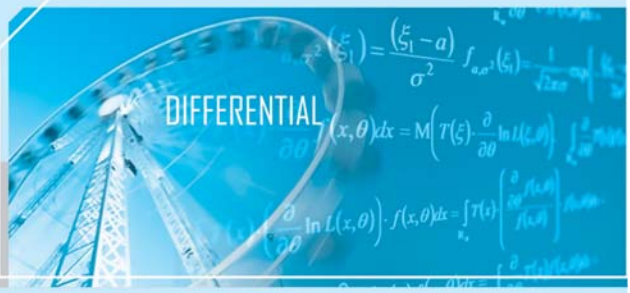
۷ جلسه هفتم

فصل دوم



تابع پیوسته و پیوستگی روی بازه

تابع پیوسته

تعریف تابع پیوسته: تابع f را پیوسته گوییم، هرگاه در تمام نقاط دامنه‌ی خود پیوسته باشد.

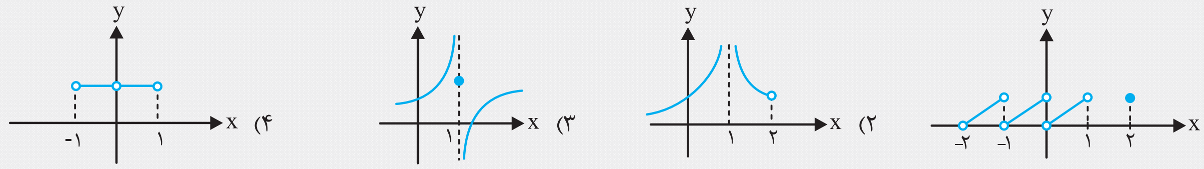
به‌طور مثال تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$، تابعی پیوسته است. زیرا این تابع در تمام نقاط دامنه‌ی خود پیوسته است. توجه کنید که این تابع در $x=۰$ تعریف نشده است ($x=۰$ در دامنه‌ی تابع قرار ندارد.) و در مورد پیوستگی یا ناپیوستگی تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ در $x=۰$ نمی‌توان صحبت کرد.

تعریف تابع ناپیوسته: تابع f را ناپیوسته گوییم هرگاه حداقل در یک نقطه از دامنه‌ی خود ناپیوسته باشد.

به‌طور مثال، تابع $f(x)=[x]$، تابعی ناپیوسته است. زیرا در نقاط با طول صحیح که عضو دامنه‌ی تابع f می‌باشند، ناپیوسته است.

نکته: اگر f تابعی پیوسته باشد، لزومی ندارد که نمودار تابع f را بتوان بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم کرد. همان‌طور که گفتیم تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$، تابعی پیوسته است، اما نمودار این تابع را نمی‌توان بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم نمود.

مثال ۲۸۲: کدام‌یک از توابع زیر، تابعی ناپیوسته است؟



پاسخ: قبل از حل مثال لازم است یادآوری کنیم که تابع f در نقطه‌ی $x=a$ وقتی ناپیوسته است که تابع f در $x=a$ و حداقل یک همسایگی چپ یا راست $x=a$ تعریف شده باشد ولی در این نقطه پیوسته نباشد. حال به حل مثال و بررسی گزینه‌های آن می‌پردازیم:

گزینه‌ی (۱): نمودار تابع ارائه شده در این گزینه، نقطه‌ی ناپیوستگی ندارد. توجه کنید که در نقاط به طول‌های ۲−، ۱−، ۰ و ۱، تابع f تعریف نشده است و نیز این تابع در هیچ همسایگی چپ یا راست $x=۲$ تعریف نشده است. لذا نقاط مذکور شرایط صحبت در مورد پیوستگی یا ناپیوستگی را ندارند و نباید این نقاط را با نقاط ناپیوستگی اشتباه بگیریم. بنابراین این تابع، تابع ناپیوسته‌ای نیست. البته توجه کنید که این تابع، تابع پیوسته‌ای هم نیست. چرا که طبق تعریف، تابع پیوسته باید در تمام نقاط دامنه‌ی خود پیوسته باشد. اما این تابع در $x=۲\in D_f$ نه تنها پیوسته نیست، بلکه شرایط صحبت در مورد پیوستگی یا ناپیوستگی را نیز ندارد. در واقع این تابع نه پیوسته است و نه ناپیوسته. بلکه شرایط صحبت در مورد تابع پیوسته را ندارد.

گزینه‌ی (۲): دامنه‌ی این تابع برابر $(-\infty,۲)-\{۱\}$ است و این تابع در تمام نقاط دامنه‌ی خود پیوسته بوده و لذا تابعی پیوسته است. توجه کنید که در بحث تابع پیوسته، با نقاطی که در دامنه‌ی تابع حضور ندارند، کاری نداریم و تنها در نقاطی که متعلق به دامنه‌ی تابع باشند، باید پیوستگی داشته باشیم.

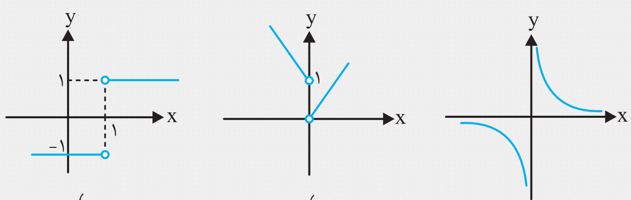
گزینه‌ی (۳): این تابع در $x=۱\in D_f$ ناپیوسته است. زیرا تابع در $x=۱$ شرایط صحبت در مورد پیوستگی یا ناپیوستگی را دارد، اما در این نقطه پیوسته نیست. پس این تابع، تابعی ناپیوسته بوده و لذا پاسخ تست هم همین گزینه است.

گزینه‌ی (۴): این تابع در تمام نقاط دامنه‌ی خود $(D_f=(-۱,۱)-\{۰\})$ پیوسته بوده و لذا تابعی پیوسته است.

مثال ۲۸۳: کدام‌یک از توابع زیر، تابعی ناپیوسته است؟

۱) $f(x)=\frac{۱}{x}$ ‏ ۲) $f(x)=\begin{cases} x & x>۰ \\ ۱-x & x<۰ \end{cases}$ ‏ ۳) $f(x)=x[x]$ ‏ ۴) $f(x)=\begin{cases} ۱ & x>۱ \\ -۱ & x<۱ \end{cases}$

پاسخ: همان‌گونه که از جلسه‌ی قبل به یاد دارید، تابع $f(x)=x[x]$ در تمام نقاط با طول صحیح به جز $x=۰$، ناپیوسته است، پس این تابع، تابعی ناپیوسته می‌باشد. بنابراین پاسخ تست هم همین گزینه یعنی گزینه‌ی (۳) است. در بقیه‌ی گزینه‌ها، تابع f تابعی پیوسته است. زیرا در تمام نقاط دامنه‌ی خود پیوسته‌اند. نمودار این توابع را ملاحظه کنید:



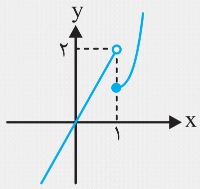
$f(x)=\begin{cases} ۱ & x>۱ \\ -۱ & x<۱ \end{cases}$ ‏ $f(x)=\begin{cases} x & x>۰ \\ ۱-x & x<۰ \end{cases}$ ‏ $f(x)=\frac{۱}{x}$

مثال ۲۸۴: چه نقطه‌ای را از دامنه‌ی تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\ge 1 \\ 2x & x<1 \end{cases}$ حذف کنیم تا f به تابعی پیوسته تبدیل شود؟

۱) $x=0$ ‏ ۲) $x=1$

۳) $x=2$ ‏ ۴) با حذف کردن یک نقطه، تابع پیوسته نمی‌شود.

پاسخ: نمودار تابع f به‌صورت مقابل است:

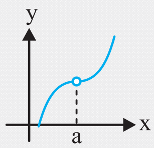


با توجه به شکل، تابع f در نقطه‌ی $x=1\in D_f$ ناپیوسته است.

اگر نقطه‌ی به طول $x=1$ را از دامنه‌ی تابع f حذف کنیم، آن‌گاه این تابع به تابعی پیوسته تبدیل می‌شود. زیرا در این صورت دامنه‌ی تابع برابر $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$ خواهد شد و تابع f در تمام این نقاط پیوسته می‌باشد. بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۲۸۵: آیا با اضافه کردن نقطه یا نقاطی به دامنه‌ی تابع ناپیوسته، می‌توان آن را به تابعی پیوسته تبدیل کرد؟

پاسخ: ممکن است فکر کنید توابعی به‌صورت مقابل با اضافه کردن یک نقطه، به تابع پیوسته تبدیل می‌شوند و بنابراین جواب سؤال مثبت می‌باشد. اما توجه کنید که تابع شکل مقابل، تابع ناپیوسته‌ای نیست. بلکه در مورد پیوستگی یا ناپیوستگی f در $x=a$ نمی‌توان صحبت کرد. در واقع تابع شکل مقابل، تابعی پیوسته است. گفتیم تابع ناپیوسته، تابعی است که حداقل در یک نقطه از دامنه‌ی خود مثل $x=a$ ناپیوسته باشد. وقتی تابع f در $x=a$ ناپیوسته است، پرواضح است که تابع f قطعاً در $x=a$ تعریف شده است ولی در این نقطه ناپیوسته است. لذا اضافه کردن نقطه به دامنه‌ی تابع f، تابع f را از حالت تابع بودن خارج می‌کند. در نتیجه هرگز با اضافه کردن نقطه یا نقاطی به دامنه‌ی تابع ناپیوسته‌ی f، نمی‌توان آن را به تابعی پیوسته تبدیل کرد.



نکات زیر کار کردن با توابع پیوسته و نیز حل مسائل و تست‌های مربوط به تابع پیوسته را تسهیل نموده و سرعت می‌بخشد.

نکته ۱: توابع زیر توابعی پیوسته‌اند:

آ) توابع چندجمله‌ای مانند $f(x)=3x^5+\frac{1}{2}x^3-4x+7$

ب) توابع کسری گویا (توابع کسری که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای است.) مانند $f(x)=\frac{x+5}{x^2-4}$

پ) توابع مثلثاتی یعنی $y=\sin x$ ، $y=\cos x$ ، $y=\tan x$ و $y=\cot x$

ت) توابع وارون مثلثاتی یعنی $y=\sin^{-1}x$ ، $y=\cos^{-1}x$ ، $y=\tan^{-1}x$ و $y=\cot^{-1}x$

ث) توابع نمایی و لگاریتمی یعنی $y=a^x$ و $y=\log_a x$ که در آن $0<a\neq 1$

ج) تابع قدرمطلق $y=|x|$ و تابع رادیکال $y=\sqrt[n]{x}$

نکته ۲: اگر f و g توابعی پیوسته و $D_f\cap D_g$ به‌صورت یک بازه یا اجتماعی از بازه‌ها و بدون نقطه‌ی منفرد باشد، آن‌گاه توابع $f\pm g$ ، $f\times g$ ، $\frac{f}{g}$ و $\frac{g}{f}$ توابعی پیوسته‌اند.

نکته ۳: اگر f و g توابعی پیوسته و D_{fog} شامل نقطه‌ی منفرد نباشد، آن‌گاه تابع fog تابعی پیوسته است.

به‌طور مثال توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\frac{x}{x^2-1}$ ، توابعی پیوسته‌اند. پس تابع $fog(x)=\sin\frac{x}{x^2-1}$ ، تابعی پیوسته است. مشابه این مثال، به کمک این نکته می‌توان دسته‌ی بزرگی از توابع پیوسته را مطرح کرد.

نکته ۴: شرط آن‌که تابع چندضابطه‌ای f ، تابعی پیوسته باشد، آن است که:

آ) هر ضابطه‌ی تابع f در دامنه‌ی خود، تابعی پیوسته باشد.

ب) تابع f در نقطه یا نقاط مرزی خود پیوسته باشد.

به‌عنوان مثال تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-4x & x\ge 1 \\ \frac{3x}{x-2} & x<1 \end{cases}$ ، تابعی پیوسته است. زیرا هر ضابطه‌ی f روی دامنه‌ی خود تابعی پیوسته است و نیز تابع f در نقطه‌ی مرزی $x=1$ پیوسته است زیرا $f(1^+)=f(1^-)=f(1)=-3$

نکته ۵: وقتی گفته می‌شود تابع f ، همواره پیوسته است، به این معنی است که تابع f ، روی دامنه‌اش تابعی پیوسته است. ولی وقتی گفته می‌شود تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است، به این معنی است که تابع f پیوسته بوده و دامنه‌ی آن برابر $\mathbb{R}$ است.

مثال ۲۸۶: تابع $f(x)=\dfrac{x}{x^۳-۹x}$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ : همان‌طور که در نکته‌ی (۱) گفتیم، توابع کسری گویا، توابعی پیوسته‌اند و لذا تابع f که یک تابع کسری گویا است، هیچ نقطه‌ی ناپیوستگی ندارد. توجه کنید که تابع f در ریشه‌های مخرج تعریف نشده و این نقاط در دامنه‌ی تابع f حضور ندارند و در واقع در مورد پیوستگی یا ناپیوستگی تابع در این نقاط نمی‌توان صحبت کرد. پس گزینه‌ی (۱) صحیح است.

مثال ۲۸۷: اگر $f(x)=\dfrac{x}{x+۱}$ و $g(x)=\dfrac{۲x+۱}{x-۲}$ باشد، تابع fog در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ : اگر ضابطه‌ی تابع fog را تشکیل دهیم، داریم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=\dfrac{\dfrac{۲x+۱}{x-۲}}{\dfrac{۳x-۱}{x-۲}}$$

تابع fog یک تابع کسری گویا است، لذا تابعی پیوسته است و نقطه‌ی ناپیوستگی ندارد. پس گزینه‌ی (۱) صحیح است. البته بدون تشکیل ضابطه‌ی fog نیز می‌توانستیم این مثال را حل کنیم. چرا که f و g توابعی پیوسته‌اند و چون $D_{fog}=\mathbb{R}-\{۲,\frac{۱}{۳}\}$ شامل هیچ نقطه‌ی منفردی نیست، پس بنابر نکته‌ی (۳)، این تابع تابعی پیوسته است و نقطه‌ی ناپیوستگی ندارد.

مثال ۲۸۸: تابع $f(x)=[x]\sin\pi x$ کدام وضعیت را دارد؟ (مسألهٔ ۱۱ کتاب درسی- صفحهٔ ۱۰۰)

۱) تابعی پیوسته است. ۲) تابعی ناپیوسته است.

۳) فقط روی $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ پیوسته است. ۴) فقط روی $\mathbb{Z}$ پیوسته است.

پاسخ : حالت اول: اگر $x\notin\mathbb{Z}$، آن‌گاه $[x]$ تابعی پیوسته است. از طرفی تابع $y=\sin\pi x$ نیز تابعی پیوسته است. بنابر نکته‌ی (۲)، حاصل‌ضرب دو تابع پیوسته، تابعی پیوسته است. پس در این حالت تابع $f(x)=[x]\sin\pi x$ تابعی پیوسته است.

حالت دوم: اگر $x\in\mathbb{Z}$، آن‌گاه تابع $y=[x]$ تابعی ناپیوسته است. اما به‌ازای هر $x\in\mathbb{Z}$، داریم $\sin\pi x=۰$. به عبارت دیگر در این حالت تابع f در بیرون براکت دارای عامل صفرکننده بوده و در نقاط صحیح داریم $f(x)=۰$ و $\lim\limits_{x\to k\in\mathbb{Z}} f(x)=۰$. در نتیجه در نقاط صحیح نیز تابع f، تابعی پیوسته است. بنابراین در هر دو حالت تابع f، تابعی پیوسته بوده و در نتیجه گزینه‌ی (۱) صحیح است.

مثال ۲۸۹: تابع $f(x)=\dfrac{\tan x}{۱+\sin x}$ در چه نقاطی پیوسته است؟ (تمرین در کلاس کتاب درسی- صفحهٔ ۹۶)

۱) $\mathbb{R}-\{x\mid x=۲k-\frac{\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{x\mid x=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$

۳) $\mathbb{R}-\{x\mid x=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{x\mid x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$

پاسخ : صورت و مخرج کسر تابع f، توابعی پیوسته‌اند و بنابر نکته‌ی (۲)، f تابعی پیوسته است، یعنی تابع f در تمام نقاط دامنه‌ی خود پیوسته است. پس کافی است دامنه‌ی تابع f را تعیین کنیم. برای این منظور ریشه‌های $۱+\sin x$ و $\cos x$ (مخرج $\tan x$) را به‌دست آورده و از $\mathbb{R}$ کم می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}۱+\sin x=۰\Rightarrow \sin x=-۱\Rightarrow x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\\ \cos x=۰\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

توجه کنید که جواب عمومی $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$، تمام جواب‌های $x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ را نیز در بر دارد. پس $D_f=\mathbb{R}-\{x\mid x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$. بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

مثال ۲۹۰: حدود a برای آن‌که تابع $f(x)=\dfrac{x+۱}{x^۲+ax+۴}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، کدام است؟

۱) $۰<a<۲$ ۲) $-۴<a<۴$ ۳) $-۱<a<۳$ ۴) $-۳<a<۱$

پاسخ : وقتی گفته می‌شود که تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است، یعنی تابع f پیوسته بوده و دامنه‌ی آن $\mathbb{R}$ می‌باشد. به عبارت دیگر تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ پیوسته است. می‌دانیم تابع کسری گویا، تابعی پیوسته است. بنابراین تابع f تابعی پیوسته است و چون قرار است روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، کافی است دامنه‌ی تابع f، برابر $\mathbb{R}$ باشد. پس باید مخرج تابع f فاقد ریشه باشد. یعنی:

$$\Delta_{\text{مخرج}}<۰\Rightarrow a^۲-۱۶<۰\Rightarrow a^۲<۱۶\Rightarrow -۴<a<۴$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۲۹۱: به‌ازای کدام مجموعه مقادیر a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2+ax+1}$، تابعی پیوسته است؟

۱) $-1<a<1$ ۲) $-2<a<2$ ۳) $\varnothing$ ۴) $\mathbb{R}$

پاسخ: چون این تابع، یک تابع کسری گویا است و توابع کسری گویا توابعی پیوسته‌اند، پس این تابع به‌ازای هر مقدار a پیوسته است. توجه کنید که در این مثال لازم نیست دامنه‌ی تابع f برابر $\mathbb{R}$ باشد زیرا f فقط باید تابعی پیوسته باشد و نه روی $\mathbb{R}$ پیوسته. پس گزینه‌ی (۴) صحیح است.

مثال ۲۹۲: تابع $f(x)=\begin{cases}4 & x^2=|x|\\ x+2 & x^2\neq|x|\end{cases}$ در چند نقطه ناپیوسته است؟ (مسأله‌ی ۱۳ کتاب درسی - صفحه‌ی ۱۰۰)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

پاسخ: از معادله‌ی $x^2=|x|$ نتیجه می‌شود که ±1 یا $x=0$. بنابراین ضابطه‌ی تابع f را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$f(x)=\begin{cases}4 & x=0 \text{ یا } 1 \text{ یا } -1\\ x+2 & x\neq 0,\pm1\end{cases}$$

ضابطه‌ی $y=x+2$ چندجمله‌ای است و بنابراین روی دامنه‌اش پیوسته است. لذا براساس نکته‌ی (۴)، پیوستگی تابع f را در نقاط مرزی $x=0,\pm1$ بررسی می‌کنیم.

$4=f(0)\neq\lim\limits_{x\to0}f(x)=2\Rightarrow$ f در $x=0$ ناپیوسته است.

$4=f(1)\neq\lim\limits_{x\to1}f(x)=3\Rightarrow$ f در $x=1$ ناپیوسته است.

$4=f(-1)\neq\lim\limits_{x\to-1}f(x)=1\Rightarrow$ f در $x=-1$ ناپیوسته است.

بنابراین تابع f در سه نقطه ناپیوسته است و بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

مثال ۲۹۳: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}x^2 & x^2\geq 2|x|\\ 2|x| & x^2<2|x|\end{cases}$ در چند نقطه ناپیوسته است؟ (مسأله‌ی ۱۶ کتاب درسی - صفحه‌ی ۱۰۰)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: ابتدا نامعادلات $x^2<2|x|$ و $x^2\geq2|x|$ را حل می‌کنیم و ضابطه‌ی تابع f را ساده‌تر می‌کنیم.

$$x^2<2|x|\Rightarrow|x|^2<2|x|\Rightarrow|x|^2-2|x|<0\Rightarrow|x|(|x|-2)<0\xrightarrow{|x|\geq0}|x|<2\Rightarrow-2<x<2\,,\,x\neq0$$

مجموعه جواب نامعادله‌ی $x^2\geq2|x|$، متمم مجموعه جواب نامعادله‌ی $x^2<2|x|$ است. پس ضابطه‌ی تابع به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq2 \text{ یا } x\leq-2 \text{ یا } x=0\\ 2|x| & -2<x<2\,,\,x\neq0\end{cases}$$

هر یک از ضابطه‌ها در نقاط درونی دامنه‌ی خود تابعی پیوسته‌اند. بنابراین پیوستگی تابع f را فقط در نقاط مرزی $x=0$ و $x=\pm2$، بررسی می‌کنیم. داریم:

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0\Rightarrow$ f در $x=0$ پیوسته است.

$\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=f(2)=4\Rightarrow$ f در $x=2$ پیوسته است.

$\lim\limits_{x\to(-2)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^-}f(x)=f(-2)=4\Rightarrow$ f در $x=-2$ پیوسته است.

بنابراین f در تمام نقاط دامنه‌اش ($\mathbb{R}$) پیوسته است و لذا تابعی پیوسته بوده و نقطه‌ی ناپیوستگی ندارد. پس گزینه‌ی (۱) صحیح است.

