از روش متمم، خیلی لذت‌بخش هست! در تست‌های این بخش، چندتاشونو آوردیم.

۴۷- از میان ۵ سرباز و ۶ افسر، ۴ نفر به تصادف گزینش می‌کنیم. با چه احتمالی تعداد نفرات گزینش شده از این دو گروه، متفاوت است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۱۰}$ ۳) $\frac{۵}{۱۱}$ ۴) $\frac{۶}{۱۱}$

پاسخ‌نامه‌تشریحی

۱ ۱ ابتدا درسنامه‌ی زیر را بخوانید.

پدیده‌ی تصادفی و فضای نمونه‌ای

پدیده‌ی تصادفی (آزمایش تصادفی): آزمایشی است که مجموعه‌ی نتایج ممکن آن قابل پیش‌بینی است، ولی نمی‌توانیم به‌طور قطعی نتیجه‌ی آن را از قبل مشخص کنیم. مثلاً در مورد به دنیا آمدن یک نوزاد، دو حالت ممکن برای آن می‌شناسیم (پسر یا دختر)، اما از قبل نمی‌توانیم با قطعیت پسر یا دختر بودنش را تعیین کنیم. یا در مورد پرتاب تاس، می‌دانیم عددی که ظاهر می‌شود، ۱ تا ۶ است، ولی نمی‌دانیم دقیقاً کدام‌یک از آن‌ها ظاهر می‌شود.

فضای نمونه‌ای: مجموعه‌ی شامل همه‌ی نتایج (برآمدهای) ممکن یک پدیده‌ی تصادفی را **فضای نمونه‌ای** می‌نامیم. معمولاً آن را با S نمایش می‌دهند. اگر اعضای S قابل شمارش باشند، آن را یک فضای نمونه‌ای **گسسته** می‌نامیم. *(راستی گفتیم برآمد! یعنی چی این کلمه؟ به هر عضو از فضای نمونه‌ای می‌گوییم برآمد.)*

در ادامه، جدولی آورده‌ایم که در آن چند تا از پدیده‌های تصادفی و فضای نمونه‌ای مربوط به هر کدام و تعداد اعضای هر فضای نمونه‌ای مشخص شده است و در لابه‌لای جدول، نکاتی را مطرح کرده‌ایم که در حلّ بسیاری از مسائل احتمال، مهم است. ببینید:

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای: $n(S)$	فضای نمونه‌ای (S)	پدیده‌ی تصادفی
$n(S)=۲^۱=۲$	$S=\{$ ر ، پ $\}$	انداختن یک سکه
$n(S)=۲^۲=۴$	$S=\{$(پ ر)، (ر پ)، (ر ر)، (پ پ)$\}$	انداختن دو سکه
انداختن n سکه با هم (یا n بار یک سکه) $\Rightarrow n(S)=۲^n$		
$n(S)=۶^۱=۶$	$S=\{۱،۲،۳،۴،۵،۶\}$	انداختن یک تاس
$n(S)=۶^۲=۳۶$	$S=\{(۱،۱)،(۱،۲)،(۱،۳)،...،(۶،۶)\}$	انداختن دو تاس
انداختن n تاس با هم (یا n بار یک تاس) $\Rightarrow n(S)=۶^n$		
$n(S)=۳!=۶$	$S=\{abc، acb، bac، bca، cab، cba\}$	کنار هم قرار دادن a، b و c به‌طور تصادفی
کنار هم قرار دادن n شیء متمایز $\Rightarrow n(S)=n!$		
$n(S)=\binom{۴}{۲}=۶$	$S=\{ab، ac، ad، bc، bd، cd\}$	انتخاب تصادفی ۲ حرف از بین حروف a، b، c و d (بدون درنظر گرفتن ترتیب)
$n(S)=\binom{۴}{۲}=۶$	$S=\{$ق۱ق۲ ، آ۱ق۱ ، آ۱ق۲ ، آ۲ق۱ ، آ۲ق۲ ، آ۱آ۲$\}$	انتخاب تصادفی ۲ مهره از جعبه‌ای که در آن ۲ مهره‌ی قرمز و ۲ مهره‌ی آبی وجود دارد.
انتخاب k شیء از بین n شیء $\Rightarrow n(S)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$		
$n(S)=P(۴،۲)=\frac{۴!}{۲!}=۱۲$	$S=\{۱۲،۲۱،۱۴،۴۱،۱۶،۶۱،۲۴،۴۲،۲۶،۶۲،۴۶،۶۴\}$	انتخاب تصادفی ۲ رقم از بین ارقام ۱،۲،۴،۶ و ساختن عدد ۲ رقمی (بدون تکرار)
انتخاب k شیء از بین n شیء به‌طوری که ترتیب انتخاب، مهم باشد. $\Rightarrow n(S)=P(n،k)=\frac{k!}{(n-k)!}$		

صفحه‌ی مربعی، ۱۶ خانه‌ی خالی دارد. عدد صحیح اولی در هر کدام از خانه‌ها می‌تواند بنشیند (یعنی ۱۶ حالت) و عدد دومی در مابقی خانه‌ها (یعنی ۱۵ حالت)، پس طبق اصل ضرب به $۱۶\times۱۵=۲۴۰$ حالت این کار انجام می‌شود، یعنی $n(S)=۲۴۰$.

