

منطبق بر آخرین تغییرات
کتاب‌های درسی
ویرایش جدید
چاپ سوم



کتاب‌آهنر

ریاضیات گسسته و جبر و احتمال هندسه تحلیلی

مرور و جمع‌بندی کنکور در ۲۴ ساعت



مهندس منصور سعیدی
مهندس محمدرضا میرجلیلی



کتاب آخر ریاضیات گسسته و جبر و احتمال هندسه تحلیلی و جبر خطی


مهندس منصور سعیدی
مهندس محمدرضا میرجلیلی
محمّد جواد عددیان

- ✓ مرور کامل همه مباحث ریاضیات گسسته و جبر و احتمال و هندسه تحلیلی و جبر خطی
- ✓ دسته‌بندی مسائل مطرح در آزمون کنکور
- ✓ تیپ‌های مختلف تست در هر موضوع
- ✓ تعیین تعداد تست‌های مطرح از هر موضوع در کنکور و میزان اهمیت آن





ریاضیات گسسته و جبر و احتمال


بخش اول


فصل اول	گراف	
۷		

فصل دوم	نظریه اعداد	
۲۹		

فصل سوم	ترکیبیات	
۸۳		


فصل چهارم	احتمال	
۱۱۷		


فصل پنجم	مجموعه‌ها و استدلال ریاضی	
۱۴۷		


فصل ششم	آزمون‌های جامع	
۱۶۳		

هندسه تحلیلی و جبر خطی


بخش دوم


فصل اول	بردارها	
۱۷۳		

فصل دوم	معادلات خط و صفحه	
۱۹۵		

فصل سوم	مقاطع مخروطی	
۲۲۳		

فصل چهارم	ماتریس و دترمینان	
۲۸۹		

فصل پنجم	وارون و دستگاه معادلات	
۳۲۷		

فصل ششم	آزمون‌های جامع	
۳۵۷		

پاسخنامه کلیدی		
۳۶۷		

زندگی صحنه‌ی یکتای هنرمندی ماست.
هرکسی نغمه‌ی خود خواند و از صحنه رود.
صحنه پیوسته به جاست.
خرم آن نغمه که مردم بسپارند به یاد.

یکی از سوالاتی که اکثر دانش‌آموزان در اواخر سال تحصیلی مطرح می‌کنند این است که چه بخوانیم؟ چگونه در این وقت کم‌دروس را دوره کنیم؟ این کتاب طوری طراحی شده است که بتوانید در کم‌ترین زمان یک مرور کامل و مفید بر روی تمام مطالب دروس ریاضیات گسسته و جبر و احتمال و هندسه تحلیلی داشته باشید. در این کتاب سعی کرده‌ایم تمام مطالب مورد نیاز کنکور را مطرح کنیم و از سؤالات کنکور سال‌های قبل برای آن مطالب مثال بیاوریم. سعی کنید مطالب کتاب را چندین بار دوره کنید تا تمام روابط و راه‌حل‌های آن در ذهنتان باقی بماند. امید داریم این آخرین قدم هر چند کوچک برای شما کمک بزرگی باشد.

محتوای کتاب:

در این کتاب سعی شده است تمام مطالب و محتوای کتاب‌های درسی جبر و احتمال - ریاضی ۲ (قسمت آنالیز ترکیبی) - ریاضیات گسسته و هندسه تحلیلی به طور کامل آورده شود تا داوطلبین گرامی بتوانند در مدت ۲۴ ساعت مفید تمام مباحث موردنیاز را مرور نمایند.

این کتاب از ۱۲ فصل مجزا تشکیل شده است و در ابتدای هر فصل یک نمودار درختی ترسیم شده که نمای کلی آن فصل را نمایش می‌دهد.

در متن هر فصل ابتدا تمام نکات مورد نیاز آن قسمت آورده شده و بعد از آن چند تست نمونه از کنکور سال‌های قبل آمده است و سعی شده است پاسخ‌های ارائه شده به نحوی باشد که بتوانید بار دیگر آن مباحث را دوره کنید و در انتهای هر فصل یک آزمون جامع جهت جمع‌بندی موضوعی هر فصل ارائه شده است و همچنین در پایان هر بخش چندین آزمون جامع، تحت عنوان فصل ششم قرار داده شده تا بتوانید کل مباحث مطرح شده در کتاب را دوره کنید.

نحوه استفاده از کتاب:

برای آن که بتوانید از این کتاب استفاده بهتری کنید به ترتیب به نکات زیر توجه کنید:

① ابتدا نگاهی به نمای کل فصل بیندازید تا مسیر کلی مباحث و موضوعات مهم در

ذهن شما مرور شود.

② مطالب و نکات کتاب را قبل از تست‌ها مطالعه کنید.

- ۳) چندین بار فرمول‌ها و روابط مهم را بنویسید تا کاملاً حفظ شوید.
- ۴) در حل تست‌های نمونه ابتدا سعی کنید بدون نگاه کردن به پاسخ تشریحی آن‌ها را حل و سپس حتماً جواب ارائه شده را بررسی کنید شاید راه بهتری ارائه شده باشد و اگر نتوانستید حل کنید جواب آن را به دقت مطالعه کنید و آن تست را علامت بزنید و در انتهای فصل دوباره تست‌های علامت‌گذاری شده را حل کنید.
- ۵) بعد از اتمام کتاب یک بار دیگر یک مرور سریع بر روی فرمول‌ها انجام دهید و سپس آزمون‌های جامع ارائه شده را انجام دهید سعی کنید آزمون‌های جامع را در روزهای مختلف انجام دهید تا درس برایتان دوره شود.