مثال ۲۹۴: اگر تابع $f(x)=\begin{cases}x^2-ax+1 & x\leq1\\ x-2a & x>1\end{cases}$، تابعی پیوسته باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) صفر ۴) ۱

پاسخ: چون هر یک از ضابطه‌ها چندجمله‌ای هستند، پس در دامنه‌ی خود پیوسته‌اند. بنابراین برای آن‌که f تابعی پیوسته باشد، کافی است در نقطه‌ی مرزی $x=1$ پیوسته باشد.

$$\left.\begin{aligned}f(1)=f(1^-)&=1-a+1=2-a\\ f(1^+)&=1-2a\end{aligned}\right\}\Rightarrow 2-a=1-2a\Rightarrow a=-1$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۲۹۵: به‌ازای کدام مقدار m تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{x^2-1} & x>1\\ mx^2 & x\le 1\end{cases}$، تابعی پیوسته است؟

۱) $-\frac{\pi}{4}$ ۲) $-\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{8}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

پاسخ: هریک از ضابطه‌ها در دامنه‌ی خود پیوسته‌اند، لذا کافی است تابع f در نقطه‌ی مرزی $x=1$ پیوسته باشد.

$$f(1)=f(1^-)=m$$

$$f(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{x^2-1}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\xrightarrow{HOP}\text{حاصل حد}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}x)}{2x}=-\frac{\pi}{4}$$

پس باید $m=-\frac{\pi}{4}$ باشد. لذا گزینه‌ی (۱) صحیح است.

مثال ۲۹۶: به‌ازای کدام مجموعه مقادیر a، تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax}{|x|} & x\ne 0\\ 1 & x=0\end{cases}$، تابعی پیوسته است؟

۱) $\{1\}$ ۲) $\{-1\}$ ۳) $\{-1,1\}$ ۴) $\varnothing$

پاسخ: تابع $y=\frac{ax}{|x|}$، تابعی پیوسته است، لذا کافی است تابع f در نقطه‌ی مرزی $x=0$ پیوسته باشد. داریم:

$$f(0)=1$$

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax}{x}=a \qquad f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax}{-x}=-a$$

بدیهی است که به‌ازای هیچ مقدار a، رابطه‌ی $f(0^+)=f(0^-)=f(0)$ برقرار نخواهد شد. پس گزینه‌ی (۴) صحیح است.

مثال ۲۹۷: به‌ازای کدام مقدار m تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x^3+x} & x\ne 0\\ m-1 & x=0\end{cases}$، روی $\mathbb{R}$ پیوسته است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

پاسخ: تابع $y=\frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x^3+x}$، تابعی پیوسته است. بنابراین برای این‌که تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، کافی است در نقطه‌ی مرزی $x=0$ پیوسته باشد.

$$\begin{cases}f(0)=m-1\\ \lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x^3+x}\ \overset{\text{هم‌ارزی برنولی و کم‌توان}}{=\!=\!=}\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{2x}{3}-1}{x}=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)\Rightarrow m-1=\frac{2}{3}\Rightarrow m=\frac{5}{3}\Rightarrow \text{گزینه‌ی (۴) صحیح است.}$$

مثال ۲۹۸: به‌ازای کدام مقدار m تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}mx+2 & [x]>-2\\ \dfrac{\sqrt{1-3x}+2x}{\sqrt[3]{x}+1} & [x]\le -2\end{cases}$، تابعی پیوسته است؟

۱) $-\frac{7}{8}$ ۲) $-\frac{7}{4}$ ۳) $\frac{7}{4}$ ۴) $\frac{7}{8}$

پاسخ: ضابطه‌ی تابع f را می‌توان به‌صورت مقابل نوشت:

$$f(x)=\begin{cases}mx+2 & x\ge -1\\ \dfrac{\sqrt{1-3x}+2x}{\sqrt[3]{x}+1} & x<-1\end{cases}$$

چون هر ضابطه در دامنه‌ی خود پیوسته است، لذا کافی است تابع f در نقطه‌ی مرزی $x=-1$ پیوسته باشد.

$$f(-1)=f((-1)^+)=-m+2$$

$$f((-1)^-)=\lim_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{\sqrt{1-3x}+2x}{\sqrt[3]{x}+1}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\xrightarrow{HOP}\text{حاصل حد}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{\frac{-3}{2\sqrt{1-3x}}+2}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{3}}=\frac{15}{4}$$

$$f((-1)^+)=f((-1)^-)=f(-1)\Rightarrow -m+2=\frac{15}{4}\Rightarrow m=-\frac{7}{4}\Rightarrow \text{گزینه‌ی (۲) صحیح است.}$$

مثال ۲۹۹: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2nx}{nx+5}$، در چند نقطه ناپیوسته است؟

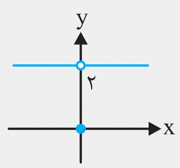
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

پاسخ: تابع f، حد یک دنباله است. به چنین توابعی معمولاً **توابع حدی** گفته می‌شود. اگر $x=0$ باشد، آن‌گاه $f(x)=0$ و چنان‌چه $x\neq 0$، آن‌گاه با استفاده از قاعده‌ی پرتوان می‌توان نوشت:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2nx}{nx+5}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2nx}{nx}=2$$

بنابراین می‌توانیم ضابطه‌ی تابع f را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ 2 & x\neq 0\end{cases}$$



برای $x\neq 0$، تابع f برابر مقدار ثابت ۲ $f(x)=2$ بوده و لذا پیوسته است. ولی در $x=0$، حد تابع f با مقدار تابع برابر نیست. پس در $x=0$ تابع f ناپیوسته است. نمودار تابع f به صورت مقابل است. لذا تابع f در یک نقطه ناپیوسته و گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۳۰۰: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2x}{x^{2n}+3}$، در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: قبل از حل این مثال، مطلبی را از دنباله‌ها یادآوری می‌کنیم. در دنباله‌ها داشتیم:

$$\lim_{n\to+\infty}c^n=\begin{cases}0 & ;\ |c|<1\\ 1 & ;\ c=1\\ \text{موجود نیست.} & ;\ c=-1\\ +\infty & ;\ c>1\\ \text{موجود نیست.} & ;\ c<-1\end{cases}$$

دلیل این‌که مطلب فوق را یادآوری کردیم این است که در مخرج کسر مربوط به ضابطه‌ی تابع f، یک دنباله‌ی نمایی دیده می‌شود. در واقع $x^{2n}=(x^2)^n$ یک دنباله‌ی نمایی است. با فرض $c=x^2$، معلوم می‌شود که حالت $c=-1$ و $c<-1$، در این دنباله اتفاق نمی‌افتد. پس می‌توان نوشت:

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{2x}{x^{2n}+3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2x}{(x^2)^n+3}=\begin{cases}\frac{2x}{3} & x^2<1\\ \frac{2x}{4} & x^2=1\\ 0 & x^2>1\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{2x}{3} & -1<x<1\\ \frac{1}{2} & x=1\\ -\frac{1}{2} & x=-1\\ 0 & x>1 \text{ یا } x<-1\end{cases}$$

بدیهی است که هریک از ضابطه‌ها در دامنه‌ی خود پیوسته‌اند. اما تابع f در نقاط مرزی $x=1$ و $x=-1$ ناپیوسته است. (چرا؟) پس تابع f فقط در دو نقطه ناپیوسته بوده و لذا گزینه‌ی (۳) صحیح است.

نکته: اگر f تابعی پیوسته و $\operatorname{sgn}(x)$ و $H(x)$ به‌ترتیب توابع علامت و هوی‌ساید باشند، آن‌گاه توابع $g(x)=\operatorname{sgn}(f(x))$ و $h(x)=H(f(x))$ کران‌دار بوده و در ریشه‌های ساده یا مکرر از مرتبه‌ی فرد $f(x)=0$ ناپیوسته‌اند، به شرط آن‌که تابع f حداقل در یک همسایگی چپ یا راست این ریشه‌ها برابر مقدار ثابت صفر نباشد.

مثال ۳۰۱: اگر تابع $f(x)=(x^2-bx+a)\operatorname{sgn}(x^2+x-2)$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، $a+b$ کدام است؟ (مسأله‌ی ۱۷ کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۰۰)

۱) ۲- ۲) صفر ۳) ۱- ۴) ۳-

پاسخ: تابع $y=x^2+x-2$، تابعی پیوسته است (چندجمله‌ای است). براساس نکته‌ی قبل تابع $y=\operatorname{sgn}(x^2+x-2)$ کران‌دار و در ریشه‌های $x^2+x-2=0$، یعنی در $x=1$ و $x=-2$ ناپیوسته است. لذا برای این‌که تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، لازم است $x=1$ و $x=-2$ عامل صفرکننده برای تابع $g(x)=x^2-bx+a$ باشد. به بیان دیگر باید تابع $g(x)=x^2-bx+a$ به‌ازای $x=1$ و $x=-2$ صفر شود. پس:

$$\begin{cases}g(1)=0\\ g(-2)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1-b+a=0\\ 4+2b+a=0\end{cases}\Rightarrow b=-1\ ,\ a=-2$$

در نتیجه $a+b=-3$ و لذا گزینه‌ی (۴) صحیح است.

مثال ۳۰۲: اگر تابع $f(x)=(x^۳+ax+b)H(x^۲-۳x+۲)$، تابعی پیوسته باشد، $b-a$ کدام است؟

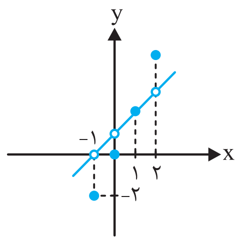
۱) ۱۵ ۲) ۱۳ ۳) ۸ ۴) ۱

پاسخ: تـابع $y=x^۲-۳x+۲$، تـابعی پیوسته اسـت. لـذا براسـاس نکتـه‌ی قبـل تـابع $H(x^۲-۳x+۲)$، تـابعی کـران‌دار ولـی در ریشه‌های $x^۲-۳x+۲=۰$ یعنی در نقاط $x=۱$ و $x=۲$ ناپیوسته است. بنابراین برای آن‌که f تـابعی پیوسـته باشـد، لازم اسـت $x=۱$ و $x=۲$ عامل صفرکننده برای تابع $g(x)=x^۳+ax+b$ باشد. به عبارت دیگر باید تابع $g(x)=x^۳+ax+b$ به‌ازای $x=۱$ و $x=۲$ صفر شود. پس:

$$\begin{cases}g(۱)=۰\\g(۲)=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۱+a+b=۰\\۸+۲a+b=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=-۱\\۲a+b=-۸\end{cases}\Rightarrow a=-۷\ ,\ b=۶$$

پس $b-a=۱۳$ و لذا گزینه‌ی (۲) صحیح است.

بررسی پیوستگی توابعی که ضابطه‌ی آن‌ها روی $\mathbb{Z}$ عوض می‌شوند.



تابع $f(x)=\begin{cases}x+۱ & x\notin\mathbb{Z}\\ ۲x & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ را در نظر بگیرید. نمودار این تابع به‌صورت مقابل است.

همان‌طور که در نمودار ملاحظه می‌کنید، این تابع در هر نقطه با طول غیرصحیح پیوسته اسـت. دلیـل ایـن امـر ایـن است که در نقاط غیرصحیح حد و مقدار تابع از ضابطه‌ی $f_۱(x)=x+۱$ به‌دست می‌آید و این تـابع، تـابعی پیوسـته است. هم‌چنین در هر نقطه با طول صحیح مانند $x=a$، مقدار تابع از ضابطه‌ی $f_۲(x)=۲x$ و حد تابع در $x=a$ از رابطه‌ی $f_۱(x)=x+۱$ به‌دست می‌آید و لذا تابع f وقتی در $x=a$ پیوسته است که $f_۱(a)=f_۲(a)$. در این‌جا تنها نقطه‌ای که طول آن صـحیح بوده و تابع f در آن پیوسته است، نقطه‌ی $x=۱$ می‌باشد. در واقع در $x=۱$، حد تابع که از ضابطه‌ی $f_۱(x)=x+۱$ به‌دست می‌آید، با مقـدار تـابع که از ضابطه‌ی $f_۲(x)=۲x$ به‌دست می‌آید، برابر است. ولی در نقاط با طول صحیح به جز $x=۱$، این اتفاق نمی‌افتد.

نکته: در مورد توابع به فرم $f(x)=\begin{cases}f_۱(x) & x\in\mathbb{Z}\\ f_۲(x) & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ مطالب زیر را خواهیم داشت:

آ) اگر $f_۲$ تابعی پیوسته باشد، آن‌گاه تابع f در هر نقطه‌ی غیرصحیح پیوسته خواهد بـود. زیـرا حـد و مقـدار تـابع در نقـاط غیرصـحیح از ضابطه $f_۲$ به‌دست می‌آید.

ب) تابع f در هر نقطه‌ی با طول صحیح مانند $x=a$ وقتی پیوسته است که $\lim\limits_{x\to a}f_۲(x)=f_۱(a)$. بنابراین اگر تـابع $f_۲$ در $x=a$ پیوسـته باشـد، در این صورت تابع f در $x=a$ وقتی پیوسته است که $f_۲(a)=f_۱(a)$ باشد.

پ) اگر $f_۲$ روی $\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد، آن‌گاه تابع f در ریشه‌های معادله‌ی $f_۱(x)=f_۲(x)$ نیز پیوسته است.

مثال ۳۰۳: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}۳x^۲-x & x\notin\mathbb{Z}\\ ۴ & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$، در چند نقطه با طول صحیح پیوسته است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

پاسخ: در نقاط با طول صحیح حد تابع از $f_۱(x)=۳x^۲-x$ و مقدار تابع از $f_۲(x)=۴$ به‌دست می‌آید. چون توابع $f_۱$ و $f_۲$ توابعی پیوسته‌انـد، پس شرط پیوستگی تابع f در نقطه‌ای به طول صحیح $x=a$ آن است که $f_۱(a)=f_۲(a)$، بنابراین:

$$۳a^۲-a=۴\Rightarrow ۳a^۲-a-۴=۰\Rightarrow a=-۱ \text{ یا } a=\frac{۴}{۳}$$

اما $a=\frac{۴}{۳}\notin\mathbb{Z}$. پس تابع f در یک نقطه با طول صحیح و آن هم در $x=-۱$، پیوسته است. بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۳۰۴: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\notin\mathbb{Z}\\ [-x^۲] & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ در چند تا از نقاط $x=\frac{۱}{۲}$، $x=۱$ و $x=۰$، پیوسته است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: در نقطه‌ی غیرصحیح $x=\frac{۱}{۲}$، حد و مقدار از ضابطه‌ی $f_۱(x)=x^۲$ به‌دست می‌آید. چون $f_۱$ تابعی پیوسته است، پس تابع f در $x=\frac{۱}{۲}$ پیوسته می‌باشد. اما در نقاط با طول صحیح $x=۱$ و $x=۰$، حد تابع از ضابطه‌ی $f_۱(x)=x^۲$ و مقدار تابع از ضـابطه‌ی $f_۲(x)=[-x^۲]$ بـه‌دست می‌آید. داریم:

$$\left.\begin{matrix}f(۰)=[۰]=۰\\ \lim\limits_{x\to ۰}f(x)=\lim\limits_{x\to ۰}x^۲=۰\end{matrix}\right\}\Rightarrow \text{تابع } f \text{ در } x=۰ \text{ پیوسته است.}\quad ,\quad \left.\begin{matrix}f(۱)=[-۱]=-۱\\ \lim\limits_{x\to ۱}f(x)=\lim\limits_{x\to ۱}x^۲=۱\end{matrix}\right\}\Rightarrow \text{تابع } f \text{ در } x=۱ \text{ ناپیوسته است.}$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

بررسی پیوستگی توابعی که ضابطه‌ی آن‌ها روی $\mathbb{Q}$ عوض می‌شوند.

همان‌طور که در مبحث حد گفته شد، حد تابع f در هر نقطه‌ی گویا یا گنگ، از هر دو ضابطه به‌دست می‌آید ولی مقدار تابع در نقطه‌ی $x=a$، بسته به این‌که a گویا یا گنگ باشد، به‌ترتیب از ضابطه‌ی اول یا دوم به‌دست می‌آید.

نکته: در مورد تابع به فرم $f(x)=\begin{cases} f_{۱}(x) & x\in\mathbb{Q} \\ f_{۲}(x) & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ مطالب زیر را خواهیم داشت:

آ) در صورتی‌که توابع $f_{۱}$ و $f_{۲}$، توابعی پیوسته باشند، آن‌گاه ریشه‌های معادله‌ی $f_{۱}(x)=f_{۲}(x)$، تنها نقاطی هستند که تابع f در آن نقاط پیوسته است.

ب) اگر حداقل یکی از توابع $f_{۱}$ یا $f_{۲}$ تابع ناپیوسته‌ای باشد، در صورتی که حد تابع f و مقدار آن در نقطه‌ی دلخواه a از دامنه‌ی f برابر باشد، باز هم تابع f در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته است.

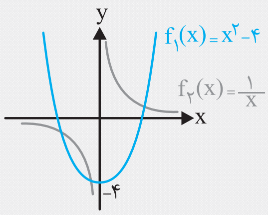
مثال ۳۰۵: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Q} \\ ۲-x & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$، در چند نقطه پیوسته است؟ (مثال کتاب درسی- صفحه‌ی ۹۷)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

پاسخ: چون هریک از ضابطه‌ها، تابعی پیوسته‌اند، پس تابع f تنها در ریشه‌های معادله‌ی $x=۲-x$ یعنی $x=۱$ پیوسته است. بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۳۰۶: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۴ & x\in\mathbb{Q} \\ \frac{۱}{x} & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$، در چند نقطه پیوسته است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار



پاسخ: توابع $f_{۱}(x)=x^{۲}-۴$ و $f_{۲}(x)=\frac{۱}{x}$، توابعی پیوسته‌اند. پس تابع f در ریشه‌های معادله‌ی $f_{۱}(x)=f_{۲}(x)$ پیوسته است. برای حل این معادله از روش هندسی کمک می‌گیریم. یعنی نمودار توابع $f_{۱}$ و $f_{۲}$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. در این صورت تعداد نقاط تلاقی این دو نمودار برابر تعداد ریشه‌های معادله‌ی مذکور می‌باشد. با توجه به نمودار، معادله‌ی $f_{۱}(x)=f_{۲}(x)$ دارای سه ریشه است. پس تابع f در سه نقطه پیوسته بوده و لذا گزینه‌ی (۳) صحیح است.

مثال ۳۰۷: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} [۲x] & x\in\mathbb{Q} \\ [x+\frac{۱}{۵}] & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ در کدام نقطه‌ی زیر پیوسته است؟

۱) $x=۱$ ۲) $x=\sqrt{۲}$ ۳) $x=\frac{۱}{۲}$ ۴) $x=\frac{۱}{۳}$

پاسخ: $f_{۱}(x)=[۲x]$ و $f_{۲}(x)=[x+\frac{۱}{۵}]$، توابعی ناپیوسته‌اند. لذا تابع f در نقطه‌ای پیوسته است که حد و مقدار تابع در آن نقطه برابر باشد. می‌دانیم وقتی $x\to a$، آن‌گاه متغیر x هم با مقادیر گویا و هم با مقادیر گنگ به عدد a نزدیک می‌شود. بنابراین حد تابع f در نقاط فوق از هر دو ضابطه محاسبه می‌شود و چنان‌چه حد ضابطه‌ها در a موجود و برابر باشد، آن‌گاه f در a حد دارد. اکنون به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه‌ی (۱):

$$\left.\begin{aligned} &x\in\mathbb{Q}: \lim_{x\to ۱} f(x)=\lim_{x\to ۱}[۲x]= \text{موجود نیست.} \\ &x\notin\mathbb{Q}: \lim_{x\to ۱} f(x)=\lim_{x\to ۱}[x+\tfrac{۱}{۵}]=۱ \\ &f(۱)=[۲]=۲ \end{aligned}\right\}\Rightarrow \text{f در } x=۱ \text{ ناپیوسته است.}$$

گزینه‌ی (۲):

$$\left.\begin{aligned} &x\in\mathbb{Q}: \lim_{x\to\sqrt{۲}} f(x)=\lim_{x\to\sqrt{۲}}[۲x]=۲ \\ &x\notin\mathbb{Q}: \lim_{x\to\sqrt{۲}} f(x)=\lim_{x\to\sqrt{۲}}[x+\tfrac{۱}{۵}]=۱ \\ &f(\sqrt{۲})=[\sqrt{۲}+\tfrac{۱}{۵}]=۱ \end{aligned}\right\}\Rightarrow \text{f در } x=\sqrt{۲} \text{ ناپیوسته است.}$$

گزینه‌ی (۳):

$$\left.\begin{array}{l} x\in\mathbb{Q}:\ \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}[2x]=\text{موجود نیست.}\\ x\notin\mathbb{Q}:\ \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}[x+\frac{1}{5}]=0\\ f(\frac{1}{2})=[2(\frac{1}{2})]=1 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

f در $x=\frac{1}{2}$ ناپیوسته است.

گزینه‌ی (۴):

$$\left.\begin{array}{l} x\in\mathbb{Q}:\ \lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}[2x]=[\frac{2}{3}]=0\\ x\notin\mathbb{Q}:\ \lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}[x+\frac{1}{5}]=0\\ f(\frac{1}{3})=[\frac{2}{3}]=0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

f در $x=\frac{1}{3}$ پیوسته است.

پس گزینه‌ی (۴) صحیح است.

مثال ۳۰۸: اگر $f(x)=\begin{cases}\pi & x\in\mathbb{Q}\\ x+1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$، آن‌گاه تابع fof در چند نقطه پیوسته است؟

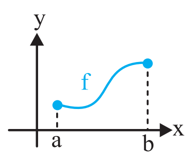
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

پاسخ: با توجه به ضابطه‌ی تابع f، مشخص می‌شود که برای هر $x\in\mathbb{R}$، مقدار $f(x)$ گنگ است. پس $fof(x)=f(x)+1$. در نتیجه تعداد نقاط پیوستگی تابع fof با تعداد نقاط پیوستگی تابع $f(x)+1$ برابر است. چون تابع $y=1$ همواره پیوسته است، کافی است تعداد نقاط پیوستگی $f(x)$ را بیابیم. براساس آن‌چه قبلاً آموختیم، تابع f فقط در نقطه‌ی $x=\pi-1$ $(x+1=\pi\Rightarrow x=\pi-1)$ پیوسته است. بنابراین تابع fof نیز فقط در یک نقطه پیوسته است و لذا گزینه‌ی (۲) صحیح است.

پیوستگی روی بازه

تعریف پیوستگی روی بازه: تابع f را که در تمام نقاط بازه‌ی I تعریف شده باشد، در بازه‌ی I پیوسته می‌گوییم، هرگاه در تک‌تک نقاط این بازه پیوسته باشد. بدیهی است که اگر بازه‌ی I شامل نقطه‌ی انتهایی چپ یا راست خود باشد، آن‌گاه پیوستگی در این نقاط به مفهوم پیوستگی یک‌طرفه می‌باشد. به‌عنوان مثال اگر بازه‌ی I به صورت $[a,b]$ باشد، پیوستگی در $x=a$ به معنی پیوستگی راست در این نقطه و پیوستگی در $x=b$ به معنی پیوستگی چپ در این نقطه است.