۲ ۲ مهره‌ی اول را که می‌خواهیم برداریم از بین ۱۰ مهره انتخابش می‌کنیم که به $\binom{۱۰}{۱}$ حالت امکان‌پذیر است. اما وقتی نوبت مهره‌ی دوم می‌شود، باید از بین ۹ مهره‌ی باقی‌مانده‌ی درون جعبه، انتخابش کنیم که این کار را می‌توانیم به $\binom{۹}{۱}$ حالت انجام دهیم، پس: $n(S)=\binom{۱۰}{۱}\times\binom{۹}{۱}=۱۰\times۹=۹۰$

۳ **۱** خوراک حل این سؤال، اصل ضرب و اصل جمع است، نگاه کنید:

اگر سکه «رو» بیاید $\Longrightarrow$ دو تاس می‌ریزیم : $\underbrace{۱}_{\text{سکه، رو}} \times \underbrace{۶}_{\text{تاس}} \times \underbrace{۶}_{\text{تاس}} = ۳۶$

اگر سکه «پشت» بیاید $\Longrightarrow$ سکه را سه بار پرتاب می‌کنیم : $\underbrace{۱}_{\text{سکه، پشت}} \times \underbrace{۲}_{\text{سکه}} \times \underbrace{۲}_{\text{سکه}} \times \underbrace{۲}_{\text{سکه}} = ۸$

$\xrightarrow{\text{اصل جمع}} n(S) = ۳۶ + ۸ = ۴۴$

۴ **۲** وقتی گفته می‌شود لااقل یکی از فرزندان، دختر است یعنی از ۴ بچه، یکی یا دوتا یا سه‌تا و یا هر چهارتا دختر هستند. بـه عبـارت دیگـر هـر ۴ فرزند، پسر نیستند، پس:

$$n(S) = ۲^۴ - \underbrace{۱}_{\text{هر ۴ فرزند پسر}} = ۱۶ - ۱ = ۱۵$$

۵ **۳** روی کارت‌ها اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ نوشته شده‌اند، پس:

کارت با عدد ۱ $\Rightarrow$ ۱ سکه پرتاب می‌شود $\Rightarrow$ $۲^۱$ حالت

کارت با عدد ۲ $\Rightarrow$ ۲ سکه پرتاب می‌شود $\Rightarrow$ $۲^۲$ حالت

کارت با عدد ۳ $\Rightarrow$ ۳ سکه پرتاب می‌شود $\Rightarrow$ $۲^۳$ حالت

کارت با عدد ۴ $\Rightarrow$ ۴ سکه پرتاب می‌شود $\Rightarrow$ $۲^۴$ حالت

کارت با عدد ۵ $\Rightarrow$ ۵ سکه پرتاب می‌شود $\Rightarrow$ $۲^۵$ حالت

$$\Rightarrow n(S) = ۲^۱ + ۲^۲ + ۲^۳ + ۲^۴ + ۲^۵ = ۲ + ۴ + ۸ + ۱۶ + ۳۲ = ۶۲$$

۶ **۱** ابتدا درسنامه‌ی زیر را بخوانید.

پیشامد تصادفی

هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد تصادفی می‌گوییم. چند تا مثال می‌زنیم تا مطلب برایتان خوب جا بیفتد. فـرض کنیـد تاسـی را پرتـاب کرده‌ایم. فضای نمونه‌ای آزمایش می‌شود $\{۱،۲،۳،۴،۵،۶\}$، حالا اگر بگوییم می‌خواهیم تاس، فرد بیاید، یعنی این‌که از نظر ما، حالت مطلوب این است که یکی از اعداد $\{۱،۳،۵\}$ ظاهر شود. امـا اگـر بگـوییم می‌خـواهیم تـاس، عـدد اول بیایـد، یعنـی حالـت مطلـوب از نظـر مـا ایـن اسـت کـه یکـی از اعداد $\{۲،۳،۵\}$ بیاید. یا این‌که بگوییم تاس، بزرگ‌تر از ۴ بیاید، یعنی مطلوب ما، یکی از اعداد $\{۵،۶\}$ است. حالا به هر کدام از ایـن مجموعـه‌ها، یـک پیشامد تصادفی می‌گوییم (چون زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای هستند) و اگر پیشامدی یـک عضـو داشـته باشـد، آن را **پیشـامد سـاده** می‌نـامیم. حواستان باشد که اگر با پرتاب یک تاس، عدد ۲ ظاهر شد، می‌توانید بگویید که پیشامد اعداد زوج رخ داده است. یا حتی می‌توانید بگویید پیشامد اعداد اول رخ داده است. دلیلش هم این است که عدد ۲، یکی از اعضای مجموعه‌ی $\underbrace{\{۲،۴،۶\}}_{\text{اعداد زوج}}$ و یا مجموعه‌ی $\underbrace{\{۲،۳،۵\}}_{\text{اعداد اول}}$ است.