چه مبحث‌هایی را بیشتر بخوانیم؟

به نظر من از هیچ مبحثی غافل نشوید چون ممکن است آن مبحثی که شما تصور می‌کنید تسلط ندارید در کنکور ساده مطرح شود و توصیه می‌کنم مبحث‌هایی را که نسبتاً ساده‌تر هستند کاملاً مسلط باشید و نگران مباحثی که بلد نیستید نباشید.

سخن پایانی:

از تمام عزیزانی که در به ثمر رسیدن این کتاب نقش داشته‌اند کمال تشکر را دارم، مخصوصاً از جناب آقای اختیاری مدیریت محترم انتشارات و همچنین پرسنل زحمت‌کش انتشارات مهروماه که با زحمات شبانه‌روزی خود این اثر را به سرانجام رساندند. بدرود تا درودی دیگر

سعیدی - میرجلیلی
تابستان ۱۳۹۱

بودجه‌بندی سؤالات کنکور سراسری

ریاضیات گسسته و جبر و احتمال (تعداد تست‌های کنکور براساس مباحث کتاب)		هندسه تحلیلی و جبر خطی (تعداد تست‌های کنکور براساس مباحث کتاب)	
عناوین	سراسری	عناوین	سراسری
گراف	۲	بردارها	۱ یا ۲
نظریه اعداد	۲ تا ۴	معادلات خط و صفحه	۲ تا ۳
ترکیبیات	۱ یا ۲	مقاطع مخروطی	۱ تا ۳
احتمال	۳ تا ۵	ماتریس و دترمینان	۱ یا ۲
مجموعه‌ها	۱ یا ۲	وارون و دستگاه معادلات	۱ یا ۲
استدلال ریاضی	۱ یا ۲		



(آزاد ریاضی 86)

• دو رقم سمت راست عدد $300! + 9! + 6! + 3!$ کدام است؟

66 (4) 46 (3) 86 (2) 6 (1)

پاسخ: از $12!$ به بعد تمام اعداد مضرب 100 هستند در نتیجه: 

$$\begin{aligned} 100 \quad 100 \quad 100 \quad 100 \quad 100 \quad 100 \\ 3! \equiv 6 \text{ (I)} \quad 6! \equiv 720 \equiv 20 \text{ (II)} \xrightarrow{\times 7} 7! \equiv 140 \equiv 40 \xrightarrow{\times 8} 8! \equiv 320 \equiv 20 \\ 100 \quad 100 \\ \rightarrow 9! \equiv 180 \equiv 80 \text{ (III)} \end{aligned}$$

$$(I), (II), (III) \Rightarrow 3! + 6! + 9! + \dots + 300! \equiv 6 + 20 + 80 = 106 \equiv 6$$

بنابراین گزینه‌ی (1) پاسخ صحیح است.

• عدد $1387^n + 1388^n$ به ازای مقادیر مختلف عدد طبیعی n چند رقم یکان متفاوت دارد؟
(آزاد ریاضی 85)

5 (4) 4 (3) 3 (2) 6 (1)

پاسخ: 

$$1388^n + 1387^n \equiv (-2)^n + (-3)^n \Rightarrow \begin{cases} n=1 \rightarrow (-2)^1 + (-3)^1 \equiv 5 \\ n=2 \rightarrow (-2)^2 + (-3)^2 \equiv 13 \\ n=3 \rightarrow (-2)^3 + (-3)^3 \equiv 37 \\ n=4 \rightarrow (-2)^4 + (-3)^4 \equiv 97 \end{cases}$$

حال به ازای $n \geq 4$ به جای $(-2)^n$ ، $16 = (-2)^4$ را جایگزین می‌کنیم و از طرفی هم می‌دانیم که هر 4 تا 4 تا برای توان n رقم یکان تکرار می‌شود:

$$\begin{cases} n=5 \rightarrow 16 + (-3)^5 \equiv 3 \\ n=6 \rightarrow 16 + (-3)^6 \equiv 5 \\ n=7 \rightarrow 16 + (-3)^7 \equiv 9 \\ n=8 \rightarrow 16 + (-3)^8 \equiv 7 \end{cases}$$

بنابراین در کل 4 جواب متفاوت دارد، بنابراین گزینه‌ی (3) پاسخ صحیح است.

• رقم یکان $1383! + (1383)^3! + \dots + (1383)^{1!}$ کدام است؟ (آزاد ریاضی 84)

5 (4) 7 (3) 2 (2) صفر (1)