نکته ۱: با توجه به تعریف پیوستگی روی بازه، پیش‌فرض این‌که تابع f روی بازه‌ی I پیوسته باشد، آن است که تابع f در تمام نقاط بازه‌ی I تعریف شده باشد. به عبارت دیگر بازه‌ی I باید زیرمجموعه‌ای از دامنه‌ی تابع f باشد. زیرا همان‌طور که قبلاً مفصل گفتیم، شرط صحبت کردن در مورد پیوستگی یا ناپیوستگی تابع f در نقطه‌ی $x=a$، تعریف‌شده بودن تابع f در a و نیز وجود حداقل یک همسایگی چپ یا راست در این نقطه می‌باشد. از آن‌جا که هیچ‌یک از نقاط بازه‌ی I نمی‌تواند منفرد باشد، پس شرط صحبت کردن در مورد پیوستگی یا ناپیوستگی f در بازه‌ی I آن است که تابع f در تمام نقاط این بازه تعریف شده باشد. بنابراین اگر تابع f در نقطه‌ای از بازه‌ی I تعریف‌نشده باشد، در مورد پیوستگی یا ناپیوستگی تابع f در آن بازه نمی‌توان صحبت کرد. به‌عنوان مثال در مورد پیوستگی یا ناپیوستگی تابع $f(x)=\frac{1}{x-1}$ در بازه‌ی $[0,2]$ نمی‌توان صحبت کرد. زیرا تابع f در $x=1\in[0,2]$ تعریف نشده است. به عبارت دیگر $[0,2]\not\subset D_f$



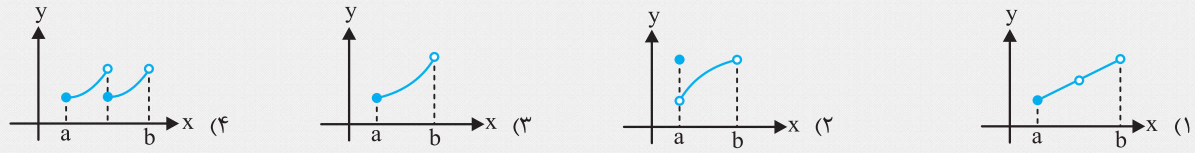
نکته ۲: از دیدگاه هندسی وقتی تابع f در بازه‌ی I پیوسته است، آن‌گاه نمودار این تابع را در بازه‌ی I می‌توان بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم کرد.

نکته ۳: درصورتی‌که دامنه‌ی تابع فقط از یک بازه مانند I تشکیل شده باشد، آن‌گاه دو گزاره‌ی زیر معادل‌اند:

آ) تابع f روی بازه‌ی I پیوسته است. **ب)** f تابعی پیوسته است.

توجه کنید که در غیر این صورت مفهوم تابع پیوسته با پیوستگی روی بازه، کمی متفاوت است. به‌عنوان مثال تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ تابعی پیوسته است زیرا در تمام نقاط دامنه‌ی خود پیوسته است. در صورتی‌که همین تابع در هر بازه‌ی شامل $x=0$ حتی شرایط صحبت در مورد پیوستگی یا ناپیوستگی را ندارد. هم‌چنین نمودار تابع پیوسته‌ی $f(x)=\frac{1}{x}$ را نمی‌توان بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم کرد. در صورتی‌که اگر f در یک بازه پیوسته باشد، حتماً می‌توان نمودار f را در آن بازه بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم کرد.

مثال ۳۰۹: کدام‌یک از نمودارهای زیر در بازه‌ی $[a,b)$ پیوسته‌اند؟



پاسخ : در گزینه‌ی (۱)، تابع شرایط صحبت در مورد پیوستگی یا ناپیوستگی در بازه‌ی $[a,b)$ را ندارد، زیرا تابع در نقطه‌ای از این بازه تعریف نشده است. در گزینه‌ی (۲)، تابع در $x=a$ ناپیوسته است، لذا تابع f در بازه‌ی $[a,b)$ ناپیوسته است. در گزینه‌ی (۴) تابع در یک نقطه از بازه‌ی $[a,b)$ ناپیوسته و لذا در این بازه ناپیوسته است. اما در گزینه‌ی (۳) تابع در هر نقطه از بازه‌ی $[a,b)$ پیوسته بوده و لذا در این بازه پیوسته است. پس گزینه‌ی (۳) صحیح است.

مثال ۳۱۰: پیوستگی تابع $f(x)=x[x]$ را روی بازه‌ی $[۰,۱]$ بررسی کنید.

پاسخ : به‌ازای هر x در بازه‌ی $(۰,۱)$، داریم $f(x)=۰$ و لذا تابع f پیوسته است. طبق تعریف پیوستگی روی بازه، از آن‌جایی‌که نقاط $x=۰$ و $x=۱$، نقاط انتهایی بازه هستند، لذا باید در $x=۰$ پیوستگی راست و در $x=۱$ پیوستگی چپ داشته باشیم. داریم:

$$\begin{cases} f(۱)=۱ \\ f(۱^-)=۰ \end{cases} \Rightarrow f(۱)\neq f(۱^-) \Rightarrow$$ در $x=۱$ ناپیوسته است. f ،
$$\begin{cases} f(۰)=۰ \\ f(۰^+)=۰ \end{cases} \Rightarrow f(۰)=f(۰^+) \Rightarrow$$ f در $x=۰$ پیوسته است.

بنابراین تابع f در یک نقطه از بازه‌ی $[۰,۱]$ ناپیوسته بوده و لذا f در بازه‌ی $[۰,۱]$ ناپیوسته است.

مثال ۳۱۱: تابع $f(x)=\dfrac{x^۳+۲x^۲-x+۱}{x^۲-۱}$ روی چه بازه‌هایی پیوسته است؟ (مثال کتاب درسی- صفحه‌ی ۹۵)

پاسخ : می‌دانیم توابع کسری گویا توابعی پیوسته‌اند، یعنی روی دامنه‌ی خود پیوستگی دارند. دامنه‌ی این تابع برابر $D_f=\mathbb{R}-\{-۱,۱\}$ است. پس تابع f روی بازه‌هایی که شامل نقاط $x=۱$ و $x=-۱$ نباشد، پیوسته است. پس می‌توان گفت تابع f روی بازه‌های $(-\infty,-۱)$، $(-۱,۱)$ و $(۱,+\infty)$ پیوسته است. همان‌طور که قبلاً نیز گفتیم در مورد پیوستگی و ناپیوستگی تابع f در نقاط $x=\pm۱$ نمی‌توان صحبت کرد.

مثال ۳۱۲: تابع $f(x)=\dfrac{x+۱}{x^۲-x}$ در کدام‌یک از بازه‌های زیر پیوسته است؟

۱) $(-۱,۱)$ ۲) $(۰,+\infty)$ ۳) $(-۲,۳)$ ۴) $(-۲,-۱)$

پاسخ : تابع f کسری گویا بوده و در هر بازه که شامل ریشه‌های مخرج یعنی $x=۰$ و $x=۱$ نباشد، پیوسته است. تنها بازه‌ای که شامل هیچ یک از ریشه‌های مخرج یعنی نقاط $x=۰$ و $x=۱$ نیست، بازه‌ی ارائه‌شده در گزینه‌ی (۴) است.

مثال ۳۱۳: به‌ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} a+\sin(\frac{\pi}{۲}x) & x<۱ \\ \dfrac{ax^۲+x}{x+۱} & x\geq ۱ \end{cases}$ در بازه‌ی $[۰,۲]$ پیوسته است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) صفر ۴) ۱

پاسخ : هر یک از ضابطه‌ها در نقاط درونی دامنه‌ی خود پیوسته‌اند. لذا برای پیوستگی تابع f روی بازه‌ی $[۰,۲]$، لازم است تابع f در نقطه‌ی مرزی خود یعنی $x=۱$ نیز پیوسته باشد. پس باید داشته باشیم:

$$f(۱^+)=f(۱^-)=f(۱)\Rightarrow \frac{a+۱}{۲}=a+۱\Rightarrow a=-۱$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۳۱۴: تابع $f(x)=\begin{cases}[x]+a[-x] & x<۲\\ x^۲+ax+b & x\geq ۲\end{cases}$ در بازه‌ی $[۱,۳]$ پیوسته است. $a-b$ کدام است؟

۱) ۴   ۲) ۳   ۳) ۲   ۴) ۱

پاسخ: ضابطه‌ی دوم یک چندجمله‌ای است. لذا در همه‌جا و بالاخص در بازه‌ی $[۲,۳]$ پیوسته است. ضابطه‌ی اول نیز در هر نقطه از بازه‌ی $(۱,۲)$ پیوسته است. بنابراین برای این‌که تابع f در بازه‌ی $[۱,۳]$ پیوسته باشد، لازم است تابع f در نقطه‌ی مرزی $x=۲$ پیوسته بوده و در نقطه‌ی انتهایی $x=۱$ پیوستگی راست داشته باشد.

$$\begin{cases}f(۱)=۱-a\\ f(۱^+)=[۱^+]+a[-(۱^+)]=۱-۲a\end{cases}\Rightarrow ۱-a=۱-۲a\Rightarrow a=۰$$

$$\begin{cases}f(۲)=f(۲^+)=۴+۲a+b\overset{a=۰}{=\!=}۴+b\\ f(۲^-)=[۲^-]+a[-(۲^-)]\overset{a=۰}{=\!=}۱\end{cases}\Rightarrow ۴+b=۱\Rightarrow b=-۳$$

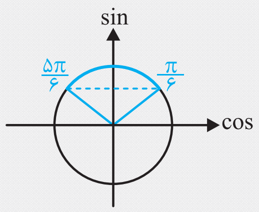
پس $a-b=۳$ و بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۳۱۵: اگر $f(x)=\sqrt{۲x-۱}$ و $g(x)=\sin x$ باشد، تابع fog در کدام‌یک از بازه‌های زیر پیوسته است؟

۱) $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ ۲) $[-\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۶}]$ ۳) $[\frac{\pi}{۲},\pi]$ ۴) $[\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴}]$

پاسخ: داریم $fog(x)=\sqrt{۲\sin x-۱}$. تابع $y=۲\sin x-۱$، تابعی پیوسته است، لذا تابع fog نیز در هر بازه که زیرمجموعه‌ی دامنه‌ی تابع fog باشد، پیوسته است.

$$۲\sin x-۱\geq ۰\Rightarrow \sin x\geq \frac{۱}{۲}\Rightarrow D_f: x\in[۲k\pi+\frac{\pi}{۶},۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}]\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$



بنابراین تابع fog در هر بازه که زیرمجموعه‌ی بازه‌های فوق باشد، پیوسته است. از بین بازه‌های داده‌شده، تنها بازه‌ی ارائه‌شده در گزینه‌ی (۴) این ویژگی را دارد. پس گزینه‌ی (۴) صحیح می‌باشد.

دسته‌بندی نقاط پیوستگی و ناپیوستگی در توابع مهم

برای یافتن نقاط پیوستگی و ناپیوستگی تابع f روی یک بازه، ابتدا باید به نوع تابع و ویژگی‌های آن توجه داشت. اگرچه این توابع را قبلاً بررسی کردیم، اما به دلیل اهمیت موضوع، بار دیگر آن‌ها را به‌طور یک‌جا جمع‌بندی می‌کنیم. توابع زیر توابعی هستند که معمولاً در تست‌ها ظاهر می‌شوند.

۱) **تابع چندجمله‌ای:** این توابع در $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند و نقطه‌ی ناپیوستگی ندارند.

۲) **توابع مثلثاتی $y=\sin ax$ و $y=\cos ax$:** این توابع نیز در $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند و نقطه‌ی ناپیوستگی ندارند.

۳) **توابع کسری گویا:** این توابع در دامنه‌ی خود پیوسته‌اند. بنابراین در هر بازه که زیرمجموعه‌ی دامنه‌ی این توابع باشد نیز پیوسته می‌باشند.

۴) **توابع رادیکالی به صورت $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$:** اگر تابع g پیوسته باشد، آن‌گاه تابع f در هر بازه مانند I که $I\subseteq D_f$ باشد، پیوسته است.

۵) **توابع چندضابطه‌ای:** نقاط ناپیوسته‌ی این توابع معمولاً به یکی از دو صورت زیر است:

آ) نقاطی که هر یک از ضابطه‌ها با توجه به دامنه‌ی تعریف خود در آن نقاط ناپیوسته است.

ب) احتمالاً نقاط مرزی تابع که باید پیوستگی در این نقاط بررسی شود.

۶) **توابع شامل براکت به فرم $h(x)=g(x)[f(x)]$ که در آن f و g توابعی پیوسته‌اند و روی دامنه‌ی یکسانی تعریف شده‌اند:** همان‌طور که در جلسه‌ی قبل مفصل در مورد این‌گونه توابع صحبت کردیم، این تابع در نقاطی مانند $x=a$ که $f(a)\notin\mathbb{Z}$، پیوسته است و چنان‌چه $f(a)\in\mathbb{Z}$، تابع h ناپیوسته است، مگر آن‌که $x=a$ طول نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع درون براکت یعنی تابع f باشد و یا آن‌که تابع g در $x=a$ دارای عامل صفرکننده باشد. به عبارت دیگر $g(a)=۰$ باشد. هم‌چنین در حالتی که $f(a)\in\mathbb{Z}$ و h در $x=a$ ناپیوسته است، در صورتی که تابع درون براکت یعنی f در همسایگی $x=a$ صعودی باشد، تابع h در $x=a$ پیوستگی راست و چنان‌چه تابع درون براکت یعنی f در همسایگی $x=a$ نزولی باشد، تابع h در $x=a$ پیوستگی چپ خواهد داشت.

مثال ۳۱۶: تابع $f(x)=\frac{۱}{۵}x^۳+\frac{۱}{\pi-۱}x^۲-\frac{۳}{۷}$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) صفر   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۳

پاسخ: این تابع چندجمله‌ای است و لذا نقطه‌ی ناپیوستگی ندارد و روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. پس گزینه‌ی (۱) صحیح است.

مثال ۳۱۷: تعداد نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{x}{x^3-x}$، چند تا است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: توابع کسری گویا روی دامنه‌ی خود پیوسته‌اند و نقطه‌ی ناپیوستگی ندارند. پس این تابع در هیچ نقطه‌ای ناپیوسته نیست. لذا گزینه‌ی (۱) صحیح است.

مثال ۳۱۸: تابع $f(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt{4-x}$ در کدام بازه‌ی زیر پیوسته است؟

۱) $[1,+\infty)$ ۲) $[4,+\infty)$ ۳) $[1,4]$ ۴) $(-\infty,4]$

پاسخ: هریک از توابع $y=x-1$ و $y=4-x$ پیوسته‌اند، لذا توابع $y=\sqrt{x-1}$ و $y=\sqrt{4-x}$ در هر بازه که زیرمجموعه‌ی دامنه‌ی خود باشد، پیوسته‌اند. از طرفی می‌دانیم تفاضل دو تابع پیوسته که روی دامنه‌ی مشترکی تعریف شده باشند، پیوسته است. پس تابع f در هر بازه که زیرمجموعه‌ی دامنه‌ی آن یعنی زیرمجموعه‌ی $D_f=[1,4]$ باشد، پیوسته است. بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

مثال ۳۱۹: تابع $f(x)=\begin{cases}x+1 & x>1\\ x^2 & x\le 1\end{cases}$ در چند نقطه از بازه‌ی $[0,3]$ ناپیوسته است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: هر یک از ضابطه‌های تابع f، چندجمله‌ای‌اند و لذا روی دامنه‌ی خود پیوسته‌اند. بنابراین هیچ یک از ضابطه‌ها نقطه‌ی ناپیوستگی ندارند.

حال پیوستگی تابع f را در نقطه‌ی مرزی آن بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases}f(1)=f(1^-)=1\\ f(1^+)=2\end{cases}\Rightarrow$$ تابع f در $x=1$ ناپیوسته است.

بر این اساس تابع f فقط در نقطه‌ی $x=1$ از بازه‌ی $[0,3]$ ناپیوسته بوده و لذا گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۳۲۰: تابع $f(x)=\begin{cases}(x-1)[x] & x<3\\ \dfrac{1}{x} & x\ge 3\end{cases}$ در چند نقطه از بازه‌ی $[0,+\infty)$ ناپیوسته است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: با توجه به ضابطه‌ی تابع، پیوستگی تابع $f_1(x)=(x-1)[x]$ را در بازه‌ی $[0,3)$ و پیوستگی تابع $f_2(x)=\dfrac{1}{x}$ را در بازه‌ی $(3,+\infty)$ و در نهایت پیوستگی تابع f را در نقطه‌ی مرزی $x=3$ بررسی می‌کنیم. تابع $f_1(x)=(x-1)[x]$ فقط در نقطه‌ی $x=2$ از بازه‌ی $[0,3)$ ناپیوسته است. زیرا در نقطه‌ی $x=1$ دارای عامل صفرکننده بوده و در $x=0$ نیز تابع درون براکت یعنی $y=x$ صعودی بوده و لذا تابع $f_1(x)$ در این نقطه پیوستگی راست دارد. چون $x=0$ نقطه‌ی انتهایی بازه است، پس پیوستگی در این نقطه، به معنی پیوستگی راست می‌باشد. پس ضابطه‌ی اول فقط در $x=2$ ناپیوسته است. ضابطه‌ی دوم یعنی تابع $f_2(x)=\dfrac{1}{x}$ در دامنه‌ی خود و به‌خصوص در بازه‌ی $[3,+\infty)$ پیوسته است. حال پیوستگی تابع f را در نقطه‌ی مرزی $x=3$ بررسی می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}f(3)=f(3^+)=\dfrac{1}{3}\\ f(3^-)=2\times[3^-]=4\end{array}\right\}\Rightarrow f(3)=f(3^+)\neq f(3^-)\Rightarrow$$ f در $x=3$ ناپیوسته است.

بنابراین تابع f در دو نقطه‌ی $x=2$ و $x=3$ ناپیوسته بوده و لذا گزینه‌ی (۳) صحیح است.

نکته: برای یافتن نقاط ناپیوستگی توابع شامل براکت در یک بازه، با شرط آن‌که عبارت داخل براکت تابعی پیوسته باشد، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحله‌ی اول: نقاطی از بازه را که به‌ازای آن‌ها عبارت داخل براکت به عدد صحیح تبدیل می‌شود، می‌یابیم. به این نقاط، **نقاط مشکوک** می‌گوییم. برای پیدا کردن نقاط مشکوک روش اول این است که عبارت داخل براکت را برابر عدد صحیح k قرار داده و پس از محاسبه‌ی x برحسب k، به‌جای k اعداد صحیحی قرار داده و از آن‌جا مقادیر x را که درون بازه قرار می‌گیرد، به‌دست آورد. روش دوم آن است که نمودار تابع درون براکت را در بازه‌ی داده شده رسم کنیم. در این صورت نقاطی روی نمودار که دارای عرض صحیح هستند، همان نقاط مشکوک می‌باشند. روش سوم آن است که برد تابع درون براکت را بیابیم و در این صورت نقاط صحیح برد، نقاط مشکوک به ناپیوستگی می‌باشند.

مرحله‌ی دوم: از بین نقاط مشکوک به‌دست آمده، نقاطی که مینیمم نسبی عبارت داخل براکت هستند و یا نقاطی را که به‌ازای آن‌ها تابع بیرون براکت عامل صفرکننده دارد، حذف می‌کنیم. زیرا تابع در این نقاط پیوسته است.

مرحله‌ی سوم: اگر بازه شامل نقاط انتهایی خود بوده و این نقاط جزء نقاط مشکوک باشد، در این نقاط پیوستگی یک‌طرفه را بررسی می‌کنیم. البته بهتر است از مفهوم صعودی یا نزولی بودن تابع درون براکت در این نقاط استفاده کنیم.

مثال ۳۲۱: تابع $f(x)=[2x]$ در چند نقطه از بازه‌ی $[-1,1]$ ناپیوسته است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ : ابتدا نقاطی از بازه‌ی $[-1,1]$ را می‌یابیم که به‌ازای آن‌ها، $2x$ عددی صحیح باشد:

$$2x=k \Rightarrow x=\frac{k}{2}\ ;\ (k\in\mathbb{Z})$$

اکنون به جای k اعداد صحیحی قرار می‌دهیم که $x=\frac{k}{2}$ به بازه‌ی $[-1,1]$ متعلق باشد. توجه کنید که لازم نیست k بـه بـازه متعلق باشـد؛ بلکه باید $x\in[-1,1]$ باشد. کوچک‌ترین مقدار صحیح که می‌توان به‌جای k قرار داد به‌گونه‌ای که $x=\frac{k}{2}\in[-1,1]$، برابر $k=-2$ است. حال به‌جای k، به‌ترتیب اعداد صحیح بزرگ‌تر از -2 را قرار داده و به‌ازای هر k، مقدار x را می‌یابیم و این عمل را آن‌قدر ادامه می‌دهیم تا دیگر x به بازه‌ی داده‌شده تعلق نگیرد. در این مثال به‌جای k، اعداد صحیح -2، -1، 0، 1 و 2 را قرار می‌دهیم و متناظر با این اعداد نقاط مشکوک برای x به‌دست می‌آیند که عبارت‌اند از:

$$-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1$$

تابع درون براکت یک تابع درجه‌ی اول بوده و لذا تابع در نقاط درونی بازه مینیمم ندارد. از طرفی تابع f عامل صفرکننده‌ای هم نـدارد (توجه کنیـد عامل صفرکننده باید بیرون براکت باشد نه داخل آن). لذا باید نقاط انتهایی بازه را از نظر پیوستگی بررسی کنیم. در نقطه‌ی $x=-1$، بایستی تابع f پیوستگی راست داشته باشد. از آن‌جایی‌که عبارت درون براکت یک تابع صعودی است، پس در این نقطه صعودی بوده و لذا f در $x=-1$ پیوسـتگی راست دارد و در نتیجه در این نقطه پیوسته است. در نقطه‌ی $x=1$، بایستی تابع f پیوستگی چپ داشته باشد. این موضوع می‌طلبد کـه تـابع درون براکت در $x=1$ نزولی باشد. چون $y=2x$ همواره صعودی است، پس f در $x=1$ پیوستگی چپ ندارد و در نتیجه در ایـن نقطـه ناپیوسـته اسـت. بنابراین تابع f در چهار نقطه‌ی $x=1$، $x=\frac{1}{2}$، $x=0$ و $x=\frac{-1}{2}$ ناپیوسته بوده و لذا گزینه‌ی (۳) صحیح است.