پس اگر A یک پیشامـد تصادفی باشد و نتیجه‌ی آزمایش، عضوی از A باشد، می‌گوییم A رخ داده است.

چندنکته

۱) پیشامد $A = \varnothing$ را پیشامد **نشدنی** و پیشامد $A = S$ را پیشامد **حتمی** می‌نامیم.

۲) اگر فضای نمونه‌ای S، دارای ۲ عضو باشد، آن‌گاه می‌توانیم ۴ زیرمجموعه برای آن درنظر بگیریم، یعنی ۴ پیشامد داریم، ببینید:

پرتاب ۱ سکه $\Rightarrow S = \{ر، پ\} \Rightarrow A_1 = \varnothing$ و $A_2 = \{ر، پ\}$ و $A_3 = \{پ\}$ و $A_4 = \{ر\}$

۳) اگر فضای نمونه‌ای S، دارای ۳ عضو باشد، آن‌گاه می‌توانیم ۸ زیرمجموعه یا پیشامد برای آن درنظر بگیریم.

خلاصه‌ی حرفامون این می‌شه که اگر فضای نمونه‌ای، n عضو داشته باشد، آن‌گاه تعداد کل پیشامدهای تصادفی آن برابر ۲^n است.

گفته شده پیشامد «آمدن عدد کوچک‌تر از ۵» اتفاق افتاده است، معنی‌اش این است که یکی از اعداد ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ آمده است. از طرفی پیشامد «آمدن عدد فرد» اتفاق نیفتاده، پس عدد رو شده، ۲ یا ۴ است. در نتیجه می‌توانیم بگوییم پیشامد آمدن عدد زوج اتفاق افتاده است.

۷ **۳** وقتی دو تاس پرتاب می‌کنیم، فضای نمونه‌ای ۳۶ عضو خواهد داشت $(n(S) = ۶^۲ = ۳۶)$، که در ۶ عضو آن، عدد رو شده‌ی هر دو تاس بـا هـم برابر است (یعنی (۱،۱)، (۲،۲)، ...، (۶،۶)). بنابراین در مابقی حالت‌ها، در نصف آن‌ها عدد تاس آبی کوچک‌تر از عدد تاس سـبز اسـت و در نصـف دیگـر، عدد تاس سبز کوچک‌تر از تاس آبی است، بنابراین:

$$\text{جواب} = \frac{۳۶ - ۶}{۲} = ۱۵$$

یعنی در ۱۵ حالت، عدد تاس آبی کوچک‌تر از عدد تاس سبز است.

۸ **۲** در این‌جا $n(S) = ۶^۲ = ۳۶$، پس به تعداد $۲^{۳۶}$ یا $۱۶^۹$ زیرمجموعه (یا همان پیشامد) می‌توان تعریف کرد. شاید بپرسیـد $۱۶^۹$ از کجا پیـدایش شد. دلیلش این است که:

$$۲^{۳۶} = (۲^۴)^۹ = ۱۶^۹$$

سؤال: *اگه آزمایش پرتاب یک سکه و یک تاس رو داشته باشیم، تعداد پیشامدهای اون چندتاست؟*

خب، جوابش می‌شه $۲^{۱۲}$*، خودتون بهش فکر کنید.*

۹ **۳** فراموش نکنید تهی یک پیشامد در هر آزمایش به حساب می‌آید، پس وقتی ۲۵۵ پیشامد ناتهی داریم، معنی‌اش این است که کـلاً ۲۵۶ پیشامد داریم که می‌توان گفت:

$$۲^{n(S)} = ۲۵۶ = ۲^۸ \Rightarrow n(S) = ۸$$

در نتیجه تعداد پیشامدهای ۳ عضوی برابر است با:

$$\binom{n(S)}{۳}=\binom{۸}{۳}=\frac{۸!}{۳!\times ۵!}=\frac{۸\times ۷\times ۶\times \cancel{۵!}}{۳\times ۲\times \cancel{۵!}}=۵۶$$

شاید بپرسید سر و کلّه‌ی $\binom{n(S)}{۳}$ از کجا پیدا شد؟ جوابش مشخص است. ببینید بچه‌ها، پیشامد یعنی زیرمجموعه‌ای از S. پس وقتی پیشامد ۳ عضوی می‌خواهیم، یعنی زیرمجموعه‌های ۳ عضوی از S را می‌خواهیم که تعداد آن‌ها برابر می‌شود با $\binom{n(S)}{۳}$. بنابراین **تعداد پیشامدهای k عضوی از یک آزمایش برابر است با $\binom{n(S)}{k}$**. *یادتون نره!*

۱۰ ۳ ابتدا درسنامه‌ی زیر را بخوانید.