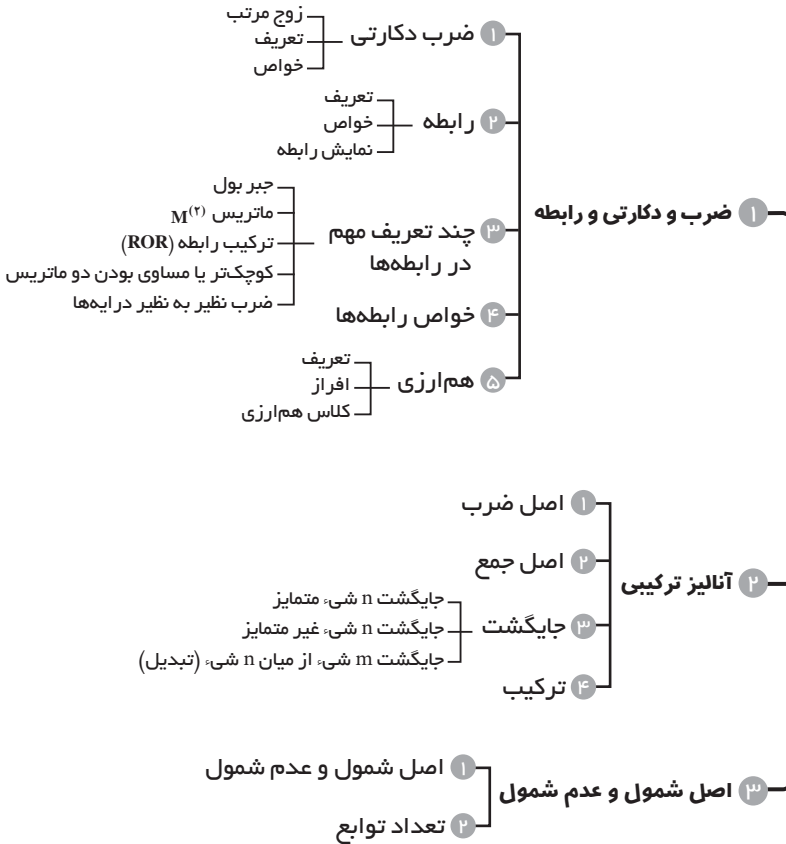
$$1383 \equiv 3 \text{ و } n! \equiv 0 \text{ (} n \geq 4 \text{)}$$

$$A = (1383)^{1!} + \dots + (1383)^{1383!}$$

پاسخ: 

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

ترکیبیات





• اگر $A = \{2k-1 \mid k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq 5\}$ و $B = \{k \in \mathbb{Z} \mid k-3 \leq 2\}$ آن گاه

(سراسری ریاضی 92)

$(A \times B) \cap (B \times A)$ چند عضو دارد؟

- 1) 6 2) 8 3) 9 4) 16

پاسخ:

$$n[(A \times B) \cap (B \times A)] = [n(A \cap B)]^2$$

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$B = \{k \in \mathbb{Z} \mid |k-3| \leq 2\} \rightarrow |k-3| \leq 2 \rightarrow -2 \leq k-3 \leq 2$$

$$\rightarrow 1 \leq k \leq 5 \rightarrow B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow A \cap B = \{1, 3, 5\}$$

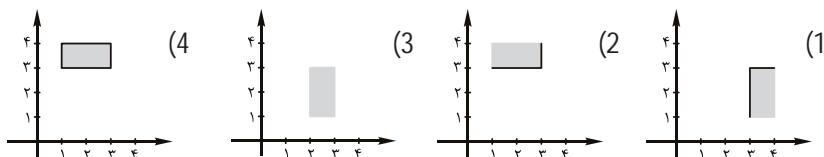
$$\rightarrow n(A \cap B) = 3 \rightarrow [n(A \cap B)]^2 = 9$$

بنابراین گزینه ی (3) پاسخ صحیح است.

• اگر $A = \{x \mid 1 < x \leq 3, x \in \mathbb{R}\}$ و $B = \{x \mid 2 \leq x < 4, x \in \mathbb{R}\}$ و $C = \{x \mid 3 \leq x \leq 5, x \in \mathbb{R}\}$

(سراسری ریاضی 83)

در این صورت نمودار $(A \times B) \cap (A \times C)$ کدام است؟



$$(A \times B) \cap (A \times C) = A \times (B \cap C) \rightarrow (x, y) \in A \times (B \cap C) \Rightarrow$$

$$x \in A \text{ و } y \in (B \cap C) \Rightarrow 1 < x \leq 3, 3 \leq y < 4$$

پاسخ:

بنابراین گزینه ی (2) پاسخ صحیح است.

۲ رابطه:

۱-۲) **تعریف رابطه:** R رابطه‌ای از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B می‌باشد، هرگاه $R \subseteq A \times B$.

یعنی به هر زیرمجموعه از $A \times B$ یک رابطه گفته می‌شود.

نکته: وقتی گفته می‌شود رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی A تعریف شده است، یعنی:

$$R \subseteq A^2 \text{ یا } R = \{(x, y) \mid x \in A, y \in A\}$$

نکته: اگر $|A| = n$ و $|B| = m$

تعداد رابطه‌ی R از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B برابر است با 2^{mn}

۲-۲) خواص رابطه:

$$1) R \subseteq A \times A \Rightarrow D_R \subseteq A \quad (D_R \text{ دامنه رابطه ی } R)$$

$$R_R \subseteq A \quad (R_R \text{ برد رابطه ی } R)$$

$$2) D_{R \cup S} = D_R \cup D_S \quad (R \text{ و } S, \text{ دو رابطه روی } A \text{ می‌باشند})$$

$$3) D_{R \cap S} \subseteq D_R \cap D_S$$

4) برای یافتن R^{-1} (وارون رابطه R) کافی است جای مؤلفه‌های اول و دوم را با هم عوض کنیم.

$$5) (R^{-1})^{-1} = R \quad \text{وارون وارون هر رابطه خود رابطه خواهد شد}$$



$$\Rightarrow P(A \cap B) \leq \frac{4}{15}$$

$$P(A) + P(B) = P(A - B) + P(B - A) + 2P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \max(P(A) + P(B)) = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + 2 \times \frac{4}{15} = \frac{19}{15}$$

بنابراین گزینه‌ی (3) پاسخ صحیح است.

- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری که $P(A) = 0/6$ و $P(B) = 0/7$ و $P(A \cap B) = 0/2$ باشند، آن‌گاه $P(A' \cap B)$ کدام است؟

0/1 (1) 0/3 (2) 0/4 (3) 0/5 (4)

پاسخ:

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow 0/2 = 0/6 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0/4$$

$$P(A' \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0/7 - 0/4 = 0/3$$

بنابراین گزینه‌ی (2) پاسخ صحیح است.

- در کیسه‌ای 5 مهره با شماره‌های 1 تا 5 وجود دارد این مهره‌ها را به طور تصادفی پی در پی بدون جایگذاری خارج می‌کنیم با کدام احتمال دو مهره با شماره فرد متوالیا خارج نمی‌شوند؟

(سراسری تجربی 92)

0/1 (1) 0/15 (2) 0/2 (3) 0/25 (4)

پاسخ:

تعداد مهره‌های فرد 3 تا (5, 3, 1) و مهره‌های زوج 2 تا (4, 2). تنها حالتی که دو شماره‌ی فرد متوالیاً خارج نمی‌شود به صورت زیر است:

$$\text{فرد و زوج و فرد و زوج و فرد و زوج و فرد و زوج و فرد و زوج}$$

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{10} = 0/1$$

بنابراین گزینه‌ی (1) پاسخ صحیح است.

- در جعبه‌ای 6 مهره سفید و 9 مهره سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهره‌ی خارج شده سفید است؟

(سراسری تجربی 92)

$\frac{4}{5}$ (4) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{3}{7}$ (2) $\frac{5}{14}$ (1)

پاسخ:

برای آن‌که مهره دوم سفید باشد دو حالت وجود دارد:

مهره دوم سفید و مهره اول سیاه یا مهره دوم سفید و مهره اول سفید

$$\frac{6}{15} \times \frac{5}{14} + \frac{9}{15} \times \frac{6}{14} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

در واقع می‌توان گفت چون مهره اول مهم نیست فقط یک مهره‌ی سفید بیرون آورده‌ایم. بنابراین گزینه‌ی (3) پاسخ صحیح است.



$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{8} + \left(\frac{7}{8} \times \frac{7}{8} \times \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{7}{8}\right)^{2(n-1)} \times \frac{1}{8} + \dots = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{49}{64}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{15}{64}} = \frac{8}{15}$$

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}$$

بنابراین گزینه‌ی «1» پاسخ صحیح است.

۳ احتمال شرطی:

تعریف: یعنی احتمال آن که A رخ دهد به شرط آن که B رخ داده باشد به بیان دیگر یعنی احتمال رخ دادن A در فضای نمونه‌ی B و آن را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

نکته: در حل مسائل احتمال شرطی، ابتدا فضای نمونه را از S به B (شرط مسئله) کاهش داده و سپس در B به دنبال پیشامد مورد نظر (A) می‌گیریم.

$$1) A \subset B \Rightarrow P(B|A) = 1$$

$$2) P(A|\bar{A}) = 0$$

$$3) A \text{ و } B \text{ ناسازگارند} \Rightarrow P(A|B) = P(B|A) = 0$$

$$4) A \text{ و } B \text{ مستقلند} \Rightarrow P(A|B) = P(A), P(B|A) = P(B)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

نکته: تمام فرمول‌هایی که درباره‌ی احتمال قبلاً خوانده‌ایم در حالت شرطی نیز درست می‌باشند یعنی آن‌که:

$$1) P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$$

$$2) P(\bar{A}|C) = 1 - P(A|C)$$

$$3) P(A - B|C) = P(A|C) - P(A \cap B|C)$$

تست نمونه

• اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری که $P(A) = 0/2$ و $P(B) = 0/22$

و $P(B|A) = 0/7$ آن‌گاه $P(B'|A')$ کدام است؟ (سراسری ریاضی 90)

$$0/84 \quad (4)$$

$$0/92 \quad (3)$$

$$0/90 \quad (2)$$

$$0/96 \quad (1)$$

پاسخ:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = 0/2 \times 0/7$$

بنابراین گزینه‌ی (2) پاسخ صحیح است.



$$z_2 = \frac{z_1 + z_3}{2} \rightarrow z_3 = 2z_2 - z_1$$

نکته: نقطه‌ی A به مختصات (x, y, z) مفروض است، در این صورت خواهیم داشت:



محور xها	محور yها	محور zها	صفحه xy	صفحه xz	صفحه yz	
$(x, 0, 0)$	$(0, y, 0)$	$(0, 0, z)$	$(x, y, 0)$	$(x, 0, z)$	$(0, y, z)$	تصویر روی ...
$(x, -y, -z)$	$(-x, y, -z)$	$(-x, -y, z)$	$(x, y, -z)$	$(x, -y, z)$	$(-x, y, z)$	قرینه نسبت به ...
$\sqrt{y^2 + z^2}$	$\sqrt{x^2 + z^2}$	$\sqrt{x^2 + y^2}$	$ z $	$ y $	$ x $	فاصله تا...