مثال ۳۲۲: تابع $f(x)=x[\frac{x}{2}]$ در چند نقطه از بازه‌ی $[-1,4]$ ناپیوسته است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ :

$$\frac{x}{2}=k \Rightarrow x=2k\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

بنابراین نقاط مشکوک بازه‌ی $[-1,4]$ عبارت‌اند از:

$$0,2,4$$

تابع درون براکت یعنی $y=\frac{x}{2}$ در این نقاط مینیمم نسبی ندارد، اما تابع بیرون براکت یعنی $y=x$ در $x=0$ دارای عامـل صـفرکننده اسـت. پـس تابع f در $x=0$ پیوسته است. اما در نقطه‌ی انتهایی $x=4$ بایستی پیوستگی چـپ داشـته باشـیم کـه ایـن‌طـور نیسـت. زیـرا تـابع درون براکـت یعنی $y=\frac{x}{2}$ در $x=4$ نزولی نیست. پس تابع f در $x=4$ نیز ناپیوسته است. توجه کنید که نقطه‌ی انتهایی $x=-1$، جزء نقاط مشکوک نیسـت. لذا تابع f در این نقطه پیوسته بوده و نیاز به بررسی ندارد. بر این اساس تابع f فقط در دو نقطه‌ی $x=4$ و $x=2$ از این بازه ناپیوسته بـوده و لـذا گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۳۲۳: تابع $f(x)=(x-1)[x^2]$ در چند نقطه از بازه‌ی $[-1,2]$ ناپیوسته است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ :

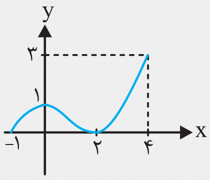
$$x^2=k \Rightarrow x=\pm\sqrt{k}\ ,\ (k\in\mathbb{Z}\ ,\ k\geq 0)$$

پس نقاط مشکوک به ناپیوستگی در بازه‌ی $[-1,2]$ عبارت‌اند از:

$$-1,0,1,\sqrt{2},\sqrt{3},2$$

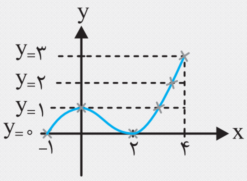
$x=0$ طول نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع درون براکت است. همچنین تابع بیرون براکت یعنی $y=x-1$ در $x=1$ دارای عامل صفرکننده مـی‌باشـد. پس تابع f در این دو نقطه پیوسته است. در نقطه‌ی انتهایی $x=-1$، بایستی پیوستگی راست داشـته باشـیم. امـا از آن‌جـا کـه تـابع درون براکـت یعنی $y=x^2$ در $x=-1$ نزولی است (نمودار $y=x^2$ را در همسایگی $x=-1$ تصور کنید و یـا مـشتق آن را در $x=-1$ در نظر بگیریـد.)، پـس تابع f در $x=-1$ ناپیوسته است. همچنین در نقطه‌ی انتهایی $x=2$، بایستی پیوسـتگی چـپ داشـته باشـیم کـه چـون تـابع $y=x^2$ در $x=2$ صعودی است، پس تـابع f در ایـن نقطـه هـم ناپیوسـته مـی‌باشـد. بنـابراین تـابع f در چهـار نقطـه‌ی $x=2$، $x=\sqrt{3}$، $x=\sqrt{2}$ و $x=-1$ از بازه‌ی $[-1,2]$ ناپیوسته بوده و لذا گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۳۲۴: شکل مقابل نمودار تابع f است. تابع با ضابطه‌ی $[f(x)]$ در چند نقطه از بازه‌ی $[-۱,۴]$ ناپیوسته است؟



۱) صفر
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۵

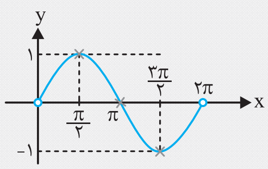
پاسخ: نقاط مشکوک به ناپیوستگی در بازه‌ی $[-۱,۴]$، نقاطی هستند که به‌ازای آن‌ها $f(x)\in\mathbb{Z}$. برای یافتن این نقاط خطوط افقی که دارای عرض صحیح باشند، یعنی خطوطی به معادله‌ی $y=k\ (k\in\mathbb{Z})$ را به‌گونه‌ای رسم می‌کنیم که نمودار تابع f را قطع کنند. نقاط تلاقی این خطوط با نمودار تابع f در بازه‌ی $[-۱,۴]$، همان نقاط مشکوک به ناپیوستگی‌اند.



با توجه به نمودار، نقاطی که با علامت (×) مشخص شده‌اند، نقاط مشکوک به ناپیوستگی‌اند. از بین این نقاط، نقطه به طول $x=۲$، نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع $f(x)$ است و لذا $[f(x)]$ در این نقطه پیوسته است. در نقطه‌ی انتهایی $x=-۱$، تابع f همان‌طور که از نمودار آن مشهود است، صعودی است، پس $[f(x)]$ در این نقطه پیوستگی راست دارد و لذا پیوسته است. اما در نقطه‌ی انتهایی $x=۴$، تابع f نزولی نیست. پس در این نقطه $[f(x)]$ پیوستگی چپ ندارد و لذا ناپیوسته است. بنابراین تابع $[f(x)]$ در چهار نقطه ناپیوسته بوده و لذا گزینه‌ی (۳) صحیح است.

مثال ۳۲۵: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(x-\pi)[\sin x]$ در چند نقطه از بازه‌ی $(۰,۲\pi)$ ناپیوسته است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳



پاسخ: برای یافتن نقاط مشکوک به ناپیوستگی تابع f، نمودار تابع درون براکت یعنی $y=\sin x$ را در بازه‌ی $(۰,۲\pi)$ رسم می‌کنیم. نقاطی که با علامت (×) مشخص شده‌اند، نقاط مشکوک به ناپیوستگی هستند.
با توجه به نمودار، $x=\frac{۳\pi}{۲}$ طول نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع درون براکت یعنی $y=\sin x$ است. هم‌چنین در نقطه‌ی مشکوک $x=\pi$، تابع بیرون براکت دارای عامل صفرکننده است، پس تابع f در این دو نقطه پیوسته است. بنابراین تابع f فقط در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۲}$ ناپیوسته است و لذا گزینه‌ی (۲) صحیح است. توجه کنید که نقاط انتهایی متعلق به بازه‌ی داده‌شده نیستند و پیوستگی در این نقاط را بررسی نمی‌کنیم.

مثال ۳۲۶: اگر $f(x)=[x]+[-x]$ و $g(x)=x-[x]$، آن‌گاه به‌ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه‌ی $h(x)=\begin{cases} f(x) & x\notin\mathbb{Z} \\ g(x)+a & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ در بازه‌ی $[-۲,۲]$ پیوسته است؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) هیچ مقدار a

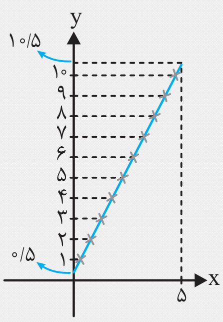
پاسخ: می‌دانیم $f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases} -۱ & x\notin\mathbb{Z} \\ ۰ & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$. بنابراین برای هر $x\notin\mathbb{Z}$، داریم $f(x)=-۱$. هم‌چنین اگر $x\in\mathbb{Z}$، آن‌گاه $g(x)=۰$، پس ضابطه‌ی تابع h به صورت $h(x)=\begin{cases} -۱ & x\notin\mathbb{Z} \\ a & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ درمی‌آید. در نتیجه به‌ازای $a=-۱$، این تابع در همه‌ی نقاط و به‌خصوص در بازه‌ی $[-۲,۲]$ پیوسته خواهد شد. پس گزینه‌ی (۱) صحیح است.

مثال ۳۲۷: تابع $f(x)=[۴x]-[۲x]$ در چند نقطه از بازه‌ی $[۰,۵]$ ناپیوسته است؟

۱) ۱۵
۲) ۱۳
۳) ۱۲
۴) ۱۰

پاسخ: اگر $n\in\mathbb{N}$، داریم $[nx]=[x]+[x+\frac{۱}{n}]+[x+\frac{۲}{n}]+\cdots+[x+\frac{n-۱}{n}]$. به عنوان مثال $[۲x]=[x]+[x+\frac{۱}{۲}]$. با استفاده از این رابطه، ضابطه‌ی تابع f را کمی ساده می‌کنیم:

$$[۴x]=[۲(۲x)]=[۲x]+[۲x+\frac{۱}{۲}]\Rightarrow f(x)=([۲x]+[۲x+\frac{۱}{۲}])-[۲x]\Rightarrow f(x)=[۲x+\frac{۱}{۲}]$$



برای یافتن نقاط مشکوک به ناپیوستگی تابع f در بازه‌ی $[۰,۵]$، می‌توانیم نمودار تابع درون براکت، یعنی $y=۲x+\frac{۱}{۲}$ را در این بازه رسم کنیم. برد تابع درون براکت به‌ازای نقاط بازه‌ی $[۰,۵]$ برابر $[۰/۵,۱۰/۵]$ می‌باشد. در این بازه، ده نقطه با عرض صحیح موجود است که همان نقاط مشکوک به ناپیوستگی بوده و در شکل با علامت (×) مشخص شده‌اند. هیچ یک از نقاط، مینیمم نسبی تابع درون براکت نیستند و نیز تابع f در آن نقاط عامل صفرکننده ندارد. پس تابع f در هر ۱۰ نقطه ناپیوسته است. پس گزینه‌ی (۴) صحیح است. توجه کنید که نقاط انتهایی جزء نقاط مشکوک نیستند و لذا تابع در این نقاط پیوسته است.

مثال ۳۲۸: تابع $f(x)=[x]-[x^2]$ در چند نقطه از بازه‌ی $[-1,2]$ ناپیوسته است؟

۱) ۶   ۲) ۵   ۳) ۴   ۴) ۳

پاسخ: ضابطه‌ی این تابع را مانند مثال قبل نمی‌توان ساده کرد. لذا نقاط ناپیوستگی هر یک از توابع $y_1=[x]$ و $y_2=[x^2]$ را در بازه‌ی $[-1,2]$ می‌یابیم، سپس از قضایای پیوستگی استفاده می‌کنیم. نقاط مشکوک به ناپیوستگی تابع $y_1=[x]$ در بازه‌ی $[-1,2]$، عبارت‌اند از ۱−، ۰، ۱ و ۲ که از این میان تابع $y_1=[x]$ در نقطه‌ی انتهایی $x=-1$ پیوستگی راست دارد و لذا پیوسته است. پس این تابع در نقاط $x=0$، $x=1$ و $x=2$ ناپیوسته است.

با قرار دادن $x^2=k$، $(k\in\mathbb{Z})$، نتیجه می‌شود که $x=\pm\sqrt{k}$، نقاط مشکوک به ناپیوستگی تابع $y_2=[x^2]$ در بازه‌ی $[-1,2]$ به‌دست می‌آید که عبارت‌اند از: ۲، $\sqrt{3}$، $\sqrt{2}$، ۱، ۰ و ۱− که از این میان $x=0$، طول نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع درون براکت بوده و لذا تابع $y_2=[x^2]$ در این نقطه پیوسته است. تابع $y_2=[x^2]$ در نقاط انتهایی بازه پیوستگی ندارد (چرا؟) بنابراین این تابع در نقاط $x=-1$، $x=1$، $x=\sqrt{2}$، $x=\sqrt{3}$ و $x=2$ ناپیوسته است. بنابراین برخی از نقاط ناپیوستگی توابع $y_1=[x]$ و $y_2=[x^2]$ با یکدیگر مشترک هستند، مانند $x=1$ و $x=2$ و برخی دیگر غیرمشترک‌اند، مانند $x=-1$، $x=0$، $x=\sqrt{2}$ و $x=\sqrt{3}$.

براساس قضیه‌های پیوستگی، اگر دو تابع f و g در همسایگی دوطرفه یا یک‌طرفه‌ی یکسانی از نقطه‌ی a تعریف شده باشند و تابع f در a پیوسته و تابع g در a ناپیوسته باشد، آن‌گاه توابع $f\pm g$ و $\frac{g}{f}$ در a ناپیوسته‌اند. اما اگر هر دو تابع در a ناپیوسته باشند، توابع $f\pm g$، $f\times g$ و $\frac{f}{g}$ می‌توانند در a پیوسته یا ناپیوسته باشند. پس در نقاط غیرمشترک که یکی از توابع $y_1=[x]$ یا $y_2=[x^2]$، پیوسته و دیگری ناپیوسته است، تابع f که به شکل تفاضل این دو تابع می‌باشد، قطعاً ناپیوسته است. یعنی تابع f در نقاط غیرمشترک $x=-1$، $x=0$، $x=\sqrt{2}$ و $x=\sqrt{3}$ حتماً ناپیوسته است. اما در نقاط مشترک یعنی $x=1$ و $x=2$ که هر دو تابع ناپیوسته‌اند و تابع f به صورت تفاضل دو تابع ناپیوسته می‌باشد، پیوستگی را بررسی می‌کنیم. توجه کنید که $x=2$ نقطه‌ی انتهایی بوده و پیوستگی در این نقطه به مفهوم پیوستگی چپ در این نقطه است.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1-1=0 \\ f(1^+)=[1^+]-[1^+]=0 \\ f(1^-)=[1^-]-[1^-]=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{تابع f در } x=1 \text{ پیوسته است.} \quad , \quad \left.\begin{array}{l} f(2)=[2]-[4]=-2 \\ f(2^-)=[2^-]-[4^-]=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{تابع f در } x=2 \text{ پیوسته است.}$$

بر این اساس تابع f در نقاط $x=-1$، $x=0$، $x=\sqrt{2}$ و $x=\sqrt{3}$ ناپیوسته بوده و گزینه‌ی (۳) صحیح است.

مثال ۳۲۹: تابع $f(x)=[\frac{x}{3}]+[\frac{x}{5}]$ در بازه‌ی $[-1,5]$، چند نقطه‌ی ناپیوستگی دارد؟

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵

پاسخ: تابع $y_1=[\frac{x}{3}]$، در نقاط $x=0$ و $x=3$ از این بازه ناپیوسته است و تابع $y_2=[\frac{x}{5}]$ در نقاط $x=0$ و $x=5$ از این بازه ناپیوسته می‌باشد. بنابراین تابع f که به صورت مجموع یک تابع پیوسته و یک تابع ناپیوسته در نقاط غیرمشترک $x=3$ و $x=5$ می‌باشد، در این نقاط قطعاً ناپیوسته است. اما در نقطه‌ی مشترک $x=0$ پیوستگی تابع f را بررسی می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f(0^+)=[0^+]+[0^+]=0 \\ f(0^-)=[0^-]+[0^-]=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{تابع f در } x=0 \text{ ناپیوسته است.}$$

پس تابع f در سه نقطه‌ی $x=0$، $x=3$ و $x=5$ ناپیوسته بوده و بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۳۳۰: تابع $f(x)=[\frac{x}{2}][\frac{x}{3}]$ در بازه‌ی $(-4,4)$ چند نقطه‌ی ناپیوستگی دارد؟

۱) ۶   ۲) ۵   ۳) ۴   ۴) ۳

پاسخ: ابتدا نقاط مشکوک به ناپیوستگی را در هر یک از توابع $y=[\frac{x}{2}]$ و $y=[\frac{x}{3}]$ روی بازه‌ی $(-4,4)$ می‌یابیم:

$$y=[\frac{x}{2}]: \frac{x}{2}=k \Rightarrow x=2k \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} x=-2,0,2 \quad , \quad y=[\frac{x}{3}]: \frac{x}{3}=k \Rightarrow x=3k \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} x=-3,0,3$$

تابع f در نقطه‌ی مشترک $x=0$ ناپیوسته است. زیرا: $f(0)=0\ ,\ f(0^+)=0\ ,\ f(0^-)=1$

در مورد نقاط غیرمشترک، اگرچه قانونی مانند جمع و تفریق دو تابع برای ضرب نداریم، اما در مورد ضرب با توجه به کران‌داری دو تابع می‌توان گفت که حاصل‌ضرب یک تابع پیوسته و یک تابع ناپیوسته که در یک همسایگی دوطرفه یا یک‌طرفه‌ی یکسان تعریف شده‌اند، در نقطه‌ی $x=a$ همواره ناپیوسته است مگر آن‌که مقدار تابع پیوسته در $x=a$ برابر صفر شود. در این مثال، تابع $y=[\frac{x}{3}]$ در نقاط $x=2$ و $x=-2$ پیوسته است و مقدار این تابع به‌ازای $x=2$ برابر صفر می‌شود، پس تابع f در $x=2$ پیوسته است. چون تابع $y=[\frac{x}{2}]$ که در نقاط $x=3$ و $x=-3$ پیوسته است و به‌ازای هیچ‌کدام از آن‌ها صفر نیست، پس تابع f در این نقاط و نیز در $x=-2$ ناپیوسته است. پس نقاط ناپیوستگی f عبارت‌اند از $x=0$، $x=-2$، $x=3$ و $x=-3$ و گزینه‌ی (۳) صحیح است.

مثال ۳۳۱: نمودار تابع $f(x)=x[x]$ در کدام بازه با بیش‌ترین طول پیوسته است؟

۱) $[0,2]$ ۲) $[-1,1)$ ۳) $(-1,1]$ ۴) $[-2,0)$

پاسخ: تابع f در هر نقطه‌ای به طول صحیح، به جز $x=0$ که در آن عامل صفرکننده دارد، ناپیوسته است. هم‌چنین تابع درون براکت یعنی $y=x$، صعودی است. پس در هر نقطه‌ی صحیح به جز $x=0$، فقط پیوستگی راست دارد. بنابراین تابع f در بازه‌هایی به فرم $[k,k+1)$ که در آن $k\in\mathbb{Z}$، پیوسته است. طول هر کدام از این بازه‌ها برابر ۱ است. به عنوان مثال تابع f در بازه‌های $[-1,0)$، $[0,1)$، $[1,2)$ و ... پیوسته است. چون تابع f در $x=0$ پیوسته بوده و $x=0$ نقطه‌ی مرزی دو بازه‌ی $[-1,0)$ و $[0,1)$ می‌باشد، با ادغام این دو بازه، تابع f در بازه‌ی $[-1,1)$ پیوسته خواهد شد و این بازه بیش‌ترین طول را در میان دیگر بازه‌هایی دارد که f روی آن‌ها پیوسته است. پس گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۳۳۲: تابع $f(x)=(x-2)[\frac{x}{2}]$ در بازه‌ی $[0,k)$ پیوسته است. بیش‌ترین مقدار k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: مقدار تابع درون براکت به‌ازای هر عدد صحیح و زوج عددی صحیح می‌شود. بنابراین تابع f به‌ازای هر عدد صحیح زوج به جز $x=2$ که عامل صفرکننده دارد، ناپیوسته می‌باشد. از طرفی چون تابع درون براکت، یعنی $y=\frac{x}{2}$، صعودی است، پس در نقاط زوج، تابع f پیوستگی راست دارد. بنابراین تابع f در هر بازه به شکل $[2k,2k+2)$ که در آن $k\in\mathbb{Z}$، پیوسته است. پس تابع f در بازه‌های $[0,2)$، $[2,4)$، $[4,6)$ و ... پیوسته است. از آن‌جایی که f در $x=2$ پیوسته است، می‌توان دو بازه‌ی $[0,2)$ و $[2,4)$ را در هم ادغام نمود. یعنی تابع f در بازه‌ی $[0,4)$ پیوسته بوده و این بازه بیش‌ترین طول را بین بازه‌های ذکر شده دارد. لذا بیش‌ترین مقدار k برابر ۴ می‌باشد. پس گزینه‌ی (۳) صحیح است.

مثال ۳۳۳: تابع $f(x)=[\sqrt{x}-2]$ در بازه‌ی $[1,k)$ پیوسته است. بیش‌ترین مقدار k کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۹ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{2}+2$

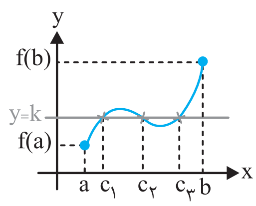
پاسخ: داریم $f(x)=[\sqrt{x}-2]=[\sqrt{x}]-2$. بنابراین مقدار عبارت داخل براکت به‌ازای اعداد مربع کامل $x=0$، $x=1$، $x=4$ و ... عدد صحیح می‌شود. چون $y=\sqrt{x}$ تابعی صعودی است، در این نقاط فقط پیوستگی راست دارد. بنابراین تابع f در بازه‌های $[0,1)$، $[1,4)$، $[4,9)$ و ... پیوسته است. چون تابع f در بیرون براکت دارای عامل صفرکننده نیست و نیز $y=\sqrt{x}$ برای $x\geq 1$، دارای مینیمم نسبی نمی‌باشد، پس بازه‌ی $[1,4)$ را نمی‌توان با بازه‌ی دیگری ادغام نمود و لذا $[1,k)=[1,4)$ و در نتیجه بیش‌ترین مقدار k برابر ۴ است و لذا گزینه‌ی (۱) صحیح است.

قضیه‌ی مقدار میانی پیوستگی

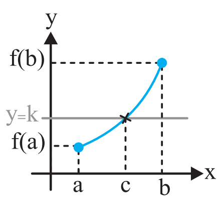
قضیه: فرض کنید تابع f روی بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ پیوسته و k عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد. یعنی $f(a)<k<f(b)$ یا $f(b)<k<f(a)$. در این صورت حداقل یک عدد مانند c در بازه‌ی $[a,b]$ وجود دارد که $f(c)=k$. به عبارت دیگر معادله‌ی $f(x)=k$ در بازه‌ی $[a,b]$ حداقل یک ریشه مانند c دارد.