اعمال روی پیشامدها

همان‌طور که گفتیم پیشامدها زیرمجموعه‌هایی مانند A، B و C و... از فضای نمونه‌ای هستند، در نتیجه اعمالی چون اجتماع (⋃)، اشتراک (⋂) یا تفاضل (−) بین مجموعه‌ها و نیز متمم یک مجموعه مانند A (یعنی A')، در پیشامدها نیز قابل تعریف است.

متمم پیشامد A : آن را با A' نشان می‌دهیم. A' مجموعه‌ای از اعضای S است که در A نیستند. یعنی A' زمانی رخ می‌دهد که A رخ ندهد.

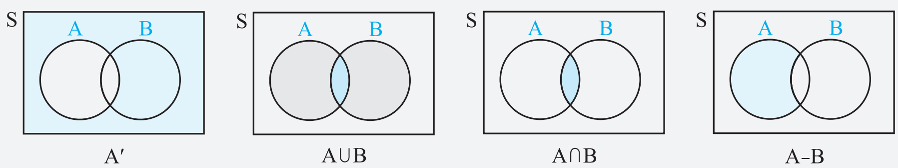
یادتان باشد که: $A\cup A'=S$ و $A\cap A'=\varnothing$ و $n(A')=n(S)-n(A)$

اجتماع دو پیشامد $(A\cup B)$: پیشامد $A\cup B$ زمانی رخ می‌دهد که A یا B یا هر دو رخ بدهند.

اشتراک دو پیشامد $(A\cap B)$: پیشامد $A\cap B$ زمانی رخ می‌دهد که هم A و هم B رخ دهند.

تفاضل دو پیشامد: پیشامد $A-B$ زمانی رخ می‌دهد که A رخ دهد، ولی B رخ ندهد، و پیشامد $B-A$ زمانی رخ می‌دهد که B رخ دهد، ولی A رخ ندهد.

در شکل‌های زیر، نمودارهای وِن مربوط به آن‌ها را ببینید.

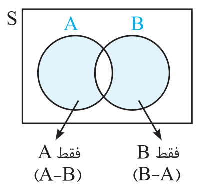


$\varnothing$ را پیشامد نشدنی می‌نامیم، بنابراین:

۱) $A-B=\{b\}$ ۲) $A\cap B=\{a\}$ ۳) $A'\cap B'=\{\Delta\}\cap\{b\}=\varnothing$ ۴) $B-A=\{\Delta\}$

۱۱ ۴ نمودار رسم شده در گزینه‌ی (۴) بیانگر این است که فقط A رخ بدهد یا فقط B رخ بدهد.

$$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$$



۱۲ ۳ از روی شکل می‌فهمیم که پیشامد $A\cap B$ (یعنی A و B هر دو با هم) اتفاق نیفتاده است، پس به عبارتی دیگر پیشامد **حداکثر یکی از پیشامدهای A یا B اتفاق بیفتد** را نشان می‌دهد.

۱۳ ۲ ابتدا درسنامه‌ی زیر را بخوانید.

احتمال رخداد پیشامد A

تا این قسمت در مورد پیشامدها و فضای نمونه‌ای صحبت کردیم. دیدید که پیشامدها می‌توانند تهی، تک‌عضوی، دو عضوی و یا بیش‌تر باشند. حالا می‌خواهیم احتمال رخداد پیشامد A از فضای نمونه‌ای قابل شمارش(۱) و هم‌شانسِ S را تعیین کنیم (هم‌شانس! یعنی احتمال رخ دادن برآمدهای S، یکسان باشند). در این حالت احتمال وقوع پیشامد A را که با $P(A)$ نشان می‌دهیم به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت‌های ممکن}}}$$

چندنکته

۱ $A\subseteq S\Rightarrow ۰\le n(A)\le n(S)\xrightarrow{\div n(S)}۰\le P(A)\le ۱$

۲ $n(\varnothing)=۰\Rightarrow P(\varnothing)=\dfrac{n(\varnothing)}{n(S)}=۰$ (احتمال وقوع پیشامد نشدنی، صفر است.)

۳ $P(S)=\dfrac{n(S)}{n(S)}=۱$ (احتمال وقوع پیشامد حتمی، یک است.)

۱- فضای قابل شمارش به فضا یا مجموعه‌ای گفته می‌شود که تعداد اعضای آن را با شمارش به‌دست می‌آوریم.