۲ بردار:

۱-۲) تعریف: بردار، پیکانی است که آغاز آن از مبدأ است و بردار بین دو نقطه‌ی A و B این‌گونه

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

محاسبه می‌شود:

توجه کنید که مؤلفه‌ی نقطه‌ی انتها منهای مؤلفه‌ی نقطه‌ی ابتدا شود.

۲-۲) خواص بردار:

$$1) \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

$$2) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$3) \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$4) \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \text{نقاط A و B بر هم منطبقند}$$

$$5) \overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{BC} \Rightarrow \text{نقاط A و B و C در یک راستا می‌باشند}$$

$$6) \vec{u} = (a, b, c) \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad 7) \begin{cases} u = (a, b, c) \\ v = (a', b', c') \end{cases} \Rightarrow$$

هم‌ارزی یا انطباق دو بردار $u = v \Leftrightarrow a = a', b = b', c = c'$ (الف)

$$\text{ب) } u + v = (a + a', b + b', c + c')$$

$$\text{ج) } u = \alpha v \Rightarrow \begin{cases} 1) u \parallel v & \text{هم‌راستا یا موازی} \\ 2) |u| = |\alpha| |v| \\ 3) \begin{cases} \alpha > 0: u \text{ و } v \text{ هم جهت} \\ \alpha < 0: u \text{ و } v \text{ مخالف جهت} \end{cases} \\ 4) \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \rightarrow \text{این رابطه فقط برای مؤلفه‌های غیرصفر است، و هر مؤلفه‌ای} \\ \text{که در یکی صفر باشد، در هم‌راستای آن نیز صفر است} \end{cases}$$



- معادله‌ی صفحه‌ای که از خط به معادله‌ی $\begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases}$ بگذرد و بر خط به معادله‌ی $\begin{cases} x+y=1 \\ y-z=1 \end{cases}$ عمود

(سراسری ریاضی خارج از کشور 84)

باشد، کدام است؟

$$(1) \quad x - y + z = 0 \quad (2) \quad x - y - z = 1 \quad (3) \quad x - y - z = 0 \quad (4) \quad x - y + z = 1$$

d: $\begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases}$ d': $\begin{cases} x+y=1 \\ y-z=1 \end{cases} \Rightarrow d': x=1-y=-z$ پاسخ: ✓

$$\left. \begin{array}{l} A(0,0,0) \\ u_{d'} = (1, -1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow P: x - y - z = 0$$

بردار نرمال

بنابراین گزینه‌ی (3) پاسخ صحیح است.

- خطی که از دو نقطه $A(1,2,-2)$ و $B(2,-1,1)$ میگذرد صفحه xoz را در نقطه $(a,0,b)$ قطع می‌کند $a+b$ کدام است؟

(آزاد ریاضی 90)

$$(1) \quad 3 \quad (2) \quad -3 \quad (3) \quad -\frac{5}{3} \quad (4) \quad \frac{5}{3}$$

$u = \overrightarrow{AB} = (1, -3, 3) \rightarrow d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+2}{3}$ پاسخ: ✓

حاصل برخورد این خط با صفحه xoz ($y=0$) به صورت $M(\frac{5}{3}, 0, 0)$ است.

$$\Rightarrow a+b = \frac{5}{3}$$

بنابراین گزینه‌ی (4) پاسخ صحیح است.

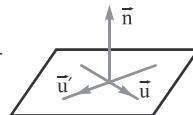
- صفحه‌ی گذرا بر دو خط متقاطع $D: \begin{cases} 2x+y=3 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ و $D': \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ محور z را با

کدام ارتفاع قطع می‌کند؟

$$(1) \quad -0/8 \quad (2) \quad -0/6 \quad (3) \quad 0/8 \quad (4) \quad 1/2$$

پاسخ: با توجه به شکل مشاهده می‌کنیم که بردار نرمال صفحه از ضرب خارجی بردارهای هادی دو خط به دست می‌آید:

$$D: \begin{cases} 2x+y=3 \rightarrow y=3-2x \\ 2y-z=0 \rightarrow y=\frac{z}{2} \end{cases} \rightarrow 3-2x=y=\frac{z}{2}$$



$$\rightarrow u = (-\frac{1}{2}, 1, 2) \rightarrow \vec{u} = (-1, 2, 4)$$

$$D': \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3} \rightarrow \vec{u}' = (2, 1, 3) \rightarrow \vec{n} = \vec{u} \times \vec{u}' = (2, 11, -5)$$

حال یک نقطه‌ی دلخواه از خط D یا D' به عنوان نقطه‌ای از صفحه‌ی مفروض انتخاب می‌کنیم:

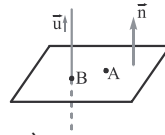
$$A \in D' \Rightarrow A(-1, 0, -1)$$

حال با معلوم بودن مختصات نقطه‌ی A و بردار نرمال \vec{n} معادله‌ی صفحه را می‌نویسیم:



$$A(5, -2, 1) \Rightarrow 1(x-5) - 2(y+2) + 2(z-1) = 0$$

$$\vec{u} = \vec{n} = (1, -2, 2) \Rightarrow x - 2y + 2z - 11 = 0$$



برای یافتن محل تلاقی (نقطه‌ی B) کافی است معادلات پارامتری خط را در صفحه قرار دهیم:

$$t + 1 + 4t - 2 + 4t - 6 - 11 = 0 \Rightarrow 9t = 18 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow B(3, -3, 1)$$

بنابراین گزینه‌ی (4) پاسخ صحیح است.