تعبیر هندسی قضیه‌ی مقدار میانی پیوستگی

اگر نمودار تابع f مانند یک ریسمان در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و یک‌پارچه باشد و نمودار آن را بتوان بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم نمود و خط $y=k$ بین خطوط $y=f(a)$ و $y=f(b)$ قرار گیرد، آن‌گاه برای رفتن از نقطه‌ی $(a,f(a))$ به نقطه‌ی $(b,f(b))$، نمودار f حتماً خط $y=k$ را حداقل در یک نقطه قطع خواهد کرد.



(آ)

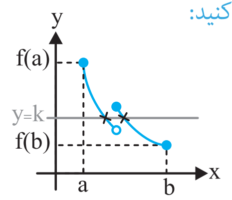


(ب)

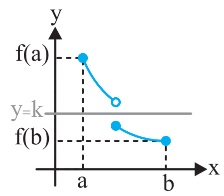
همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، در شکل (آ)، نمودار f خط $y=k$ را در سه نقطه و در نمودار (ب)، نمودار f خط $y=k$ را در یک نقطه قطع کرده است.

نکته ۱: اگر تابع f در بازه‌ی $[a,b]$، **صعودی اکید و یا نزولی اکید** بوده و شرایط قضیه‌ی مقدار میانی نیز فراهم باشد، آن‌گاه خط $y=k$ نمودار تابع f را دقیقاً در یک نقطه قطع خواهد کرد. به عبارت دیگر **دقیقاً** یک $c\in[a,b]$ وجود دارد که $f(c)=k$، مانند نمودار (ب)

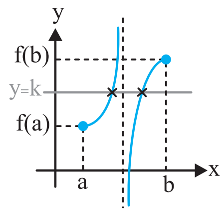
نکته ۲: اگر شرایط قضیه‌ی مقدار میانی پیوستگی برقرار نباشد، آن‌گاه خط $y=k$ نمودار تابع f را ممکن است قطع کند یا خیر. به عنوان مثال به شکل‌های زیر توجه کنید:



(آ)



(ب)



(پ)

در شکل (آ) تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته نیست ولی خط $y=k$ نمودار تابع f را در دو نقطه قطع کرده است. در شکل (ب) تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته نیست و خط $y=k$ نمودار تابع f را قطع نکرده است. در شکل (پ) تابع f شرایط صحبت کردن در مورد پیوستگی یا ناپیوستگی در بازه‌ی $[a,b]$ را ندارد ولی با این وجود خط $y=k$، نمودار f را در دو نقطه قطع کرده است.

مثال ۳۳۴: کدام تابع زیر در شرایط قضیه‌ی مقدار میانی پیوستگی روی بازه‌ی $[0,1]$ و به‌ازای $k=\frac{1}{2}$ صدق می‌کند؟

۱) $f(x)=x-[x]$ ۲) $f(x)=x^2-x$ ۳) $f(x)=\sqrt{x}$ ۴) $f(x)=\frac{x}{x+2}$

پاسخ: قضیه‌ی مقدار میانی دو تا شرط دارد. یکی این‌که تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد و دیگر این‌که عدد k بین $f(a)$ و $f(b)$ قرار گیرد. اکنون به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه‌ی (۱): این تابع در نقطه‌ی انتهایی $x=1$ از بازه‌ی $[0,1]$، پیوستگی چپ ندارد و لذا در این بازه ناپیوسته است. پس شرایط قضیه‌ی مقدار میانی را ندارد.

گزینه‌ی (۲): این تابع چندجمله‌ای بوده و در همه‌جا و به‌خصوص در بازه‌ی $[0,1]$ پیوسته است. اما $f(0)=f(1)=0$ و لذا $k=\frac{1}{2}$ بین $f(0)$ و $f(1)$ قرار نمی‌گیرد. پس تابع f در این بازه شرایط قضیه‌ی مقدار میانی را برای $k=\frac{1}{2}$ ندارد.

گزینه‌ی (۳): این تابع در دامنه‌ی خود و به‌خصوص در $[0,1]$ پیوسته است و $f(0)=0$ و $f(1)=1$، در نتیجه $k=\frac{1}{2}$ بین $f(0)$ و $f(1)$ واقع است. لذا همین گزینه پاسخ تست می‌باشد.

گزینه‌ی (۴): این تابع در دامنه‌ی خود و به‌خصوص در بازه‌ی $[0,1]$ پیوسته است، اما $f(0)=0$ و $f(1)=\frac{1}{3}$، پس $k=\frac{1}{2}$ بین $f(0)$ و $f(1)$ قرار ندارد. لذا این گزینه نیز نادرست است.

مثال ۳۳۵: تابع $f(x)=\frac{x^3}{4}+\sin(\pi x)+4$ در بازه‌ی $[-2,2]$ کدام مقدار زیر را اختیار می‌کند؟ (تمرین در کلاس کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۰۲)

۱) -1 ۲) صفر   ۳) ۵   ۴) ۸

پاسخ: تابع f در همه‌جا و به‌خصوص در بازه‌ی $[-2,2]$ پیوسته است. همچنین $f(2)=6$ و $f(-2)=2$. لذا بنابر قضیه‌ی مقدار میانی، تابع f هر مقدار بین ۲ و ۶ را حتماً اختیار می‌کند. بنابراین از بین مقادیر داده شده در گزینه‌ها، تابع f فقط مقدار ۵ را اختیار می‌کند. لذا گزینه‌ی (۳) صحیح است.

مثال ۳۳۶: نشان دهید خط $y=2$ نمودار تابع $f(x)=(x-1)^2(x-3)^2+x$ را قطع می‌کند. (مثال کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۰۲)

پاسخ: چون تابع f چندجمله‌ای است، پس در همه‌جا و به‌خصوص در بازه‌ی $[1,3]$ پیوسته است و نیز $f(1)=1$ و $f(3)=3$. چون $f(1)<2<f(3)$، پس براساس قضیه‌ی مقدار میانی، خط $y=2$ نمودار تابع f را حداقل در یک نقطه قطع می‌کند.

مثال ۳۳۷: خط $y=2$ نمودار تابع $f(x)=(x-1)(x-2)+mx^2$، $(m>0)$، را در بازه‌ی $[1,2]$ قطع می‌کند. حدود m کدام است؟

۱) $2<m<4$ ۲) $0<m<3$ ۳) $1<m<4$ ۴) $\frac{1}{2}<m<2$

پاسخ: چون تابع f در بازه‌ی $[1,2]$ پیوسته است، بنابراین در صورتی‌که خط $y=2$ بین $f(1)=m$ و $f(2)=4m$ قرار گیرد، آن‌گاه براساس قضیه‌ی مقدار میانی، خط $y=2$ حتماً نمودار تابع f را در نقطه‌ای از بازه‌ی $[1,2]$ قطع می‌کند. چون $m>0$، پس $m<4m$ و لذا باید داشته باشیم:

$$m<2<4m \Rightarrow \begin{cases} m<2 \\ 2<4m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m<2 \\ \frac{1}{2}<m \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}<m<2$$

پس گزینه‌ی (۴) صحیح است.

مثال ۳۳۸: عدد c در قضیه‌ی مقدار میانی پیوستگی برای تابع $f(x)=\frac{x^{۲}+۱}{x+۳}$ در بازه‌ی $[۰,۳]$ و به‌ازای $k=۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

پاسخ: با توجه به پیوسته بودن f در بازه‌ی $[۰,۳]$ و براساس قضیه‌ی مقدار میانی $c\in[۰,۳]$ وجود دارد که $f(c)=k$. پس:

$$f(c)=k\Rightarrow\frac{c^{۲}+۱}{c+۳}=۱\Rightarrow c^{۲}+۱=c+۳\Rightarrow c^{۲}-c-۲=۰\Rightarrow c=-۱ \text{ یا } c=۲$$

اما $c=-۱$ به بازه‌ی $[۰,۳]$ تعلق ندارد، پس فقط $c=۲$ قابل قبول بوده و لذا گزینه‌ی (۴) صحیح است.

مثال ۳۳۹: کدام‌یک از خطوط زیر نمودار تابع $f(x)=x\sin x$ را در بازه‌ی $[\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۲}]$ قطع می‌کند؟

۱) $y=\sqrt{۲}$ ۲) $y=\sqrt{۵}$ ۳) $y=۲\sqrt{۳}$ ۴) $y=۳\sqrt{۲}$

پاسخ: تابع f در همه‌جا و به‌خصوص در بازه‌ی $[\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۲}]$ پیوسته است و $f(\frac{\pi}{۶})=\frac{\pi}{۱۲}$ و $f(\frac{\pi}{۲})=\frac{\pi}{۲}$. بنابراین به‌ازای هر k که $\frac{\pi}{۱۲}<k<\frac{\pi}{۲}$ باشد، خط $y=k$ نمودار تابع f را در بازه‌ی $[\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۲}]$ قطع می‌کند. با توجه به گزینه‌ها فقط $y=\sqrt{۲}$ بین دو مقدار $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۱۲}$ قرار دارد و لذا گزینه‌ی (۱) صحیح است.

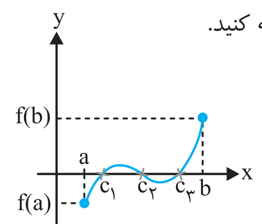
قضیه‌ی بولزانو (ریشه)

یکی از نتایج مهم قضیه‌ی مقدار میانی پیوستگی، قضیه‌ی ریشه یا قضیه‌ی بولزانو است. در واقع این قضیه حالت خاص از قضیه‌ی مقدار میانی است. اگر در قضیه‌ی مقدار میانی $k=۰$ باشد، این قضیه حاصل می‌شود. این قضیه به صورت زیر است:

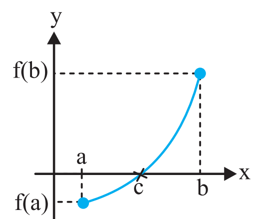
قضیه‌ی بولزانو: اگر تابع f در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ پیوسته و $f(a)f(b)<۰$، آن‌گاه حداقل یک عدد مانند c در بازه‌ی (a,b) وجود دارد که $f(c)=۰$.

به عبارت دیگر طبق این قضیه، اگر $f(a)f(b)<۰$، آن‌گاه معادله‌ی $f(x)=۰$ در بازه‌ی (a,b) حداقل یک ریشه دارد.

تعبیر هندسی قضیه‌ی بولزانو (قضیه‌ی ریشه): اگر نمودار تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و مانند یک ریسمان دارای اتصال و یک‌پارچگی باشد و یکی از مقادیر $f(a)$ یا $f(b)$ مثبت و دیگری منفی باشد، آن‌گاه نمودار f در گذر از نقطه‌ی $(a,f(a))$ به نقطه‌ی $(b,f(b))$، حداقل در یک‌جا محور xها را قطع می‌کند. به نمودارهای زیر توجه کنید.



(آ)



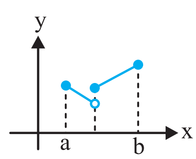
(ب)

همان‌طور که در شکل‌های فوق ملاحظه می‌کنید، در شکل (آ) نمودار تابع f، محور xها را در سه نقطه و در شکل (ب) در یک نقطه قطع کرده است. پس معادله‌ی $f(x)=۰$ در شکل (آ) دارای سه ریشه و در شکل (ب) دارای یک ریشه در بازه‌ی (a,b) می‌باشد.

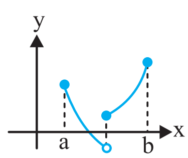
نکته ۱: اگر شرایط قضیه‌ی بولزانو برقرار بوده و علاوه بر آن، تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ **صعودی اکید یا نزولی** اکید باشد، آن‌گاه معادله‌ی $f(x)=۰$ در بازه‌ی (a,b) **دقیقاً** یک ریشه دارد. به نمودار (ب) دقت کنید.

نکته ۲: اگر تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و یکنوای اکید باشد و $f(a)f(b)\geq۰$، آن‌گاه معادله‌ی $f(x)=۰$ در بازه‌ی (a,b) جواب ندارد.

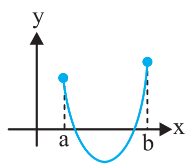
نکته ۳: اگر حداقل یکی از شرایط قضیه‌ی بولزانو (ریشه) برقرار نباشد، یعنی f در $[a,b]$ پیوسته نباشد و یا $f(a)f(b)\geq۰$، آن‌گاه در مورد وجود یا عدم وجود ریشه‌های $f(x)=۰$ در بازه‌ی (a,b) نمی‌توان اظهارنظر کرد. به شکل‌های زیر دقت کنید.



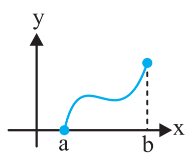
(آ)



(ب)



(پ)



(ت)

در شکل (آ)، هیچ یک از شرایط قضیه‌ی ریشه برقرار نیست و f نیز در بازه‌ی (a,b) فاقد ریشه است.

در شکل (ب) هیچ یک از شرایط قضیه‌ی ریشه برقرار نیست. با این وجود f در بازه‌ی (a,b) ریشه دارد.

در شکل (پ)، شرط $f(a)f(b)<۰$ برقرار نیست. با این وجود f در بازه‌ی (a,b) دو ریشه دارد.

در شکل (ت)، شرط $f(a)f(b)<۰$ برقرار نیست و f نیز در بازه‌ی (a,b) ریشه ندارد.

مثال ۳۴۰: ثابت کنید معادله‌ی $x^{4}+x-3=0$ ریشه‌ای در بازه‌ی $(1,2)$ دارد. (مثال کتاب درسی - صفحه‌ی ۱۰۱)

پاسخ: تابع $f(x)=x^{4}+x-3$ در همه‌جا و به‌خصوص در بازه‌ی $[1,2]$ پیوسته است و $f(1)=-1$ و $f(2)=15$. بنابراین $f(1)f(2)<0$. طبق قضیه‌ی بولزانو حداقل یک عدد c در بازه‌ی $(1,2)$ موجود است که $f(c)=0$. یعنی معادله‌ی $x^{4}+x-3=0$ در $(1,2)$ حداقل یک ریشه دارد.

مثال ۳۴۱: معادله‌ی $x-\cos x=0$ در بازه‌ی $(0,1)$: (تمرین در کلاس کتاب درسی - صفحه‌ی ۱۰۱)

۱) حداقل یک ریشه دارد. ۲) دقیقاً یک ریشه دارد. ۳) دقیقاً دو ریشه دارد. ۴) بی‌شمار ریشه دارد.

پاسخ: تابع $f(x)=x-\cos x$ در همه‌جا و به‌خصوص در بازه‌ی $[0,1]$ پیوسته است و نیز $f(0)=-1$ و $f(1)=1-\cos 1>0$. پس $f(0)f(1)<0$. همچنین برای هر $x\in(0,1)$ داریم $f'(x)=1+\sin x>0$. بنابراین تابع f در بازه‌ی $(0,1)$ صعودی اکید است. در نتیجه براساس قضیه‌ی ریشه و نکات گفته شده، معادله‌ی $f(x)=0$ و یا معادله‌ی $x-\cos x=0$ دقیقاً یک ریشه در بازه‌ی $(0,1)$ دارد. پس گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۳۴۲: ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $x^{3}-x-1=0$ در کدام بازه قرار دارد؟

۱) $(0,\frac{1}{2})$ ۲) $(\frac{1}{2},1)$ ۳) $(1,\frac{3}{2})$ ۴) $(\frac{3}{2},2)$

پاسخ: تابع $f(x)=x^{3}-x-1$ روی $\mathbb{R}$ و در نتیجه روی هر بازه‌ای پیوسته است. بنابراین اگر در بازه‌ی $[a,b]$، داشته باشیم $f(a)f(b)<0$، آن‌گاه معادله‌ی $f(x)=0$ در بازه‌ی (a,b) دارای ریشه است. داریم:

$$f(0)=-1<0\,,\ f(\frac{1}{2})=\frac{-11}{8}<0\,,\ f(1)=-1<0\,,\ f(\frac{3}{2})=\frac{7}{8}>0\,,\ f(2)=5>0$$

چون $f(1)f(\frac{3}{2})<0$، بنابراین معادله‌ی $f(x)=0$ یعنی $x^{3}-x-1=0$ در بازه‌ی $(1,\frac{3}{2})$ حداقل دارای یک ریشه است و لذا گزینه‌ی (۳) صحیح است.

مثال ۳۴۳: بزرگ‌ترین ریشه‌ی معادله‌ی $x^{3}-3x+1=0$ در کدام بازه قرار دارد؟

۱) $(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$ ۲) $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ ۳) $(\frac{3}{2},\frac{7}{4})$ ۴) $(\frac{7}{4},\frac{5}{2})$

پاسخ: تابع $f(x)=x^{3}-3x+1$ روی $\mathbb{R}$ و در نتیجه روی هر بازه‌ای پیوسته است. مقادیر تابع f در نقاط انتهایی بازه‌های داده‌شده عبارت است از:

$$f(\frac{1}{3})=\frac{1}{27}\ ,\ f(\frac{1}{2})=-\frac{3}{8}\ ,\ f(\frac{3}{2})=-\frac{1}{8}\ ,\ f(\frac{7}{4})=\frac{71}{64}\ ,\ f(\frac{5}{2})=\frac{73}{8}$$

چون $f(\frac{1}{3})\cdot f(\frac{1}{2})<0$ و $f(\frac{3}{2})\cdot f(\frac{7}{4})<0$، پس تابع f در هر یک از بازه‌های $(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$ و $(\frac{3}{2},\frac{7}{4})$ دارای ریشه است. اما چون بزرگ‌ترین ریشه‌ی معادله خواسته شده، بازه‌ی $(\frac{3}{2},\frac{7}{4})$ را می‌پذیریم و لذا گزینه‌ی (۳) صحیح است.

مثال ۳۴۴: حدود m برای آن‌که مطمئن باشیم تابع $f(x)=x^{3}+x+m$ در بازه‌ی $(-1,1)$ دارای ریشه می‌باشد، کدام است؟

۱) $0<m<2$ ۲) $-2<m<0$ ۳) $-4<m<4$ ۴) $-2<m<2$

پاسخ: تابع f در بازه‌ی $[-1,1]$ پیوسته است. بنابراین اگر $f(1)f(-1)<0$ باشد، آن‌گاه براساس قضیه‌ی ریشه، تابع f در بازه‌ی $(-1,1)$ حداقل یک ریشه خواهد داشت. پس:

$$f(1)f(-1)<0\Rightarrow(m+2)(m-2)<0\Rightarrow-2<m<2$$

پس گزینه‌ی (۴) صحیح است.

مثال ۳۴۵: حدود m کدام باشد تا مطمئن باشیم خط به معادله‌ی $y=3x$، منحنی به معادله‌ی $f(x)=\frac{x+m}{x^{2}+2}$ را در بازه‌ی $(0,1)$ قطع می‌کند؟

۱) $-2<m<3$ ۲) $0<m<8$ ۳) $-4<m<2$ ۴) $-2<m<6$

پاسخ: ابتدا خط و منحنی را تلاقی می‌دهیم.

$$3x=\frac{x+m}{x^{2}+2}\Rightarrow3x^{3}+6x=x+m\Rightarrow3x^{3}+5x-m=0$$

حال فرض کنیم بازه‌ی $g(x)=3x^{3}+5x-m$. در این صورت تابع g در همه‌جا و به‌خصوص در بازه‌ی $[0,1]$ پیوسته است. براساس قضیه‌ی ریشه، برای آن‌که تابع g در بازه‌ی $(0,1)$ دارای حداقل یک ریشه باشد، کافی است داشته باشیم:

$$g(0)g(1)<0\Rightarrow(-m)(8-m)<0\Rightarrow0<m<8$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۳۴۶: نمودار تابع $f(x)=4x-2\sin x-1$ در بازهٔ $(0,1)$، محور x ها را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) هیچ　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) بی‌شمار

پاسخ: تابع f روی $\mathbb{R}$ و در نتیجه در بازهٔ $[0,1]$ پیوسته است و $f(0)=-1$ و $f(1)=3-2\sin 1>0$. در نتیجه $f(0)f(1)<0$. همچنین $f'(x)=4-2\cos x>0$. بنابراین تابع f صعودی اکید است. لذا معادلهٔ $f(x)=0$ در بازهٔ $(0,1)$ دقیقاً یک ریشه دارد و در نتیجه گزینهٔ (۲) صحیح است.

مثال ۳۴۷: کدام گزینه در مورد معادلهٔ $\sin x-x^2+x+1=0$ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ درست است؟ (مسألهٔ ۴ کتاب درسی- صفحهٔ ۱۰۴)

۱) ریشه ندارد.　　۲) حداکثر یک ریشه دارد.　　۳) دقیقاً یک ریشه دارد.　　۴) حداقل دو ریشه دارد.

پاسخ: تابع $f(x)=\sin x-x^2+x+1$ در همه‌جا و به‌خصوص در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ پیوسته است. همچنین داریم:

$$f(-\pi)=-\pi^2-\pi+1<0 \quad , \quad f(\pi)=-\pi^2+\pi+1<0$$

اما از آن‌جا که $f(0)=1>0$، لذا $f(-\pi)f(0)<0$ و $f(0)f(\pi)<0$. بنابراین معادلهٔ $f(x)=0$، در هر یک از بازه‌های $(-\pi,0)$ و $(0,\pi)$ حداقل یک ریشه دارد. بنابراین این معادله در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ حداقل دو ریشه دارد و گزینهٔ (۴) صحیح است.

نکتهٔ ۱: اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n باشد، آن‌گاه معادلهٔ $P(x)=0$، حداکثر n ریشهٔ حقیقی دارد.

نکتهٔ ۲: اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ فرد باشد، آن‌گاه معادلهٔ $P(x)=0$ حداقل یک ریشهٔ حقیقی دارد.

مثال ۳۴۸: اگر تابع f یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ ۳ باشد، با توجه به جدول مقابل، معادلهٔ $f(x)=0$ در دامنهٔ خود ....

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-1	1	2	-1	5

۱) حداقل دو جواب دارد.　　۲) دقیقاً دو جواب دارد.

۳) حداقل ۳ جواب دارد.　　۴) دقیقاً ۳ جواب دارد.