می‌خواهیم از بین ۹ کارت، ۲ تا بیرون بیاوریم، پس $n(S)=\binom{9}{2}=36$. ضمناً قرار است که مجموع اعداد روی دو کارت، مساوی ۱۱ شود، در نتیجه پیشامد تصادفی به‌صورت $A=\{(2,9),(3,8),(4,7),(5,6)\}$ خواهد بود، پس $n(A)=4$، بنابراین:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

۱۴ **۳** از بین ۸ موش، ۴ تا برداشته‌ایم، پس تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر $n(S)=\binom{8}{4}=70$ می‌شود. حالا نوبت چی هست؟ بله، $n(A)$. می‌خواهیم از بین آن‌ها یکی سفید و سه تای دیگر سیاه باشد، پس:

$$n(A)=\underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{انتخاب ۱ موش سفید از ۳ تا سفیدها}}\times\underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{انتخاب ۳ موش سیاه از ۵ تا سیاه‌ها}}=3\times10=30$$

بنابراین: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{30}{70}=\frac{3}{7}$.

۱۵ **۳** می‌خواهیم ۵ کتاب از بین ۱۲ کتاب انتخاب کنیم، پس $n(S)=\binom{12}{5}=792$. ضمناً می‌خواهیم از بین کتاب‌هایی که انتخاب کرده‌ایم، ۳ تا ادبیات باشند و ۲ تای دیگر تاریخ، پس:

$$n(A)=\binom{5}{3}\times\binom{7}{2}=10\times21=210\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{210}{792}=\frac{35}{132}$$

۱۶ **۱** برای این که هر سه مهره هم‌رنگ باشند باید هر سه سفید یا هر سه سیاه باشند، بنابراین:

$$P(\text{هر سه همرنگ})=P(\text{هر سه سفید})\underset{\text{یا}}{+}P(\text{هر سه سیاه})=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}}+\frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}}=\frac{4}{84}+\frac{10}{84}=\frac{14}{84}=\frac{1}{6}$$

۱۷ **۳**

$$P(A)=\frac{\overbrace{\binom{2}{1}\binom{7}{2}\binom{5}{1}}^{\text{۱ قرمز و ۲ سفید و ۱ سیاه}}+\overbrace{\binom{2}{1}\binom{7}{3}\binom{5}{0}}^{\text{۱ قرمز و ۳ سفید}}}{\binom{14}{4}}=\frac{2\times21\times5+2\times35\times1}{1001}=\frac{40}{143}$$

۱۸ **۲** می‌خواهیم ۳ سیب از ۱۷ سیب برداریم، پس $n(S)=\binom{17}{3}=\frac{17!}{3!\times14!}=680$. حالا می‌خواهیم تعداد سیب‌های سالم از سیب‌های خراب، بیش‌تر باشد، پس باید ۲ سیب سالم برداریم و ۱ خراب، یا این که هر ۳ را سالم انتخاب کنیم. بنابراین:

$$n(A)=\underbrace{\binom{12}{2}}_{\text{۲ سالم}}\times\underbrace{\binom{5}{1}}_{\text{۱ خراب}}\underset{\text{یا}}{+}\underbrace{\binom{12}{3}}_{\text{۳ سالم}}=(66\times5)+220=330+220=550\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{550}{680}=\frac{55}{68}$$

۱۹ **۱** فضای نمونه‌ای در انتخاب ۴ مهره از ۸ مهره‌ی درون کیسه برابر است با: $\binom{8}{4}=\frac{8!}{4!\times4!}=70$ و پیشامد مطلوب A نیز برابر می‌شود با:

$$n(A)=\underbrace{\binom{2}{0}\binom{1}{0}\binom{5}{4}}_{\text{صفر تا سیاه و صفر تا سفید و ۴ تا زرد}}\underset{\text{یا}}{+}\underbrace{\binom{2}{1}\binom{1}{1}\binom{5}{2}}_{\text{۱ سفید و ۱ سیاه و ۲ زرد}}=5+20=25\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{25}{70}=\frac{5}{14}$$

۲۰ **۲** دو کارت از ۹ کارتی که درون کیسه است خارج می‌کنیم، پس $n(S)=\binom{9}{2}=36$. از طرفی می‌خواهیم دو کارت، هم‌رنگ باشند یا با شماره‌های یکسان باشند، پس:

$$n(A)=\underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{دو کارت، سفید باشند}}+\underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{دو کارت، سیاه باشند}}+\underbrace{4}_{\text{چهار حالت داریم که دو کارت با شماره‌ی یکسان خارج شود}}=6+10+4=20\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$$