• فاصله‌ی خط $x = \frac{y}{2} = z$ از صفحه‌ی $x - y + z = 3$ چه قدر است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (4) \qquad 3\sqrt{3} \quad (3) \qquad 3 \quad (2) \qquad \sqrt{3} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} u_d &= (1, 2, 1) \\ n &= (1, -1, 1) \end{aligned} \right\} \rightarrow n \cdot u_d = 0$$

پاسخ: ☒

از عبارت فوق می‌توان نتیجه گرفت که خط و صفحه موازی یکدیگر می‌باشند بنابراین فاصله‌ی تمام نقاط خط از صفحه با هم برابر است.

یک نقطه‌ی دلخواه از خط $A(0, 0, 0)$:

$$h = \frac{|(1 \times 0) + (-1 \times 0) + (1 \times 0) - 3|}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{3}$$

بنابراین گزینه‌ی (1) پاسخ صحیح است.

• فاصله‌ی دو صفحه به معادلات $x + y + z = 1$ و $2x + 2y + 2z = 3$ کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (4) \qquad \frac{2}{3} \quad (3) \qquad \frac{\sqrt{3}}{6} \quad (2) \qquad \frac{\sqrt{2}}{6} \quad (1)$$

$$P: x + y + z = 1$$

پاسخ: ☒

$$P': 2x + 2y + 2z = 3 \xrightarrow{\div 2} x + y + z = \frac{3}{2}$$

$$h = \frac{|d - d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|\frac{3}{2} - 1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

بنابراین گزینه‌ی (2) پاسخ صحیح است.

• خط به معادله‌ی $2x = y - 1 = 3z$ با صفحه‌ای به معادله‌ی $2x - 2y + 3z = 2$ کدام وضع را دارد؟

(2) خط در صفحه قرار دارد.
(4) مایل

(1) عمود
(3) موازی

$$\left. \begin{aligned} n &= (2, -2, 3) \\ u &= (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}) \end{aligned} \right\} \rightarrow n \cdot u = 0 \Rightarrow \text{موازی با منطبق}$$

پاسخ: ☒

موازی \Rightarrow غ ق $2 = -2 \xrightarrow{\text{جای گذاری در صفحه}}$ $A(0, 1, 0)$ یک نقطه از خط

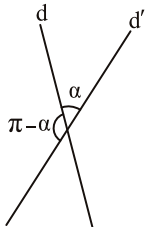
بنابراین گزینه‌ی (3) پاسخ صحیح است.



$$\text{(الف)} \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

بی شمار نقطه $0=0$ (ب)

هیچ نقطه $0=k, (k \neq 0)$ (ج)

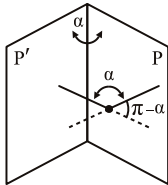


17 زاویه:

(الف) زاویه بین دو خط:

$$\cos \alpha = \frac{|u \cdot u'|}{|u| |u'|} \quad 0 \leq \alpha \leq 90$$

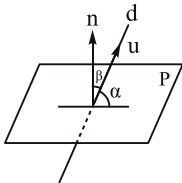
(ب) زاویه بین دو صفحه: واضح است که زاویه بین دو صفحه برابر زاویه بین نرمال‌های آن دو می‌باشد.



$$\cos \alpha = \frac{|n \cdot n'|}{|n| |n'|} \quad 0 \leq \alpha \leq 90$$

(ج) زاویه بین خط و صفحه:

$$\sin \alpha = \frac{|u \cdot n|}{|u| |n|} \quad 0 \leq \alpha \leq 90$$



تست نمونه



- صفحه‌ی عمود منصف پاره خط واصل بین دو نقطه‌ی $(-1, 2, 1)$ و $(1, 0, 1)$ موازی کدام است؟

(1) محور oy (2) محور oz (3) صفحه‌ی xoy (4) صفحه‌ی xoz

$A(-1, 2, 1), B(1, 0, 1)$

$n = \overrightarrow{AB} = (2, -2, 0)$

پاسخ:

چون بردار نرمال صفحه عمود بر محور oz است بنابراین:

خود صفحه موازی محور oz است، بنابراین گزینه‌ی (2) پاسخ صحیح است.

- معادله‌ی صفحه‌ی عمود منصف پاره خط واصل بین دو نقطه $(3, 1, 0)$ و $(-1, 2, 1)$ از نقطه‌ای

(سراسری ریاضی 91)