پاسخ: با توجه به جدول داریم $f(-1)f(0)<0$، $f(1)f(2)<0$ و $f(2)f(3)<0$. بنابراین معادلهٔ $f(x)=0$ حداقل یک ریشه در بازهٔ $(-1,0)$ و حداقل یک ریشه در بازهٔ $(1,2)$ و حداقل یک ریشه در بازهٔ $(2,3)$ دارد و در نتیجه تا این‌جا معادلهٔ $f(x)=0$، حداقل سه ریشه دارد. از طرفی تابع f یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۳ می‌باشد و لذا طبق نکتهٔ قبل حداکثر سه ریشه دارد. بنابراین معادلهٔ $f(x)=0$ دقیقاً سه ریشه در $\mathbb{R}$ دارد. پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

مثال ۳۴۹: اگر تابع f در بازهٔ $[0,1]$ پیوسته و $f(0)=1$ و $f(1)=0$ باشد، معادلهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ در بازهٔ $(0,1)$ چند ریشه دارد؟

۱) هیچ　　۲) یک ریشه　　۳) حداقل یک ریشه　　۴) حداکثر یک ریشه

پاسخ: معادلهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ را به صورت $f(x)-\sqrt{x}=0$ نوشته و قرار می‌دهیم $g(x)=f(x)-\sqrt{x}$. چون تابع f و نیز تابع $y=\sqrt{x}$ نیز در $[0,1]$ پیوسته هستند، پس تابع g نیز در بازهٔ $[0,1]$ پیوسته بوده و داریم:

$$\begin{cases} g(0)=f(0)-0=1 \\ g(1)=f(1)-1=-1 \end{cases} \Rightarrow g(0)g(1)<0$$

بنابراین معادلهٔ $g(x)=0$ و در نتیجه معادلهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ در بازهٔ $(0,1)$ حداقل یک ریشه دارد. از آن‌جایی که چیزی در مورد یکنوایی تابع f نمی‌دانیم، لذا به‌طور دقیق نمی‌توانیم تعداد ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ را تعیین کنیم. پس گزینهٔ (۳) را به‌عنوان بهترین گزینه انتخاب می‌کنیم.

پیوستگی تابع وارون یک تابع پیوسته

در این قسمت می‌خواهیم رابطهٔ پیوستگی تابع f و وارون آن یعنی f^{-1} را (در صورت وجود) بررسی کنیم. ابتدا چند مطلب زیر را از کتب درسی ریاضی ۲ و حسابان یادآوری می‌کنیم:

۱) اگر $A(a,b)\in f$، آن‌گاه $A'(b,a)\in f^{-1}$. به عبارت دیگر $f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$

۲) نمودار توابع f و f^{-1} نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینهٔ یکدیگرند.

۳) همواره داریم: $(f^{-1}of)(x)=x \;;\; x\in D_f$ ، $(fof^{-1})(x)=x \;;\; x\in D_{f^{-1}}$

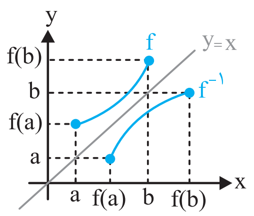
۴) $D_f=R_{f^{-1}}$ ، $R_f=D_{f^{-1}}$

اکنون قضیه‌ای را در رابطه با پیوستگی تابع وارون مطرح نموده و سپس نتایج مهم آن را بیان و بررسی می‌کنیم.

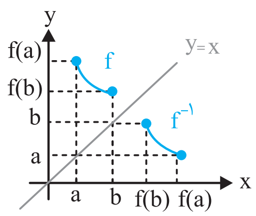
قضیه: فرض کنید f تابعی یک‌به‌یک و پیوسته با دامنه‌ی بازه‌ی بسته‌ی D و برد B باشد. در این صورت تابع $f^{-۱}$ در هر نقطه از مجموعه‌ی B پیوسته است.

قضیه‌ی فوق بیان می‌کند که اگر تابع f روی هر نقطه از دامنه‌ی خود پیوسته باشد، آن‌گاه وارون آن نیز روی دامنه‌ی خود که همان برد تابع f می‌باشد، پیوسته است. در واقع به‌طور دقیق‌تر می‌توان نتایج زیر را بیان کرد.

نتیجه‌ی ۱: اگر تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و صعودی اکید باشد آن‌گاه تابع $f^{-۱}$ در بازه‌ی $[f(a),f(b)]$ پیوسته و صعودی اکید است.



نتیجه‌ی ۲: اگر تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و نزولی اکید باشد، آن‌گاه تابع $f^{-۱}$ در بازه‌ی $[f(b),f(a)]$ پیوسته و نزولی اکید می‌باشد.



به زبان ساده، قضیه و نتایج آن بیان می‌کنند که توابع f و $f^{-۱}$ از نظر یکنوایی و پیوستگی مانند یکدیگر هستند. در مورد پیوستگی یا ناپیوستگی‌های یک‌طرفه نیز نکات زیر می‌تواند مفید باشد.

نکته ۱: اگر f روی بازه‌ی I اکیداً صعودی باشد و $a \in I$، در این صورت:

آ) اگر f در a از راست پیوسته (یا ناپیوسته) باشد، آن‌گاه $f^{-۱}$ نیز در $f(a)$ از راست پیوسته (یا ناپیوسته) است.

ب) اگر f در a از چپ پیوسته (یا ناپیوسته) باشد، آن‌گاه $f^{-۱}$ نیز در $f(a)$ از چپ پیوسته (یا ناپیوسته) است.

نکته ۲: اگر f روی بازه‌ی I اکیداً نزولی باشد و $a \in I$، در این صورت:

آ) اگر f در a از راست پیوسته (یا ناپیوسته) باشد، آن‌گاه $f^{-۱}$ در $f(a)$ از چپ پیوسته (یا ناپیوسته) است.

ب) اگر f در a از چپ پیوسته (یا ناپیوسته) باشد، آن‌گاه $f^{-۱}$ در $f(a)$ از راست پیوسته (یا ناپیوسته) است.

مثال ۳۵۰: تابع معکوس تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}-\sqrt{۶-x}$ در کدام بازه پیوسته است؟

۱) $[۲,۶]$ ۲) $[۰,۳]$ ۳) $[-۲,۲]$ ۴) $[-۱,۴]$

پاسخ: تابع f روی دامنه‌ی خود یعنی روی بازه‌ی $[۲,۶]$ پیوسته است. لذا بنابر قضیه‌ی پیوستگی تابع معکوس، $f^{-۱}$ روی برد تابع f پیوسته است. چون f تابعی پیوسته و صعودی اکید است (زیرا $f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x-۲}}+\frac{۱}{۲\sqrt{۶-x}}>۰$) و $f(۲)=-۲$ و $f(۶)=۲$، لذا برد تابع f برابر $[f(۲),f(۶)]=[-۲,۲]$ است و بنابراین تابع $f^{-۱}$ روی بازه‌ی $[-۲,۲]$ پیوسته می‌باشد و لذا گزینه‌ی (۳) صحیح است.

نکته: اگر تابع f روی بازه‌ی I پیوسته و یک‌به‌یک باشد، آن‌گاه تابع f در بازه‌ی I اکیداً یکنوا است.

مثال ۳۵۱: تابع معکوس تابع $f(x)=۲\cos^{-۱}(۲x-۳)$ کدام ویژگی را دارد؟

۱) در بازه‌ی $[\pi,۳\pi]$ پیوسته و اکیداً صعودی است.
۲) در بازه‌ی $[\pi,۳\pi]$ پیوسته و اکیداً نزولی است.
۳) در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ پیوسته و اکیداً صعودی است.
۴) در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ پیوسته و اکیداً نزولی است.

پاسخ: ابتدا دامنه‌ی تابع f را تعیین می‌کنیم: $-۱\le ۲x-۳\le ۱ \Rightarrow ۲\le ۲x\le ۴ \Rightarrow ۱\le x\le ۲$

تابع f در بازه‌ی $[۱,۲]$ پیوسته و یک‌به‌یک است و در نتیجه بنا بر نکته‌ی قبل اکیداً یکنواست. چون $f(۱)=۲\pi$ و $f(۲)=۰$، پس با افزایش xها از $x=۱$ تا $x=۲$، yها از $y=۲\pi$ به $y=۰$ کاهش یافته است. پس تابع f در $[۱,۲]$ پیوسته و اکیداً نزولی است. در نتیجه تابع $f^{-۱}$ در بازه‌ی $[f(۲),f(۱)]=[۰,۲\pi]$ پیوسته و اکیداً نزولی است. پس گزینه‌ی (۴) صحیح است.

مثال ۳۵۲: تابع معکوس تابع $f(x)=\begin{cases} x^۳+۱ & ۰\le x<۱ \\ ۱-x^۲ & -۱\le x<۰ \end{cases}$، کدام ویژگی را دارد؟

۱) در بازه‌ی $[۰,۲)$ پیوسته و اکیداً نزولی است.

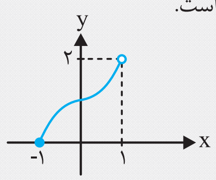
۲) در بازه‌ی $[۰,۲)$ پیوسته و اکیداً صعودی است.

۳) در بازه‌ی $(۰,۲)$ پیوسته و اکیداً نزولی است.

۴) در بازه‌ی $(۰,۲]$ پیوسته و اکیداً صعودی است.

پاسخ:

نمودار تابع f به صورت مقابل است:



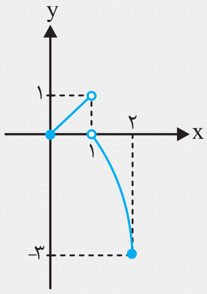
با توجه به نمودار، تابع f در بازه‌ی $[-۱,۱)$ پیوسته و صعودی اکید است و در نتیجه تابع $f^{-۱}$ در بازه‌ی $[۰,۲)$ (برد تابع f) پیوسته و اکیداً صعودی است و لذا گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۳۵۳: معکوس تابع $f(x)=\begin{cases} x & ۰\le x<۱ \\ ۱-x^۲ & ۱<x\le ۲ \end{cases}$ در کدام بازه‌ی زیر پیوسته است؟

۱) $[-۲,۱)$ ۲) $[-۱,۱]$ ۳) $[-۳,۰)$ ۴) $[۰,۱]$

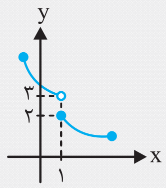
پاسخ:

نمودار تابع f به‌صورت مقابل است:



مطابق شکل، تابع f در هریک از بازه‌های $[۰,۱)$ و $(۱,۲]$ پیوسته است. بنابراین تابع $f^{-۱}$ نیز در هر یک از بازه‌های $[۰,۱)$ و $[-۳,۰)$ پیوسته است. لذا گزینه‌ی (۳) صحیح است.

مثال ۳۵۴: شکل مقابل نمودار تابع f است. تابع $f^{-۱}$ در نقطه‌ی .... پیوستگی .... دارد.



۱) $x=۲$، راست

۲) $x=۳$، راست

۳) $x=۲$، چپ

۴) $x=۳$، چپ

پاسخ:

تابع f در $x=۱$ پیوستگی راست دارد و f در دامنه‌ی خود نزولی اکید است. بنابراین تابع $f^{-۱}$ در نقطه‌ی به طول $x=f(۱)=۲$ پیوستگی چپ خواهد داشت.

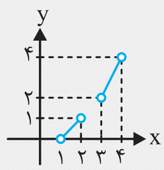
لذا گزینه‌ی (۳) صحیح است.

مثال ۳۵۵: اگر $f(x)=\begin{cases} x-۱ & ۱<x<۲ \\ ۲x-۴ & ۳<x<۴ \end{cases}$، تابع $f^{-۱}$ در چند نقطه از دامنه‌اش ناپیوسته است؟ (مسأله‌ی ۱ کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۰۴)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ:

نمودار تابع f به‌صورت مقابل است:



همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، تابع f در بازه‌های $(۱,۲)$ و $(۳,۴)$ پیوسته است و نقطه‌ی ناپیوستگی ندارد. بنابراین تابع $f^{-۱}$ نیز در بازه‌های $(۰,۱)$ و $(۲,۴)$ پیوسته بوده و نقطه‌ی ناپیوستگی ندارد و بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

۷ تست‌های جلسه هفتم

۵۹۰. تابع $y=\frac{1}{|x-1|-1}$ در چند نقطه از دامنه‌اش ناپیوسته است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) صفر ۴) ۲

۵۹۱. اگر $f(x)=\frac{2x+3}{x+1}$ و $g(x)=\frac{x^2-2}{x+2}$، آن‌گاه تابع gof در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۹۲. تابع $f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x-1}$ در کدام بازه‌ی زیر پیوسته است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) $[1,3]$ ۲) $[0,3]$ ۳) $(1,4]$ ۴) $[-3,0]$

۵۹۳. در کدام‌یک از بازه‌های زیر، تابع $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\log(x-1)$ پیوسته است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) $[-2,2]$ ۲) $[0,2]$ ۳) $(1,2]$ ۴) $[1,2]$

۵۹۴. به‌ازای کدام مجموعه مقادیر m، تابع $f(x)=\frac{x^2-1}{\sqrt{mx^2-2x+4m}}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است؟

۱) $m<-\frac{1}{2}$ ۲) $0<m<\frac{1}{2}$ ۳) $m>\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}$

۵۹۵. اگر $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\sqrt{2x^2-1}$ باشد، تابع $y=gof(x)$ در کدام‌یک از بازه‌های زیر پیوسته است؟

۱) $(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ ۲) $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$ ۳) $(\pi,\frac{7\pi}{4})$ ۴) $(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$

۵۹۶. تابع $f(x)=\begin{cases}2x^3-4 & x\in\mathbb{Z}\\ 8x-x^2 & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\end{cases}$ در چند نقطه به طول صحیح پیوسته است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۹۷. به‌ازای کدام مجموعه مقادیر a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}[[x]-x] & x\notin\mathbb{Z}\\ a & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ تابعی پیوسته است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $\varnothing$ ۲) $\{-1\}$ ۳) $\{0\}$ ۴) $\{1\}$

۵۹۸. اگر $f(x)=\begin{cases}3x^2+5x & x\in\mathbb{Q}\\ x+7 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$، تابع $f(x)$ در نقاط به طول‌های $x=1$ و $x=2$ به‌ترتیب چگونه است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) پیوسته- پیوسته ۲) پیوسته- ناپیوسته ۳) ناپیوسته- پیوسته ۴) ناپیوسته- ناپیوسته

۵۹۹. اگر $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\in\mathbb{Q}\\ 9 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ باشد، تابع $y=xf(x)$ در چند نقطه پیوسته است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶۰۰. اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2} & x\in\mathbb{Q}\\ x-1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$، آن‌گاه تابع fof در چند نقطه پیوسته است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۶۰۱. تابع $f(x)=\begin{cases}a\sin 3x & 0\le x<\frac{\pi}{2}\\ b\cos 2x & \frac{\pi}{2}<x\le 2\pi\end{cases}$ با شرط $f(\frac{\pi}{2})=2$، در بازه‌ی $[0,2\pi]$ پیوسته است. مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) -5 ۲) صفر ۳) ۴ ۴) -4

۶۰۲. اگر تابع $f(x)=\begin{cases}ax+b & |x|>1\\ x^2-x & |x|\le 1\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار ab کدام است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) -1 ۲) ۱ ۳) -4 ۴) ۴

۶۰۳. به‌ازای کدام مقدار a، تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}} & x\geq a\\ \frac{1}{4}x\sqrt{x} & 0\leq x<a\end{cases}$ در بازه‌ی $(0,+\infty)$ پیوسته است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۲ و -2 ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\varnothing$

۶۰۴. اگر تابع $f(x)=\begin{cases}|x|[x-1] & x<2\\ -x+a & x\geq 2\end{cases}$ در بازه‌ی $[1,+\infty)$ پیوسته باشد، مقدار a کدام است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۰۵. به‌ازای کدام مقدار c تابع $f(x)=\begin{cases}\tan x-\sec x & x\neq\frac{\pi}{2}\\ c & x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$، در بازه‌ی $[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$ پیوسته است؟ $(\sec x=\frac{1}{\cos x})$ (آزمون‌های گاج)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -1 ۴) ۲

۶۰۶. اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\tan^{-1}(\tan x) & |x|<\frac{\pi}{2}\\ a\sin x+b\cos 2x & |x|\geq\frac{\pi}{2}\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، $2a-b$ کدام است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) صفر ۳) $-\frac{\pi}{2}$ ۴) π

۶۰۷. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{5x^2-4x} & |x|>1\\ 2-x & |x|\leq 1\end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ کدام است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۶۰۸. تابع $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}(\cos x)^{2n}$ در کدام‌یک از نقاط زیر حد دارد، ولی پیوسته نیست؟ (آزمون‌های گاج)

۱) $x=\frac{\pi}{2}$ ۲) $x=\frac{\pi}{4}$ ۳) $x=\frac{3\pi}{2}$ ۴) $x=\pi$

۶۰۹. تابع $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x^n-1}{x^{2n}+1}$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶۱۰. تابع $f(x)=(x^2-1)(2x-1)[x]$ در چند نقطه با طول‌های صحیح پیوسته است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۴

۶۱۱. تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=(x-1)[x]$ بر بازه‌ی $[0,2]$ در چند نقطه ناپیوسته است؟ (سراسری ریاضی)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۶۱۲. تابع $f(x)=(x^2-1)[x]$ در بازه‌ی $(-3,3)$ دارای چند نقطه‌ی ناپیوستگی است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۶۱۳. تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=(x-1)[x^2]$ در چند نقطه از بازه‌ی $(-1,2)$ ناپیوسته است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۱۴. تابع $f(x)=x[3x]$ در چند نقطه از بازه‌ی $(-1,1)$ پیوسته نیست؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۶۱۵. تابع $f(x)=[\frac{1}{x}]$ بر کدام بازه پیوسته است؟

۱) $[1,2]$ ۲) $(\frac{1}{2},1]$ ۳) $[\frac{1}{3},\frac{1}{2})$ ۴) $(\frac{1}{3},1]$

۶۱۶. تابع $f(x)=x[\frac{x}{2}]$ روی کدام بازه با بیش‌ترین طول پیوسته است؟

۱) $[-1,1)$ ۲) $[-2,4)$ ۳) $[-2,2)$ ۴) $[-1,2)$

۶۱۷. تابع $f(x)=[x^3-1]$ در بازه‌ی $[1,k^2)$ پیوسته است. بیش‌ترین مقدار k کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۲ ۳) $\sqrt[3]{6}$ ۴) $\sqrt[6]{2}$

۶۱۸. تابع $f(x)=\frac{[x^۲]}{x^۲-۲}$ در چند نقطه از بازه‌ی $(-۱,۲)$ ناپیوسته است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۱۹. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{۳[x]-[x]^۲}$ در چند نقطه از دامنه‌اش ناپیوسته است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) بی‌شمار ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

۶۲۰. تابع $f(x)=[x]^۲-[x]$ در چند نقطه‌ی صحیح پیوسته است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۶۲۱. تابع $y=-[-\frac{۳x+۶}{۴}]$ در بازه‌ی $(-\frac{۲۲}{۳},۳)$، در چند نقطه دارای ناپیوستگی است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۷

۶۲۲. تابع $y=[\sqrt{۳x}]$ در بازه‌ی $[۳,۴۸]$ چند نقطه‌ی ناپیوستگی دارد؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

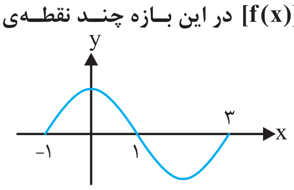
۶۲۳. تابع $y=\begin{cases}[۲x] & |x|<۲\\ x+۱ & |x|\geq ۲\end{cases}$ چند نقطه‌ی ناپیوستگی دارد؟

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۴

۶۲۴. نمودار تابع f در بازه‌ی $[-۱,۳]$ به‌صورت زیر است. اگر برد این تابع بازه‌ی $[-۲,۲]$ باشد، نمودار تابع براکتی $[f(x)]$ در این بازه چند نقطه‌ی ناپیوستگی دارد؟

۱) ۴ ۲) صفر

۳) ۷ ۴) ۸



۶۲۵. نمودار تابع $y=[x^۲-۲x]$ در بازه‌ی $[۰,۳]$، چند نقطه‌ی ناپیوستگی دارد؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۳

۶۲۶. تابع $f(x)=x[\sin x]$ در چند نقطه از بازه‌ی $[-\pi,۲\pi]$ ناپیوسته است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۵

۶۲۷. تابع $y=(\sin x-۱)[\cos x]$ در بازه‌ی $[-۲\pi,۲\pi]$ در چند نقطه ناپیوسته است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۴

۶۲۸. اگر $f(x)=x-[x]$ و $g(x)=[\frac{x}{۲}]$، آن‌گاه تابع gof در چند نقطه از بازه‌ی $[-۲,۲]$ ناپیوسته است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

۶۲۹. تابع براکتی $y=[۵x]-[۱۰x]$ در بازه‌ی $[۳,۴]$ چند نقطه‌ی ناپیوستگی دارد؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱

۶۳۰. تابع براکتی $y=[\sqrt{x}]-[\frac{x}{۳}]$ در بازه‌ی $[۴,۲۷]$ چند نقطه‌ی ناپیوستگی دارد؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۶۳۱. تابع $f(x)=[۲x][\frac{x}{۲}]$ در چند نقطه از بازه‌ی $(-۱,۲)$ پیوسته است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۴ ۴) ۲

۶۳۲. کدام‌یک از توابع زیر در بازه‌ی $[-۱,۲]$ شرایط قضیه‌ی مقدار میانی را دارد؟ (آزمون‌های گاج)

۱) $y=x(x-۲)[\frac{x}{۲}]$ ۲) $y=x(x-۱)[x]$ ۳) $y=x(x+۱)(x-۱)[x]$ ۴) $y=x(x+۱)[\frac{x}{۲}]$

۶۳۳. کدام خط زیر تابع $f(x)=۷(x-۱)(x-۲)+\frac{x}{۲}$ را در بازه‌ی $(۱,۲)$ قطع می‌کند؟

۱) $y=\frac{۵}{۴}$ ۲) $y=\frac{۳}{۲}$ ۳) $y=\frac{۱}{۲}$ ۴) $y=\frac{۳}{۴}$

۶۳۴. کدام‌یک از خطوط افقی زیر نمودار تابع $f(x)=x^۳+\frac{۱}{x+۱}$ را در فاصله‌ی $[۰,۱]$ قطع می‌کند؟ (آزمون‌های گاج)

۱) $y=\frac{۷}{۴}$ ۲) $y=\frac{۱}{۲}$ ۳) $y=۳$ ۴) $y=\frac{۵}{۴}$

۶۳۵. عدد c در قضیه‌ی مقدار میانی پیوستگی برای تابع $f(x)=\frac{x}{۱+x^۲}$ در بازه‌ی $[-۱,۱]$ و به‌ازای $k=\frac{۱}{۴}$ کدام است؟

۱) $۲-\sqrt{۳}$ ۲) $۲+\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۵}-۲$ ۴) $\sqrt{۵}+۲$

۶۳۶. معادله‌ی $x^۵+۳x-۲=۰$ دارای چند ریشه است؟

۱) دقیقاً یک ریشه ۲) حداقل ۵ ریشه ۳) دقیقاً ۵ ریشه ۴) حداقل دو ریشه

۶۳۷. جواب معادله‌ی $x^۳+x+۱=۰$ در کدام فاصله است؟

۱) $(۰,\frac{۱}{۴})$ ۲) $(-\frac{۳}{۴},-\frac{۱}{۲})$ ۳) $(-\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۴})$ ۴) $(-\frac{۱}{۴},۰)$

۶۳۸. ریشه‌های معادله‌ی $(x-۱)(x-۲)+(x+۱)(x-۴)=۰$ در کدام بازه‌ها قرار دارند؟

۱) $(-۱,۱)$ ، $(۱,۲)$ ۲) $(-۱,۱)$ ، $(۲,۴)$ ۳) $(۱,۲)$ ، $(۲,۴)$ ۴) معادله ریشه ندارد.