۲۱ **۲** ۸ جفت کفش می‌شود ۱۶ لنگه کفش. می‌خواهیم ۲ لنگه انتخاب کنیم، یعنی: $n(S)=\binom{16}{2}=\frac{16!}{2!\times14!}=120$ *(البته می‌تونستیم از رابطه‌ی* $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ *استفاده کنیم).* حالا می‌خواهیم این دو لنگه، متعلق به یک جفت کفش باشند، یعنی در واقع می‌خواهیم از بین ۸ جفت کفشی که موجود است، ۱ جفت را انتخاب کرده باشیم، پس: $n(A)=\binom{8}{1}=8$ و در نتیجه: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{8}{120}=\frac{1}{15}$

۲۲ **۴** تعداد جایگشت‌های سه رقم ۹، ۶ و ۲ در کنار هم برابر ۳! است، پس $n(S)=6$. حالا می‌خواهیم دو رقم زوج، کنار هم باشند، پس ۲ و ۶ را به هم می‌بندیم و یک رقم در نظر می‌گیریم، بنابراین:

$$(2,6),9\Rightarrow n(A)=2!\times\underbrace{2!}_{\text{جایگشت ۲ و ۶ در کنار هم}}=4\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

۲۳ **۲** یکی از برادرها اول صف و برادر دیگر، آخر صف می‌ایستد. می‌ماند چهار نفر دیگر که به ۴! طریق مختلف بین دو برادر جابه‌جا می‌شوند. ضمناً دو تا برادر هم به ۲! حالت مختلف، جابه‌جایی دارند. از طرفی کل حالت‌ها هم می‌شود ۶!، در نتیجه:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4!\times2!}{6!}=\frac{\cancel{4!}\times2}{6\times5\times\cancel{4!}}=\frac{1}{15}$$

۲۴ **۴** قرار است این پنج نفر روی شش صندلی بنشینند، پس $n(S)=P(6,5)=\frac{6!}{(6-5)!}=6!$. چیزی که اهمیت دارد این است که می‌خواهیم آن‌ها روی صندلی‌های اول تا پنجم و یا روی صندلی‌های دوم تا ششم بنشینند (یعنی در واقع ۲ حالت انتخاب برای صندلی‌ها داریم) و از طرفی فرزندانشان هم کنار هم قرار بگیرند، پس:

$$\text{(فرزند و فرزند و فرزند) و (پدر) و (مادر)} \Rightarrow n(A)=\underset{\text{مادر و پدر و ۳ فرزند}}{3!}\times\underset{\text{۳ فرزند}}{3!}\times\underset{\text{حالت‌های انتخاب صندلی}}{2}$$

بنابراین:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3!\times3!\times2}{6!}=\frac{\cancel{3!}\times3\times2\times2}{6\times5\times4\times\cancel{3!}}=\frac{1}{10}$$

۲۵ **۱** اولاً تعداد کل اعداد دو رقمی می‌شود ۹۰ تا (چون $\frac{9}{\{1 \text{ یا } \dots \text{ یا } 9\}}\times\frac{10}{\{0 \text{ یا } \dots \text{ یا } 9\}}=90$). پس $n(S)=90$. ثانیاً اعداد دو رقمی که مجموع ارقامشان ۷ بشود در مجموعه‌ی $A=\{16,25,34,43,52,61,70\}$ قرار دارند، یعنی $n(A)=7$، در نتیجه: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{7}{90}$

۲۶ **۱** با ارقام داده شده، کل اعداد دو رقمی با رقم‌های متمایز را که می‌توان نوشت، در نظر می‌گیریم: $S=\{12,14,15,21,24,25,41,42,45,51,52,54\}$، پس $n(S)=4\times3=12$. حالا اعدادی که مدنظر ما هستند باید مضرب ۲ یا ۳ باشند و مضرب ۶ نباشند، یعنی این‌که:

$$A=\{14,15,21,45,51,52\}\Rightarrow n(A)=6\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}=0/5$$

۲۷ **۴** فضای نمونه‌ای فرزندان یک خانواده با ۴ فرزند، ۱۶ حالت دارد، پس $n(S)=16$. می‌خواهیم فرزند اول دختر باشد و خانواده دقیقاً سه دختر داشته باشد، پس باید از بین فرزندان دوم، سوم و چهارم، دو تا دختر داشته باشیم، در نتیجه:

$$A=\{\text{(پ د د د)},\ \text{(د پ د د)},\ \text{(د د پ د)}\}\Rightarrow n(A)=3\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3}{16}$$

۲۸ **۴** اول باید تعداد حالت‌های فضای نمونه‌ای (S) را پیدا کنیم که برابر است با:

$$n(S)=\frac{3}{\{1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3\}}\times\frac{3}{}\times\frac{2}{}\times\frac{1}{}=18$$