با کدام مختصات زیر می‌گذرد؟

(1) $(-2, 1)$ (2) $(2, -1, -1)$ (3) $(2, -1, 2)$ (4) $(3, -1, 1)$

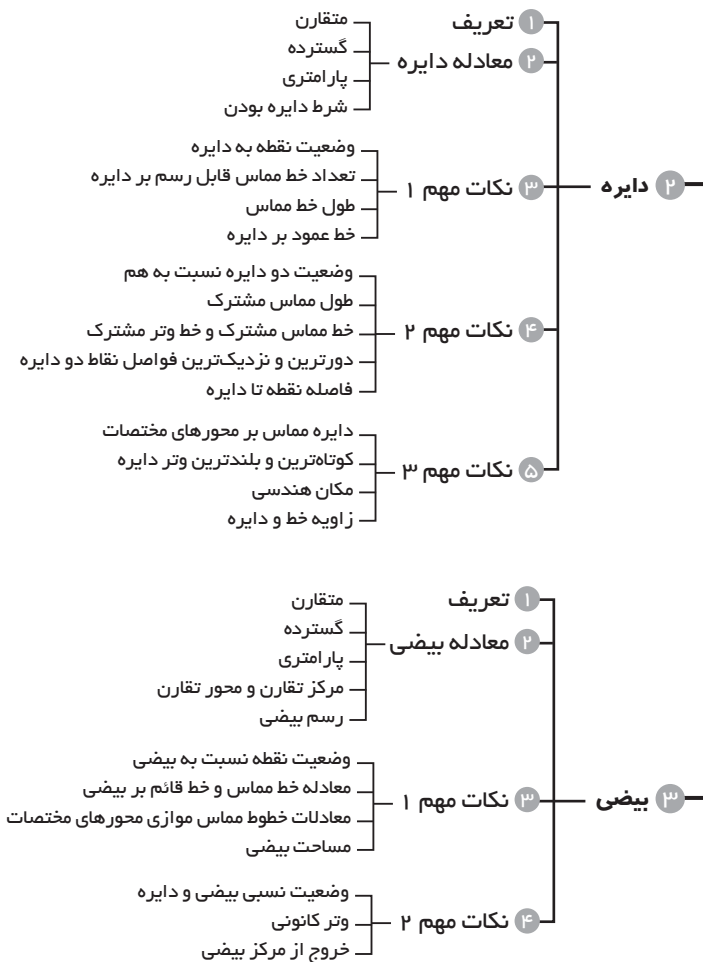


فصل سوم

مقاطع مخروطی



۱ مقاطع مخروطی





تست نمونه



- نمودار مقطع مخروطی $\frac{(4x+1)^2}{16} - \frac{(3y+1)^2}{25} = -4$ چه شکلی است؟ (آزاد ریاضی 91)

- (1) هذلولی قائم با خروج از مرکز $\frac{\sqrt{34}}{3}$ (2) هذلولی افقی با خروج از مرکز $\frac{\sqrt{34}}{5}$
 (3) هذلولی افقی با خروج از مرکز $\frac{\sqrt{34}}{3}$ (4) هذلولی قائم با خروج از مرکز $\frac{\sqrt{34}}{5}$

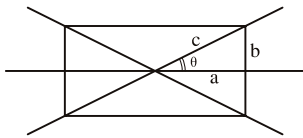
پاسخ:

$$\frac{(4x+1)^2}{16} - \frac{(3y+1)^2}{25} = -4 \rightarrow \frac{16(x+\frac{1}{4})^2}{16} - \frac{9(y+\frac{1}{3})^2}{25} = -4 \xrightarrow{\div(-4)} \frac{(y+\frac{1}{3})^2}{\frac{100}{9}} - \frac{(x+\frac{1}{4})^2}{4} = 1 \Rightarrow e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{4}{\frac{100}{9}}} = \sqrt{\frac{136}{100}} = \frac{\sqrt{34}}{5}$$

بنابراین گزینه‌ی (4) پاسخ صحیح است.

- اگر θ زاویه بین مجانب‌های هذلولی با محور کانونی باشد، آنگاه کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟ (آزاد ریاضی 91)

$$\tan \theta = \frac{b}{a} \quad (4) \quad \sin \theta = \frac{b}{a} \quad (3) \quad \cos 2\theta = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \quad (2) \quad \cos \theta = \frac{a}{c} \quad (1)$$



پاسخ: با توجه به مستطیل کمکی در رسم هذلولی داریم:

$$\sin \theta = \frac{b}{c}$$

بنابراین گزینه‌ی (3) پاسخ صحیح است.

- مجانب‌های هذلولی به معادله‌ی $\frac{1}{4}x^2 - y^2 + ax + by = 1$ در نقطه‌ی $(-2, 1)$ متقاطع اند عرض

(سراسری ریاضی 90)

4 (4)

3 (3)

2 (2)

1 (1)

پاسخ: محل برخورد مجانب‌ها مرکز هذلولی می‌باشد.

$$\begin{aligned} f'_x = 0 &\rightarrow \frac{1}{2}x + a = 0 \rightarrow x = -2a = -2 \rightarrow a = 1 \\ f'_y = 0 &\rightarrow -2y + b = 0 \rightarrow y = \frac{b}{2} = 1 \rightarrow b = 2 \end{aligned} \Rightarrow \frac{1}{4}x^2 - y^2 + x + 2y = 1$$

۵-۲) ماتریس بالا مثلثی:

ماتریس مربعی را گویند که درایه‌های زیر قطر اصلی صفر باشند.

$$a_{ij} = 0, i > j$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} & i < j \\ i = j \text{ (قطر اصلی)} \\ i > j \end{bmatrix}_{n \times n}$$

مثال: $A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

۶-۲) ماتریس پایین مثلثی:

ماتریس مربعی را گویند که درایه‌های بالای قطر اصلی صفر باشند:

$$a_{ij} = 0, i < j$$

مثال: $A_6 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{bmatrix}$

۷-۲) ماتریس قطری:

ماتریس مربعی را گویند که درایه‌های غیر قطر اصلی آن صفر باشند:

مثال: $A_7 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ $a_{ij} = 0, i \neq j$

۸-۲) ماتریس اسکالر:

ماتریس قطری را گویند که تمام درایه‌های قطر اصلی آن برابر باشند.