۶۳۹. ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $\sin \pi x = x$ در کدام‌یک از بازه‌های زیر واقع است؟

۱) $(۰,\frac{۱}{۴})$ ۲) $(\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲})$ ۳) $(\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳})$ ۴) $(\frac{۲}{۳},۱)$

۶۴۰. جواب معادله‌ی $x^۲=۲\sin x$ در کدام فاصله است؟

۱) $(۰,\frac{\pi}{۴})$ ۲) $(\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۲})$ ۳) $(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ ۴) $(\frac{۳\pi}{۴},\pi)$

۶۴۱. جواب معادله‌ی $\sin x+\cos x=x$ در کدام بازه است؟

۱) $(\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۲})$ ۲) $(\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۳})$ ۳) $(\frac{۲\pi}{۳},\frac{۳\pi}{۴})$ ۴) $(\frac{۳\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۶})$

۶۴۲. اگر معادله‌ی $x^۳+۲x^۲+x+a=$ در بازه‌ی $(۰,۱)$ دارای حداقل یک جواب باشد، حدود a کدام است؟

۱) $(۲,۴)$ ۲) $(-۲,۳)$ ۳) $(۰,۱)$ ۴) $(-۴,۰)$

۶۴۳. با توجه به جدول مقابل، در مورد ریشه‌های معادله‌ی $\cos x=۲x^۲$ در بازه‌ی $(۰,۱)$ کدام گزینه درست است؟

۱) ریشه ندارد. ۲) حداقل یک ریشه دارد.
۳) دقیقاً یک ریشه دارد. ۴) دقیقاً دو ریشه دارد.

x	۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱
cos x	۱	۰/۹۸	۰/۹۲	۰/۸۲	۰/۶۹	۰/۵۴
$۲x^۲$	۰	۰/۰۸	۰/۳۲	۰/۷۲	۱/۲۸	۲

۶۴۴. حدود k چه‌قدر باشد تا منحنی دو تابع $f(x)=\frac{k}{x^۲+۲}$ و $g(x)=۲x$ در فاصله‌ی $(-۱,۱)$ نقطه‌ی برخورد داشته باشند؟ (آزمون‌های گاج)

۱) $-۱<k<۲$ ۲) $-۲<k<۶$ ۳) $-۶<k<۸$ ۴) $-۶<k<۶$

۶۴۵. خط گذرا از نقطه‌ی $(۳,۲)$ و عمود بر نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم، منحنی $y=(m+۱)x^۲-۵x+۶$ را در بازه‌ی $(۲,۳)$ قطع می‌کند. حدود m کدام است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) $\frac{۱}{۳}<m<\frac{۱}{۲}$ ۲) $m>\frac{۳}{۴}$ ۳) $m<\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۲}{۹}<m<\frac{۳}{۴}$

۶۴۶. تابع زوج و پیوسته‌ی f در بازه‌ی $[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}]$ طوری تعریف شده است که $f(\frac{۱}{۲})=-۱$، به‌ازای کدام مقادیر k معادله‌ی $f(x)=k\sin \pi x$ در بازه‌ی $(\frac{-۱}{۲},\frac{۱}{۲})$ حداقل دارای یک ریشه است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) $|k|<۱$ ۲) $|k|>۱$ ۳) $|k|<\frac{۱}{۲}$ ۴) $|k|>\frac{۱}{۲}$

۶۴۷. اگر $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{۹-x}$ باشد، تمام بازه‌ی پیوستگی تابع $y=f^{-۱}(x)$ کدام است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) $[۰,۳]$ ۲) $[-۳,۰]$ ۳) $[-۳,۳]$ ۴) $[-۲,۲]$

۶۴۸. معکوس تابع $f(x)=۲\sin^{-۱}(x-۱)$ در کدام بازه پیوسته است؟

۱) $[-\pi,\pi]$ ۲) $[۰,\frac{۳\pi}{۲}]$ ۳) $[\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}]$ ۴) $[-۲\pi,۲\pi]$

۶۴۹. تابع معکوس تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+۱ & -۲\le x<۰ \\ x-[x] & ۰\le x<۱ \end{cases}$ ، روی کدام بازه‌ی زیر پیوسته است؟

۱) $[۰,۵]$ ۲) $(۰,۵]$ ۳) $(۰,۱]$ ۴) $(۱,۵]$

پاسخ تست‌های جلسه‌ی هفتم

۷

۵۹۰ ۱ ۲ **۳** ۴

این تابع، یک تابع گویا است و می‌دانیم توابع گویا در تمام نقاط دامنه‌ی خود پیوسته‌اند و در واقع توابعی پیوسته‌اند.

۵۹۱ **۱** ۲ ۳ ۴

تابع gof یک تابع کسری گویا می‌شود و لذا در هیچ نقطه از دامنه‌اش ناپیوسته نیست. توجه کنید که در ریشه‌های مخرج نمی‌توان در مورد پیوستگی یا ناپیوستگی صحبت کرد.

۵۹۲ ۱ ۲ ۳ **۴**

دامنه‌ی تابع f برابر است با $D_f=[-3,3]-\{1\}$. بنابراین تابع f در هر بازه که زیرمجموعه‌ی دامنه‌ی تابع f باشد پیوسته است. از بین بازه‌های داده‌شده فقط بازه‌ی $[-3,0]$ زیرمجموعه‌ی D_f است.

۵۹۳ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\left.\begin{array}{l}4-x^2\ge 0\Rightarrow -2\le x\le 2\\ x-1>0\Rightarrow x>1\end{array}\right\}\Rightarrow 1<x\le 2$$

تابع f روی دامنه‌ی خود یعنی بازه‌ی $(1,2]$ پیوسته است.

۵۹۴ ۱ ۲ **۳** ۴

باید دامنه‌ی تابع برابر $\mathbb{R}$ بوده و تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد. لذا باید داشته باشیم:

$$mx^2-2x+4m>0\Rightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m>0 \quad (1)\\ 4-16m^2<0\Rightarrow m^2>\frac{1}{4}\Rightarrow m>\frac{1}{2}\ \text{یا}\ m<\frac{-1}{2}\quad (2)\end{cases}$$

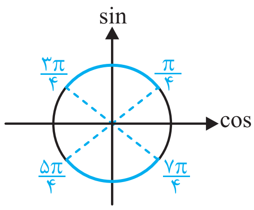
$$(1),(2)\Rightarrow m>\frac{1}{2}$$

۵۹۵ ۱ **۲** ۳ ۴

$$(gof)(x)=\sqrt{2\sin^2 x-1}\Rightarrow 2\sin^2 x-1\ge 0$$

$$\Rightarrow \sin^2 x\ge\frac{1}{2}\Rightarrow \sin x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{یا}\ \sin x\le-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین تابع gof در هر بازه که زیرمجموعه‌ی یکی از محدوده‌های مشخص شده روی دایره‌ی مثلثاتی باشد، پیوسته است.



۵۹۶ ۱ ۲ **۳** ۴

$$2x^3-4=8x-x^2\Rightarrow 2x^3+x^2-8x-4=0$$

$$\Rightarrow x^2(2x+1)-4(2x+1)=0\Rightarrow(2x+1)(x^2-4)=0$$

$$\Rightarrow x=-\frac{1}{2}\ \text{یا}\ x=\pm 2$$

بنابراین تابع f فقط در دو نقطه با طول صحیح یعنی $x=\pm 2$ پیوسته است.

۵۹۷ ۱ **۲** ۳ ۴

$$x\notin\mathbb{Z}\Rightarrow 0<x-[x]<1\Rightarrow -1<[x]-x<0\Rightarrow[[x]-x]=-1$$

بنابراین باید $a=-1$ باشد.

۵۹۸ ۱ **۲** ۳ ۴

$$3x^2+5x=x+7\Rightarrow 3x^2+4x-7=0\Rightarrow x=1\ \text{یا}\ x=-\frac{7}{3}$$

بنابراین تابع f در نقطه‌ی $x=1$ پیوسته و در نقطه‌ی $x=2$ ناپیوسته است.

۵۹۹ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$x^2=9\Rightarrow x=\pm 3$$

تابع f در نقاط $x=\pm 3$ پیوسته و چون $g(x)=x$ نیز در این نقاط پیوسته است، پس تابع $y=xf(x)$ در این دو نقطه پیوسته است. از طرفی در $x=0$، تابع f ناپیوسته ولی کران‌دار و تابع $g(x)=x$ عامل صفرکننده برای تابع $y=xf(x)$ می‌باشد و لذا y در $x=0$ نیز پیوسته است.

۶۰۰ ۱ **۲** ۳ ۴

چون برای هر x، مقدار $f(x)$ ثابت است، پس $fof(x)=f(x)-1$. یعنی تعداد نقاط پیوستگی تابع fof با تعداد نقاط پیوستگی $f(x)$ برابر است. چون تابع f فقط در یک نقطه $(x-1=\sqrt{2}\Rightarrow x=\sqrt{2}+1)$ پیوسته است، پس تابع fof نیز فقط در همین نقطه پیوسته است.

۶۰۱ ۱ **۲** ۳ ۴

تابع f در نقطه‌ی مرزی $x=\frac{\pi}{2}$ نیز پیوسته است. پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l}f(\frac{\pi}{2})=2\\ f((\frac{\pi}{2})^+)=b\cos\pi=-b\\ f((\frac{\pi}{2})^-)=a\sin\frac{3\pi}{2}=-a\end{array}\right\}\Rightarrow a=b=-2\Rightarrow a-b=0$$

۶۰۲ **۱** ۲ ۳ ۴

هریک از ضابطه‌های تابع $f(x)=\begin{cases}ax+b & x>1\ \text{یا}\ x<-1\\ x^2-x & -1\le x\le 1\end{cases}$، در دامنه‌ی خود پیوسته‌اند. بنابراین تابع f باید در نقاط مرزی $x=1$ و $x=-1$ نیز پیوسته باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{cases}f(1)=f(1^+)=f(1^-)\Rightarrow a+b=0\\ f(-1)=f((-1)^+)=f((-1)^-)\Rightarrow -a+b=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow b=1\ ,\ a=-1\Rightarrow ab=-1$$

۶۰۳ ۱ ۲ **۳** ۴

کافی است تابع f در نقطه‌ی مرزی $x=a$ پیوسته باشد.

$$\left.\begin{array}{l}f(a)=f(a^+)=\frac{1}{\sqrt{a}}\\ f(a^-)=\frac{1}{4}a\sqrt{a}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{4}a\sqrt{a}\Rightarrow a^2=4\xrightarrow{a>0}a=2$$

۶۰۴ ۱ **۲** ۳ ۴

تابع f در نقطه‌ی مرزی $x=2$ از این بازه نیز پیوسته است. پس:

$$\left.\begin{array}{l}f(2^-)=2\times[1^-]=0\\ f(2)=f(2^+)=-2+a\end{array}\right\}\Rightarrow -2+a=0\Rightarrow a=2$$

۶۰۵ **۱** ۲ ۳ ۴

کافی است تابع f در نقطه‌ی مرزی $x=\frac{\pi}{2}$ پیوسته باشد.

داریم $f(\frac{\pi}{2})=c$. همچنین:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x-\sec x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{1}{\cos x})$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{\sin x-1}{\cos x})\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-\sin x}=0$$

پس باید $c=0$ باشد.

۶۰۶ (۱ ۲ ۳ **۴**)

برای هر $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$، داریم $\tan^{-1}(\tan x)=x$. بنابراین هریک از ضابطه‌های تابع

$$f(x)=\begin{cases} x & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ a\sin x+b\cos 2x & x\ge\frac{\pi}{2} \text{ یا } x\le-\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

در دامنه‌ی خود پیوسته‌اند. بنابراین کافی است در نقاط مرزی $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=-\frac{\pi}{2}$ نیز تابع f پیوسته باشد. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f((\frac{\pi}{2})^-)=\frac{\pi}{2}\\ f(\frac{\pi}{2})=f((\frac{\pi}{2})^+)=a-b\end{array}\right\}\Rightarrow a-b=\frac{\pi}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f((-\frac{\pi}{2})^+)=-\frac{\pi}{2}\\ f(-\frac{\pi}{2})=f((-\frac{\pi}{2})^-)=-a-b\end{array}\right\}\Rightarrow -a-b=-\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow a=\frac{\pi}{2}\ ,\ b=0\Rightarrow 2a-b=\pi$$

۶۰۷ (**۱** ۲ ۳ ۴)

هریک از ضابطه‌های تابع

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{5x^2-4x} & x>1 \text{ یا } x<-1\\ 2-x & -1\le x\le 1\end{cases}$$

در دامنه‌ی خود پیوسته‌اند. لذا کافی است پیوستگی تابع f را در نقاط مرزی $x=1$ و $x=-1$ بررسی کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=f(1^-)=1\\ f(1^+)=1\end{array}\right\}\Rightarrow \text{تابع f در } x=1 \text{ پیوسته است.}$$

$$\left.\begin{array}{l} f((-1)^-)=\sqrt{9}=3\\ f(-1)=f((-1)^+)=3\end{array}\right\}\Rightarrow \text{تابع f در } x=-1 \text{ پیوسته است.}$$

پس تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۶۰۸ (۱ ۲ ۳ **۴**)

با توجه به این‌که $\lim\limits_{n\to+\infty} c^n=\begin{cases}0 & |c|<1\\ 1 & c=1\end{cases}$، داریم:

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}(\cos x)^{2n}=\lim_{n\to+\infty}(\cos^2 x)^n=\begin{cases}0 & |\cos^2 x|<1\\ 1 & |\cos^2 x|=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}0 & x\neq k\pi\\ 1 & x=k\pi\end{cases}\ ,\ (k\in\mathbb{Z})$$

توجه کنید که در نقاط $x=k\pi$، $(k\in\mathbb{Z})$، تابع f حد دارد ولی پیوسته نیست.

۶۰۹ (۱ **۲** ۳ ۴)

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^n-1}{x^{2n}+1}=\begin{cases}-1 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\\ 0 & x=1\\ \text{موجود نیست.} & x=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}-1 & -1<x<1\\ 0 & x\ge 1 \text{ یا } x<-1\end{cases}$$

با توجه به ضابطه‌ی f، معلوم می‌شود که تابع f فقط در نقطه‌ی مرزی $x=1$ ناپیوسته است. توجه کنید که این تابع در نقطه‌ی $x=-1$ تعریف نشده است. لذا در مورد پیوستگی یا ناپیوستگی تابع در این نقطه نمی‌توان صحبت کرد. در بقیه‌ی نقاط نیز تابع پیوسته است.

۶۱۰ (۱ **۲** ۳ ۴)

تابع $y=[x]$ در تمام نقاط با طول صحیح ناپیوسته است اما تابع بیرون براکت فقط در دو نقطه به طول‌های صحیح، یعنی $x=1$ و $x=-1$، دارای عامل صفرکننده است و لذا تابع f در این نقاط پیوسته است.

۶۱۱ (۱ ۲ **۳** ۴)

مقدار تابع درون براکت به‌ازای نقاط $x=0$، $x=1$ و $x=2$ از بازه‌ی $[0,2]$ عدد صحیح می‌شود که از این میان تابع بیرون براکت در $x=1$ دارای عامل صفرکننده بوده و لذا f در این نقطه پیوسته است و چون تابع درون براکت یعنی $y=x$ همواره صعودی است، تابع f در نقطه‌ی انتهایی $x=0$ پیوسته ولی در $x=2$ ناپیوسته است.

۶۱۲ (۱ ۲ **۳** ۴)

اعضای مجموعه‌ی $\{-2,-1,0,1,2\}$، نقاط مشکوک به ناپیوستگی تابع f در بازه‌ی $(-3,3)$ هستند. تابع بیرون براکت در $x=1$ و $x=-1$ دارای عامل صفرکننده بوده و لذا تابع f در این دو نقطه پیوسته است. در نتیجه تابع f در سه نقطه‌ی باقی‌مانده ناپیوسته است.

۶۱۳ (۱ **۲** ۳ ۴)

نقاطی از بازه‌ی $(-1,2)$ که به‌ازای آن‌ها عبارت درون براکت تبدیل به عدد صحیح می‌شود (نقاط مشکوک)، عبارت‌اند از $x=0$، $x=1$، $x=\sqrt{2}$ و $x=\sqrt{3}$

در $x=0$، x^2 مینیمم نسبی دارد و در $x=1$، تابع بیرون براکت دارای عامل صفرکننده است. پس به‌ازای این دو مقدار f پیوسته خواهد بود. اما در $x=\sqrt{2}$ و $x=\sqrt{3}$، تابع f ناپیوسته است.

۶۱۴ (**۱** ۲ ۳ ۴)

$$3x=k\Rightarrow x=\frac{k}{3}\ ;\ k\in\mathbb{Z}$$

مجموعه نقاط مشکوک به ناپیوستگی تابع f در بازه‌ی $(-1,1)$ عبارت است از $\{-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\}$. از این میان تابع در $x=0$ پیوسته است، زیرا $x=0$ عامل صفرکننده‌ی تابع بیرون براکت است و لذا تابع f در ۴ نقطه‌ی باقی‌مانده ناپیوسته است.

۶۱۵ (۱ **۲** ۳ ۴)

$$\frac{1}{x}=k\Rightarrow x=\frac{1}{k}\ ;\ k\in\mathbb{Z}-\{0\}$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه نقاط مشکوک به ناپیوستگی}=\{\pm1,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3},\dots\}$$

چون تابع $y=\frac{1}{x}$ روی بازه‌ی $(0,+\infty)$ نزولی است، پس در این بازه مینیمم نسبی ندارد و نیز تابع دارای عامل صفرکننده نیست، لذا تابع در تمام نقاط مشکوک ناپیوسته بوده و نیز روی بازه‌های $(\frac{1}{2},1]$، $(\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$، $(\frac{1}{4},\frac{1}{3}]$ و ... پیوسته است. در واقع چون تابع نزولی است، باید در بازه‌های پیوستگی، انتهای بازه بسته باشد.

۶۱۶ (۱ ۲ **۳** ۴)

عبارت درون براکت به‌ازای اعداد زوج عدد صحیح می‌شود. چون تابع بیرون براکت در $x=0$ دارای عامل صفرکننده است، پس تابع f در این نقطه پیوسته و در بقیه‌ی نقاط زوج ناپیوسته است. البته به دلیل صعودی بودن تابع درون براکت یعنی $y=\frac{x}{2}$، تابع f در نقاط به طول زوج پیوستگی راست دارد. پس می‌توان گفت تابع f روی بازه‌های $[-2,0)$، $[0,2)$، $[2,4)$ و ... پیوسته است. با ادغام دو بازه‌ی $[-2,0)$ و $[0,2)$ بزرگ‌ترین بازه که f روی آن پیوسته است، به‌دست می‌آید که همان بازه‌ی $[-2,2)$ می‌باشد.

۶۱۷

تابع f را می‌توان به صورت $f(x)=[x^۳]-۱$ نوشت. نقاط مشکوک به ناپیوستگی تابع f را تعیین می‌کنیم:

$$x^۳=k \Rightarrow x=\sqrt[۳]{k}\ ;\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow x=۰,\pm۱,\pm\sqrt[۳]{۲},\pm\sqrt[۳]{۳},\dots$$

چون تابع f در بیرون براکت عامل صفرکننده ندارد و نیز تابع $y=x^۳$ فاقد مینیمم نسبی است، لذا این تابع در تمام نقاط مشکوک ناپیوسته است. اما از آن‌جایی‌که $y=x^۳$ صعودی است، در این نقاط پیوستگی راست دارد. پس می‌توان گفت تابع f در هریک از بازه‌های $[۰,۱)$، $[۱,\sqrt[۳]{۲})$، $[\sqrt[۳]{۲},\sqrt[۳]{۳})$ و ... پیوسته است.

در نتیجه اولین نقطه بلافاصله بعد از نقطه‌ی $x=۱$ که تابع f در آن ناپیوسته است، نقطه‌ی $x=\sqrt[۳]{۲}$ می‌باشد. پس: $k^۲=\sqrt[۳]{۲}\Rightarrow k=\sqrt[۶]{۲}$

۶۱۸

عبارت درون براکت به‌ازای $x=۰$، $x=۱$، $x=\sqrt{۲}$ و $x=\sqrt{۳}$ از بازه‌ی $(-۱,۲)$ عدد صحیح می‌شود. از این میان $x=۰$، نقطه‌ی مینیمم نسبی $x^۲$ است. پس تابع f در این نقطه پیوسته است. از سوی دیگر تابع f در $x=\sqrt{۲}$ تعریف نشده است (ریشه‌ی مخرج). لذا در مورد پیوستگی یا ناپیوستگی f در این نقطه بحثی نداریم. بنابراین تابع f فقط در دو نقطه‌ی $x=۱$ و $x=\sqrt{۳}$ از این بازه ناپیوسته است.