حالا نوبت می‌رسد به $n(A)$. می‌خواهیم عدد چهاررقمی موردنظر بر ۶ بخش‌پذیر باشد، پس باید هم بر ۳ بخش‌پذیر باشد و هم زوج باشد (این‌ها شرط مضرب ۶ بودن است). برای این که بر ۳ بخش‌پذیر باشد باید مجموع ارقامش بر ۳ قابل قسمت باشد. چون مجموع ارقام ۳، ۲، ۱ و ۰ همواره برابر ۶ است، پس عدد چهاررقمی حاصل، همواره بر ۳ بخش‌پذیر است. پس فقط بحث زوج بودن آن می‌ماند که داریم:

$$\frac{3}{}\times\frac{2}{}\times\frac{1}{}\times\frac{1}{\{0\}}=6 \text{ یا } \frac{2}{\{1 \text{ یا } 3\}}\times\frac{2}{}\times\frac{1}{}\times\frac{1}{\{2\}}=4\Rightarrow n(A)=6+4=10\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$$

۲۹ **۳** اول این که تعداد تمام اعداد پنج رقمی با ارقام متمایز ۱، ۲، ۳، ۴ و ۶، برابر است با $5!=120$ که همان $n(S)$ می‌باشد. اگر A پیشامد مجموعه‌ی پنج رقمی‌های مطلوب مسأله باشد، آن‌گاه:

$$n(A)=\underset{\text{غیر از یکان و دهگان}}{\frac{3}{}}\times\frac{2}{}\times\frac{1}{}\times\underset{\text{۲ نیست}}{\frac{3}{}}\times\underset{\{1 \text{ یا } 3\}}{\frac{2}{}}=36\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{36}{120}=0/3$$

۳۰ **۱** ۳ تا از مهره‌ها شماره‌ی فرد دارند و ۲ تای دیگر زوج، پس برای این که دو مهره با شماره‌ی فرد به‌صورت متوالی خارج نشود باید به‌صورت یکی در میان زوج‌ها و فردها را بیرون بیاوریم (و البته باید اولین مهره‌ای که بیرون می‌آوریم، فرد باشد). ببینید:

$$P=\frac{\overset{\text{فرد}}{3}\times\overset{\text{زوج}}{2}\times\overset{\text{فرد}}{2}\times\overset{\text{زوج}}{1}\times\overset{\text{فرد}}{1}}{5\times4\times3\times2\times1}=\frac{1}{10}=0/1$$

۳۱ **۲** دقت کنید بچه‌ها، تمام اعداد چهاررقمی که با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ و بدون تکرار ارقام ساخته می‌شوند، همگی بین ۹۹۹ و ۴۴۰۰ قرار دارند، در نتیجه ما فقط وظیفه داریم زوج بودن عدد را بررسی کنیم که دو حالت زیر پیش می‌آید:

$$\begin{cases}\text{اگر یکان، صفر باشد} \Rightarrow \frac{4}{}\times\frac{3}{}\times\frac{2}{}\times\frac{1}{\{0\}}=24\\ \text{اگر یکان، ۲ یا ۴ باشد} \Rightarrow \frac{3}{}\times\frac{3}{}\times\frac{2}{}\times\frac{2}{\{2 \text{ یا } 4\}}=36\end{cases}\xRightarrow{\text{اصل جمع}} n(A)=24+36=60$$

از طرفی کل اعداد ساخته شده با این ارقام برابر است با:

$$n(S)=\underset{\text{صفر نمی‌تواند قرار گیرد}}{\frac{4}{}}\times\frac{4}{}\times\frac{3}{}\times\frac{2}{}=96\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{60}{96}=\frac{5}{8}$$

۳۲ **۱** قرار است با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ یک عدد شش رقمی با ارقام متمایز بسازیم، پس:

$$n(S)=\underset{\text{صفر نمی‌تواند قرار گیرد}}{\underline{۵}}\times\underline{۵}\times\underline{۴}\times\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underline{۱}=۵\times ۵!$$

برای تعیین تعداد اعداد ۶ رقمی که رقم صفر بین ۱ و ۴ باشد، اول باید ۳ مکان از ۶ مکان را برای قرارگیری ۰ و ۱ و ۴ انتخاب کنیم که می‌شود $\binom{۶}{۳}$. حالا یا اول ۱ می‌آید، بعد ۰، بعد ۴ یا اول ۴ می‌آید، بعد ۰، بعد ۱، پس این خودش ۲ حالت دارد. همچنین ۳ رقمی که مانده است به $۳!$ طریق مختلف می‌توانند در جایگاه‌های باقی‌مانده قرار گیرند، در نتیجه:

$$n(A)=\binom{۶}{۳}\times ۲\times ۳!=\frac{۶!}{۳!۳!}\times ۲\times ۳!=\frac{\cancel{۶}\times ۵\times ۴\times \cancel{۳!}}{\cancel{۳}\times\cancel{۲}\times\cancel{۳!}}\times ۲\times ۳!=۲\times ۵!\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲\times ۵!}{۵\times ۵!}=\frac{۲}{۵}$$