مثال: $A_8 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

۹-۲) ماتریس واحد یا همانی:

ماتریس اسکالر می‌باشد که تمام درایه‌های قطر اصلی آن برابر 1 باشند و آن را با نماد I نمایش می‌دهند.

مثال: $A_9 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$



$$A^2 + 2AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 2 \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} \quad \text{پاسخ: } \checkmark$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 12 & 20 \end{bmatrix} \quad \text{بنابراین گزینه ی (4) پاسخ صحیح است.}$$

• در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ حاصل $A^n - A^{n-1}$ کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1) \quad \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2) \quad \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3) \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{پاسخ: } \checkmark$$

$$\Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A^n - A^{n-1} = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^n - 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{بنابراین گزینه ی (2) پاسخ صحیح است.}$$

• اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $B \cdot A^n = \begin{bmatrix} 4 & 41 \\ 3 & 32 \end{bmatrix}$ آن گاه:

$$n=10 \quad (4) \quad n=8 \quad (3) \quad n=11 \quad (2) \quad n=9 \quad (1)$$

پاسخ: \checkmark

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A^n = \begin{bmatrix} 4 & 41 \\ 3 & 32 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 41 \\ 3 & 32 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 4n+1 \\ 3 & 3n+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 41 \\ 3 & 32 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4n+1=41 \\ 3n+2=32 \end{cases} \Rightarrow n=10$$

بنابراین گزینه ی (4) پاسخ صحیح است.

• اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و رابطه ی $A^4 \times \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = A^5 \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ برقرار باشد. حاصل $b+c$

کدام است؟

-4 (4) 4 (3) 5 (2) -5 (1)



10- دستگاه $\begin{bmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{bmatrix}$ با کدام شرایط، فاقد جواب است؟

(1) $b=2, a=1$ (2) $b \neq 2, a=1$ (3) $b=1, a=2$ (4) $b \neq 1, a=2$



زمان پیشنهادی 25 دقیقه

(سراسری خارج از کشور ۸۶)

آزمون جامع ۶

1- در یک صفحه، دو دایره به شعاع‌های متفاوت در نقطه‌ی A متقاطع‌اند. با استفاده از کدام تبدیل می‌توان از نقطه‌ی A خطی گذراند که در این دو دایره، وترهای مساوی ایجاد کند؟

- (1) انتقال (2) دوران (3) بازتاب نسبت به خط (4) بازتاب نسبت به نقطه

2- هر یک از دو خط متناظر D و D' با صفحه‌ی P متقاطع‌اند. صفحه‌ی دوم شامل خط D و موازی D'، صفحه‌ی سوم شامل خط D' و موازی D مشخص شده‌اند. تعداد فصل مشترک‌های دوجه دوی این سه صفحه کدام است؟

- (1) صفر (2) 1 (3) 2 (4) 3

3- بردار $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ به صورت ترکیبی از بردارهای واحد محورهای مختصات داده شده است. مساحت متوازی‌الاضلاعی که بر روی دو بردار \vec{a} و $\vec{a} \times \vec{k}$ ساخته شود، کدام است؟

- (1) $\sqrt{84}$ (2) $\sqrt{96}$ (3) $\sqrt{102}$ (4) $\sqrt{105}$

4- مجذور فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط گذرنده بر دو نقطه‌ی A(1,0,1) و B(1,2,5) کدام است؟

- (1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{4}{5}$ (3) $\frac{6}{5}$ (4) $\frac{8}{5}$

5- معادله‌ی صفحه‌ی شامل نقطه‌ی A(1,3,4) و خط به معادله‌ی $\frac{x-3}{2} = y-1 = z$ کدام است؟

- (1) $x+y-z=0$ (2) $x-y+z=2$ (3) $2x+y-z=1$ (4) $2x-y+z=3$

6- نقطه‌ی A(3,6) روی دایره‌ای است که بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع این دایره کدام است؟

- (1) 2,12 (2) 2,15 (3) 3,9 (4) 3,15

7- در یک مقاطع مخروطی به معادله‌ی $x^2 + y^2 - 6xy = 4$ ، محورهای مختصات را حول مبدأ به

اندازه‌ی $\frac{\pi}{4}$ دوران می‌دهیم. معادله‌ی آن در دستگاه محورهای جدید چگونه است؟

- (1) $2y^2 - x^2 = 1$ (2) $2y^2 - x^2 = 2$ (3) $2x^2 + y^2 = 1$ (4) $y^2 + x^2 = 2$

مجموعه کتاب‌های جمع‌بندی

مرور و جمع‌بندی کنکور در ۲۴ ساعت



ویژگی‌های این کتاب

- مرور کامل همه مباحث ریاضیات گسسته و جبر و احتمال + هندسه تحلیلی و جبر خطی
- دسته‌بندی مسائل مطرح در آزمون کنکور
- طراحی آزمون جامع ویژه هر فصل
- بررسی تست‌های کنکور سراسری و آزاد ۱۰ سال اخیر
- ارائه کنکورهای خارج از کشور در قالب آزمون‌های جامع
- نمودارهای نمای کلی فصول برای سازماندهی ذهنی مخاطب
- مشخص کردن تعداد تست‌های مطرح از هر موضوع در کنکور و میزان اهمیت آن

انتشارات مهرماه
۶۶۴۰۸۴۰۰-۳
www.mehromah.ir
sms: 300072120