۶۱۹

ابتدا دامنه‌ی تابع f را تعیین می‌کنیم. با فرض $[x]=t$ داریم:

$$۳t-t^۲\geq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰\leq t\leq ۳$$
$$\Rightarrow ۰\leq [x]\leq ۳ \Rightarrow ۰\leq x<۴$$

پس $D_f=[۰,۴)$ و نقاط مشکوک به ناپیوستگی در این بازه عبارت‌اند از $x=۰$، $x=۱$، $x=۲$ و $x=۳$. از این میان تابع در نقطه‌ی انتهایی $x=۰$ پیوستگی راست دارد و لذا پیوسته است. همچنین:

$\left.\begin{matrix} f(۱)=f(۱^+)=\sqrt{۲} \\ f(۱^-)=۰ \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ f در $x=۱$ ناپیوسته است.

$\left.\begin{matrix} f(۲)=f(۲^+)=\sqrt{۲} \\ f(۲^-)=\sqrt{۲} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ f در $x=۲$ پیوسته است.

$\left.\begin{matrix} f(۳)=f(۳^+)=۰ \\ f(۳^-)=\sqrt{۲} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ f در $x=۳$ ناپیوسته است.

بنابراین تابع f در دو نقطه‌ی $x=۱$ و $x=۳$ ناپیوسته است.

۶۲۰

فرض کنیم تابع f در نقطه‌ی به طول $x=n$ که $n\in\mathbb{Z}$ پیوسته باشد. در این صورت:

$$f(n)=f(n^+)=f(n^-)\Rightarrow n^۲-n=(n-۱)^۲-(n-۱)\Rightarrow n=۱$$

پس تابع f فقط در یک نقطه با طول صحیح و آن هم $x=۱$ پیوسته است.

۶۲۱

برد تابع درون براکت را یافته، در این صورت اعداد صحیح واقع در برد تابع همان نقاط ناپیوستگی این تابع است. زیرا مینیمم و عامل صفر نداریم.

$$-\frac{۲۲}{۳}<x<۳ \xrightarrow{\times ۳} -۲۲<۳x<۹ \xrightarrow{+۶} -۱۶<۳x+۶<۱۵$$
$$\xrightarrow{\div ۴} -۴<\frac{۳x+۶}{۴}<\frac{۱۵}{۴}$$

بنابراین تابع $y=[\frac{۳x+۶}{۴}]$ در هر یک از نقاط صحیح بازه‌ی $(-۴,\frac{۱۵}{۴})$ یعنی در نقاط مجموعه‌ی $\{-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}$ ناپیوسته است.

۶۲۲

$$۳\leq x\leq ۴۸ \Rightarrow ۹\leq ۳x\leq ۱۴۴ \Rightarrow ۳\leq \sqrt{۳x}\leq ۱۲$$

بنابراین مجموعه نقاط مشکوک به ناپیوستگی تابع $y=[\sqrt{۳x}]$ عبارت است از: $\{۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲\}$

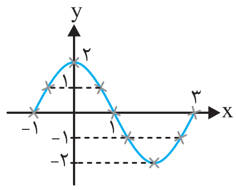
تابع درون براکت یعنی $f(x)=\sqrt{۳x}$ صعودی است. پس در نقطه‌ی انتهایی $x=۳$ پیوستگی راست دارد و در نتیجه پیوسته است ولی در نقطه‌ی انتهایی $x=۱۲$ ناپیوسته است، زیرا نزولی نیست.

۶۲۳

ضابطه‌ی اول تابع $y=\begin{cases}[۲x] & -۲<x<۲\\ x+۱ & x\geq ۲ \text{ یا } x\leq -۲\end{cases}$ در نقاط $\pm\frac{۳}{۲}$، ±۱، $\pm\frac{۱}{۲}$ و ۰ ناپیوسته است. اما ضابطه‌ی دوم روی دامنه‌ی خود پیوسته است (چندجمله‌ای است). همچنین در نقطه‌ی مرزی $x=-۲$ ناپیوسته و در نقطه‌ی مرزی $x=۲$ پیوسته است. بنابراین تابع در ۸ نقطه ناپیوسته است.

۶۲۴

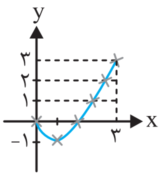
نقاطی که $f(x)\in\mathbb{Z}$ یا همان نقاط مشکوک به ناپیوستگی روی نمودار با علامت (×) مشخص شده است.



یکی از این نقاط که عرض آن ۲- می‌باشد، نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع f بوده و لذا $[f(x)]$ در این نقطه پیوسته است. در نقطه‌ی انتهایی $x=-۱$، تابع f صعودی و لذا $[f(x)]$ در این نقطه دارای پیوستگی راست بوده و لذا پیوسته است. در ۷ نقطه‌ی دیگر تابع $[f(x)]$ ناپیوسته است.

۶۲۵

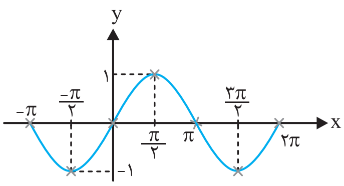
نمودار تابع درون براکت یعنی $f(x)=x^۲-۲x=(x-۱)^۲-۱$ را در بازه‌ی $[۰,۳]$ رسم کرده و نقاط مشکوک به ناپیوستگی را تعیین می‌کنیم. از میان ۶ نقطه‌ی مشکوک که با علامت (×) روی نمودار مشخص شده است، تابع f در $x=۱$ دارای مینیمم نسبی بوده و لذا تابع $y=[x^۲-۲x]$ در این نقطه پیوسته است.



توجه کنید که تابع درون براکت در نقاط انتهایی $x=۰$ و $x=۳$ می‌بایست به ترتیب صعودی و نزولی باشد تا در این نقاط پیوسته باشد، اما این‌طور نیست. لذا تابع در این نقاط و البته در سه نقطه‌ی دیگر نیز ناپیوسته است.

۶۲۶

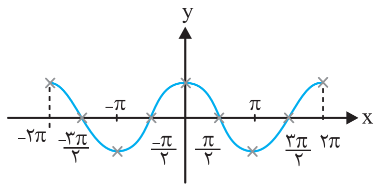
نمودار تابع داخل براکت یعنی $y=\sin x$ را رسم کرده و نقاط مشکوک به ناپیوستگی را روی آن با علامت (×) مشخص می‌کنیم.



نقاط به طول‌های $x=\frac{۳\pi}{۲}$ و $x=-\frac{\pi}{۲}$، مینیمم نسبی تابع درون براکت و نیز $x=۰$ عامل صفرکننده‌ی تابع بیرون براکت بوده و لذا تابع f در این سه نقطه پیوسته است. در نقاط انتهایی $x=-\pi$ و $x=۲\pi$ می‌بایست به‌ترتیب پیوستگی راست و چپ داشته باشیم که این موضوع به ترتیب صعودی و نزولی بودن تابع درون براکت را در این نقاط می‌طلبد که این‌طور نیست. پس تابع f در مجموعه نقاط $\{-\pi,\frac{\pi}{۲},\pi,۲\pi\}$ ناپیوسته است.

۶۲۷ — **۱** ۲ ۳ ۴

نقاط مشکوک به ناپیوستگی تابع درون براکت یعنی $y=\cos x$ در بازه‌ی $[-2\pi,2\pi]$ روی نمودار با علامت $(\times)$ مشخص شده است.



نقاط $x=\pi$ و $x=-\pi$ نقاط مینیمم نسبی تابع درون براکت هستند و نیز تابع بیرون براکت در نقاط $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=-\frac{3\pi}{2}$ دارای عامل صفرکننده است. پس تابع در این چهار نقطه پیوسته است. در نقطه‌ی انتهایی چپ، یعنی $x=-2\pi$، تابع درون براکت نزولی و در نقطه‌ی انتهایی راست، یعنی $x=2\pi$، صعودی است و لذا در این نقاط به‌ترتیب پیوستگی راست و چپ نداریم و لذا تابع در این نقاط ناپیوسته است. پس تابع در نقاط -2π، $-\frac{\pi}{2}$، 0، $\frac{3\pi}{2}$ و 2π ناپیوسته است.

۶۲۸ — **۱** ۲ ۳ ۴

$$gof(x)=g(f(x))=[\frac{1}{2}(x-[x])]\xrightarrow{0\le x-[x]<1} gof(x)=0$$

بنابراین تابع gof تابعی ثابت است و در تمام نقاط بازه‌ی $[-2,2]$ پیوسته می‌باشد.

۶۲۹ — **۱** ۲ ۳ ۴

می‌دانیم: $[2x]=[x]+[x+\frac{1}{2}]$. بنابراین:

$$y=[5x]-[10x]=[5x]-[2(5x)]$$

$$=[5x]-([5x]+[5x+\frac{1}{2}])=-[5x+\frac{1}{2}]$$

اکنون نقاط مشکوک به ناپیوستگی تابع را در بازه‌ی $[3,4]$ تعیین می‌کنیم:

$$3\le x\le 4\xrightarrow{\times 5}15\le 5x\le 20\xrightarrow{+\frac{1}{2}}15/5\le 5x+\frac{1}{2}\le 20/5$$

تابع درون براکت به‌ازای مجموعه نقاط $\{16,17,18,19,20\}$ تبدیل به عدد صحیح می‌شود. چون تابع در هیچ یک از این نقاط دارای عامل صفرکننده و مینیمم نسبی نیست، لذا تابع در تمام این نقاط ناپیوسته است.

۶۳۰ — ۱ ۲ **۳** ۴

تابع $f(x)=\sqrt{x}$ به‌ازای مجموعه نقاط $\{4,9,16,25\}$ از بازه‌ی $[4,27]$ عدد صحیح می‌شود و چون همواره صعودی است، بنابراین تابع $y_1=[\sqrt{x}]$ در نقطه‌ی انتهایی $x=4$ پیوستگی راست دارد و لذا پیوسته است. پس تابع $y_1=[\sqrt{x}]$ در سه نقطه‌ی ۲۵، ۱۶ و ۹ از بازه‌ی مذکور ناپیوسته است.

هم‌چنین تابع $g(x)=\frac{x}{3}$ به‌ازای مجموعه نقاط $\{6,9,12,15,18,21,24,27\}$ از بازه‌ی $[4,27]$ عدد صحیح می‌شود و چون همواره صعودی است پس تابع $y_2=[\frac{x}{3}]$ نمی‌تواند در نقطه‌ی انتهایی $x=27$ پیوسته باشد. لذا تابع $y_2=[\frac{x}{3}]$ در تمام نقاط یادشده ناپیوسته است. اکنون تابع $y=[\sqrt{x}]-[\frac{x}{3}]$ در نقاط غیرمشترک یعنی مجموعه نقاط $\{6,12,15,16,18,21,24,25,27\}$ ناپیوسته (تفاضل یک تابع پیوسته و یک تابع ناپیوسته حتماً ناپیوسته است.) و در نقطه‌ی مشترک $x=9$ پیوسته است. (خودتان تحقیق کنید.)

۶۳۱ — ۱ ۲ ۳ **۴**

ابتدا نقاط مشکوک به ناپیوستگی در توابع $y=[\frac{x}{2}]$ و $y=[2x]$ را در بازه‌ی $(-1,2)$ می‌یابیم:

$$y=[\frac{x}{2}]:\frac{x}{2}=k\Rightarrow x=2k\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}x=0$$

$$y=[2x]:2x=k\Rightarrow x=\frac{k}{2}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}x=-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}$$

تابع f در نقطه‌ی مشترک $x=0$ ناپیوسته است. زیرا:

$$f(0)=0\ ,\ f(0^+)=0\ ,\ f(0^-)=1$$

همان‌طور که قبلاً در بررسی پیوستگی حاصل‌ضرب دو تابع گفتیم، در نقاط غیرمشترک، اگر تابع پیوسته برابر صفر شود، آن‌گاه تابع f پیوسته خواهد شد و در غیر این صورت f ناپیوسته است. بر این اساس چون تابع $y=[\frac{x}{2}]$ که در نقاط غیرمشترک پیوسته است، به‌ازای $x=\frac{1}{2}$، $x=\frac{3}{2}$ و $x=1$ صفر می‌شود، پس تابع f در این نقاط پیوسته بوده و تنها در نقاط $x=-\frac{1}{2}$ و $x=0$ ناپیوسته است.

۶۳۲ — **۱** ۲ ۳ ۴

توابع ارائه شده در گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) در $x=2$ پیوستگی چپ ندارند و لذا در $[-1,2]$ ناپیوسته‌اند.

۶۳۳ — ۱ ۲ ۳ **۴**

تابع f در همه‌جا و به‌خصوص در بازه‌ی $[1,2]$ پیوسته است و $f(1)=\frac{1}{2}$ و $f(2)=1$. بنابراین هر خط مانند $y=k$ که $\frac{1}{2}<k<1$ باشد، نمودار تابع f را در بازه‌ی $(1,2)$ قطع می‌کند. از بین گزینه‌ها فقط $y=\frac{3}{4}$ این ویژگی را دارد.

۶۳۴ — ۱ ۲ ۳ **۴**

تابع f در فاصله‌ی $[0,1]$ پیوسته است و $f(0)=1$ و $f(1)=\frac{3}{2}$. بنابراین طبق قضیه‌ی مقدار میانی هر خط به معادله‌ی $y=k$ که $1<k<\frac{3}{2}$ باشد، نمودار f را در فاصله‌ی $[0,1]$ قطع می‌کند.

۶۳۵ — **۱** ۲ ۳ ۴

بنابر قضیه‌ی مقدار میانی عدد $c\in[-1,1]$ موجود است به‌طوری‌که داشته باشیم:

$$f(c)=k\Rightarrow\frac{c}{c^2+1}=\frac{1}{4}\Rightarrow c^2-4c+1=0$$

$$\Rightarrow c=2\pm\sqrt{3}\xrightarrow{c\in[-1,1]}c=2-\sqrt{3}$$

۶۳۶ — **۱** ۲ ۳ ۴

تابع $f(x)=x^5+3x-2$ روی $\mathbb{R}$ و به‌خصوص بازه‌ی $[0,1]$ پیوسته است و $f(0)f(1)<0$ و نیز $f'(x)=5x^4+3>0$ و در نتیجه تابع f اکیداً صعودی بوده و لذا بنابر قضیه‌ی ریشه معادله‌ی $f(x)=0$ دقیقاً یک ریشه دارد.

۶۳۷ — ۱ **۲** ۳ ۴

تابع $f(x)=x^3+x+1$ پیوسته است و چون $f'(x)=3x^2+1>0$، پس تابع f همواره صعودی است. بنابراین اگر $f(a)f(b)<0$، آن‌گاه f در بازه‌ی (a,b) دارای ریشه است. با امتحان گزینه‌ها معلوم می‌شود که $f(-\frac{3}{4})=-\frac{11}{64}$ و $f(-\frac{1}{2})=\frac{3}{8}$ و لذا $f(-\frac{3}{4})f(-\frac{1}{2})<0$. پس معادله در بازه‌ی $(-\frac{3}{4},-\frac{1}{2})$ ریشه دارد.

۶۳۸ ۱ **۲** ۳ ۴

تابع $f(x)=(x-1)(x-2)+(x+1)(x-4)$ روی $\mathbb{R}$ و در نتیجه روی هر بازه‌ای پیوسته است و داریم:

$f(1)=-6\ ,\ f(-1)=6\ ,\ f(2)=-6\ ,\ f(4)=6$

چون $f(-1)\times f(1)<0$ و $f(2)\times f(4)<0$، پس بنابر قضیه‌ی بولزانو تابع f حداقل یک ریشه در بازه‌ی $(-1,1)$ و حداقل یک ریشه در بازه‌ی $(2,4)$ دارد. از طرفی تابع f از درجه‌ی دوم است، لذا حداکثر دو ریشه دارد. پس می‌توان گفت معادله‌ی $f(x)=0$ دقیقاً یک جواب در بازه‌ی $(-1,1)$ و دقیقاً یک جواب در بازه‌ی $(2,4)$ دارد.

۶۳۹ ۱ ۲ ۳ **۴**

تابع $f(x)=\sin\pi x-x$ روی $\mathbb{R}$ و در نتیجه روی هر بازه‌ای پیوسته است و داریم:

$$f(0)=0\ ,\quad f(\frac{1}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{4}>0\ ,\quad f(\frac{1}{2})=1-\frac{1}{2}>0$$

$$f(\frac{2}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{3}>0\ ,\quad f(1)=-1<0$$

بنابراین $f(\frac{2}{3})f(1)<0$ و لذا معادله‌ی $\sin\pi x=x$ در بازه‌ی $(\frac{2}{3},1)$ حداقل یک ریشه دارد.

۶۴۰ ۱ **۲** ۳ ۴

تابع $f(x)=x^2-2\sin x$ روی هر بازه‌ای پیوسته است و چون $f(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi^2}{16}-\sqrt{2}<0$ و $f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^2}{4}-2>0$، لذا معادله‌ی $f(x)=0$ و در نتیجه معادله‌ی $x^2=2\sin x$ در بازه‌ی $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ حداقل یک جواب دارد.

۶۴۱ **۱** ۲ ۳ ۴

تابع $f(x)=\sin x+\cos x-x$، روی هر بازه‌ای پیوسته است و داریم:

$$f(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{3}>0\ \text{و}\ f(\frac{\pi}{2})=1-\frac{\pi}{2}<0$$

بنابراین $f(\frac{\pi}{2})f(\frac{\pi}{3})<0$. بنابراین معادله‌ی $f(x)=0$ و در نتیجه معادله‌ی $\sin x+\cos x=x$ در بازه‌ی $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$ دارای جواب است.

۶۴۲ ۱ ۲ ۳ **۴**

تابع $f(x)=x^3+2x^2+x+a$ روی هر بازه‌ای پیوسته است. طبق قضیه‌ی ریشه کافی است داشته باشیم:

$f(0)f(1)<0\Rightarrow a(a+4)<0\Rightarrow -4<a<0$

۶۴۳ ۱ ۲ **۳** ۴

معادله را به‌صورت $\cos x-2x^2=0$ نوشته و قرار می‌دهیم $f(x)=\cos x-2x^2$. جدول داده شده را به‌صورت زیر کامل می‌کنیم.

x	۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱
cos x	۱	۰/۹۸	۰/۹۲	۰/۸۲	۰/۶۹	۰/۵۴
$2x^2$	۰	۰/۰۸	۰/۳۲	۰/۷۲	۱/۲۸	۲
f(x)	۱	۰/۹	۰/۶	۰/۱	−۰/۵۹	−۱/۴۶

تابع f روی $[0,1]$ پیوسته است و با توجه به جدول، $f(0/6)f(0/8)<0$. پس معادله‌ی $f(x)=0$ در بازه‌ی $(0/6,0/8)$ و در نتیجه در بازه‌ی $(0,1)$ حداقل یک ریشه دارد. از طرفی برای هر $x\in(0,1)$ داریم $f'(x)=-\sin x-4x<0$، پس f در این بازه نزولی اکید است و لذا معادله‌ی $f(x)=0$ در بازه‌ی $(0,1)$ دقیقاً یک ریشه دارد.

۶۴۴ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{k}{x^2+2}\\ g(x)=2x\end{cases}\Rightarrow 2x=\frac{k}{x^2+2}$$

$$\Rightarrow 2x^3+4x=k\Rightarrow 2x^3+4x-k=0$$

با فرض $h(x)=2x^3+4x-k$، طبق قضیه‌ی مقدار میانی باید داشته باشیم: $h(-1)\cdot h(1)<0\Rightarrow(-6-k)(6-k)<0\Rightarrow -6<k<6$

۶۴۵ ۱ ۲ ۳ **۴**

معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $(3,2)$ می‌گذرد و بر $y=x$ عمود است، عبارت است از: $y-2=-1(x-3)\Rightarrow y=-x+5$

این خط را با منحنی تلاقی می‌دهیم:

$$(m+1)x^2-5x+6=-x+5\Rightarrow(m+1)x^2-4x+1=0$$

با فرض $g(x)=(m+1)x^2-4x+1$، طبق قضیه‌ی مقدار میانی باید داشته باشیم:

$$g(2)g(3)<0\Rightarrow(4m-3)(9m-2)<0\Rightarrow\frac{2}{9}<m<\frac{3}{4}$$

۶۴۶ ۱ **۲** ۳ ۴

فرض کنیم $g(x)=f(x)-k\sin\pi x$. در این صورت تابع g در بازه‌ی $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ پیوسته است (چرا؟). چون f زوج است پس $f(-\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})=-1$. لذا بنابر قضیه‌ی ریشه باید داشته باشیم:

$$g(-\frac{1}{2})g(\frac{1}{2})<0\Rightarrow(f(\frac{1}{2})-k\sin\frac{\pi}{2})(f(-\frac{1}{2})-k\sin(-\frac{\pi}{2}))<0$$

$$\Rightarrow(-1-k)(-1+k)<0\Rightarrow k^2>1\Rightarrow|k|>1$$

۶۴۷ ۱ ۲ **۳** ۴

تابع f در دامنه‌ی خود یعنی در بازه‌ی $[0,9]$ پیوسته است و $f(0)=-3$ و $f(9)=3$. چون f یک‌به‌یک و پیوسته است، لذا اکیداً یکنوا است و چون با افزایش x از $x=0$ تا $x=9$، مقادیر $f(x)$ از $y=-3$ به $y=3$ افزایش یافته است، پس تابع f اکیداً صعودی بوده و لذا تابع f^{-1} روی بازه‌ی $[f(0),f(9)]=[-3,3]$ پیوسته و اکیداً صعودی است.

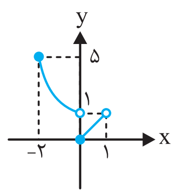
۶۴۸ **۱** ۲ ۳ ۴

$$-1\le x-1\le 1\Rightarrow 0\le x\le 2\Rightarrow D_f=[0,2]$$

تابع f در بازه‌ی $[0,2]$ پیوسته است و چون $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{1-(x-1)^2}}>0$، پس روی این بازه صعودی اکید است. لذا تابع f^{-1} در بازه‌ی $[f(0),f(2)]=[-\pi,\pi]$ پیوسته و صعودی اکید است.

۶۴۹ ۱ ۲ ۳ **۴**

نمودار تابع f به‌صورت مقابل است:



مطابق شکل، تابع f روی بازه‌های $[-2,0)$ و $[0,1)$ پیوسته است. بنابراین تابع f^{-1} روی بازه‌های $[0,1)$ و $(1,5]$ پیوسته است. (برد تابع f را ملاحظه کنید.)