۳۳ **۲** وقتی یک سکه را فرد بار پرتاب می‌کنیم یا تعداد فرد سکه را یک‌بار پرتاب می‌کنیم، امکان ندارد تعداد «پشت» و تعداد «رو» یکسان باشند، یا تعداد «پشت» بیش‌تر است یا تعداد «رو». یعنی احتمال هر یک از این دو حالت برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۳۴ **۱** اول این که تعداد کل توابع از یک مجموعه‌ی ۳ عضوی به یک مجموعه‌ی ۵ عضوی، برابر $۵^۳$ است (یعنی در اصل $n(S)=۵^۳$). حالا می‌خواهیم تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعه‌ی ۳ عضوی به مجموعه‌ی ۵ عضوی را بدانیم. برای این موضوع اول باید سه عضو از مجموعه‌ی ۵ عضوی را انتخاب کنیم که می‌شود $\binom{۵}{۳}$ و البته اجازه‌ی جابه‌جا شدن هم دارند، پس می‌شود $\binom{۵}{۳}\times ۳!=\frac{۵!}{۲!}$، در نتیجه:

$$P\,(\text{تابع یک‌به‌یک})=P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\frac{۵!}{۲!}}{۵^۳}=\frac{۵\times ۴\times ۳\times\cancel{۲!}}{۵^۳\times\cancel{۲!}}=\frac{۱۲}{۲۵}$$

۳۵ **۴** فرض کنیم از بین ۱۵ لامپی که داریم، k تای آن‌ها سالم باشند، در این صورت احتمال سالم بودن دو لامپی که از جعبه بیرون می‌آوریم برابر است با:

$$P=\frac{\binom{k}{۲}}{\binom{۱۵}{۲}}=\frac{\frac{k(k-۱)}{۲}}{\frac{۱۵\times ۱۴}{۲}}=\frac{k(k-۱)}{۱۵\times ۱۴}=\frac{۳}{۷}\Rightarrow k(k-۱)=۹۰=۱۰\times ۹\Rightarrow k=۱۰$$

۳۶ **۴** اگر هر دو موش انتخابی سفید باشند، تعداد حالت‌ها می‌شود $\binom{k-۳}{۲}$ و اگر هر دو سیاه باشند، تعداد حالت‌ها $\binom{k}{۲}$ می‌شود، بنابراین:

$$P\,(\text{هر دو همرنگ})=\frac{\binom{k-۳}{۲}+\binom{k}{۲}}{\binom{۲k-۳}{۲}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{\frac{(k-۳)!}{۲!(k-۵)!}+\frac{k!}{۲!(k-۲)!}}{\frac{(۲k-۳)!}{۲!(۲k-۵)!}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{(k-۳)(k-۴)+k(k-۱)}{(۲k-۳)(۲k-۴)}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow ۴k^۲-۱۶k+۲۴=۴k^۲-۱۴k+۱۲\Rightarrow ۲k=۱۲\Rightarrow k=۶\Rightarrow \text{تعداد کل موش‌ها}=(k-۳)+k=۲k-۳=۲\times ۶-۳=۹$$

۳۷ **۱** مربع اعداد طبیعی عبارتند از: $\{۱,۴,۹,۱۶,۲۵,\ldots\}$ که طبق اعدادی که از پرتاب دوتاس به‌دست می‌آیند فقط می‌توانیم ۴ و ۹ را از این مجموعه داشته باشیم. بنابراین می‌توان گفت:

مجموع دو تاس		تعداد حالات	
۴	→	۳	$:(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱)$
۹	→	۴	$:(۳,۶),(۴,۵),(۵,۴),(۶,۳)$

$\Rightarrow n(A)=۷$

از طرفی در پرتاب دو تاس، $n(S)=۳۶$ است، پس:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۷}{۳۶}$$

۳۸ **۲** مجموع اعداد رو شده‌ی دو تاس بین ۲ و ۷ باشد، یعنی یکی از اعداد ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶ باشد و بین ۷ و ۱۲ هم یعنی ۸ یا ۹ یا ۱۰ یا ۱۱ باشد، پس داریم:

مجموع دو تاس		تعداد حالات	
۳	→	۲	$:(۱,۲),(۲,۱)$
۴	→	۳	$:(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱)$
۵	→	۴	$:(۱,۴),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱)$
۶	→	۵	$:(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱)$
۸	→	۵	$:(۲,۶),(۳,۵),(۴,۴),(۵,۳),(۶,۲)$
۹	→	۴	$:(۳,۶),(۴,۵),(۵,۴),(۶,۳)$
۱۰	→	۳	$:(۴,۶),(۵,۵),(۶,۴)$
۱۱	→	۲	$:(۵,۶),(۶,۵)$

تعداد حالت‌های هر دو پیشامد برابر است، در نتیجه احتمال وقوع هر دو حالت با هم مساوی است، پس نسبت آن‌ها برابر ۱ می‌باشد.