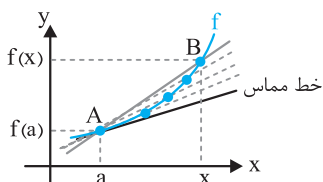




قواعد مشتق‌گیری - مشتق‌گیری از چند تابع خاص

مسئله‌ی خامه‌ماس



نقطه‌ی ثابت $A(a, f(a))$ و نقطه‌ی دلخواه $B(x, f(x))$ را روی نمودار تابع پیوسته‌ی f در نظر می‌گیریم. بدیهی است که شیب قاطع AB از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$m_{AB} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

فرض کنید نقطه‌ی B روی نمودار تابع f به نقطه‌ی ثابت A نزدیک شود. در این صورت، روی محور x ها، متغیر x نیز به عدد a نزدیک می‌شود. حال اگر نقطه‌ی B روی نمودار تابع f فوق‌العاده به نقطه‌ی ثابت A نزدیک شود، روی محور x ها، متغیر x فوق‌العاده به عدد a نزدیک می‌شود ($x \rightarrow a$). در این صورت قاطع AB به خط مماس بر نمودار f در نقطه‌ی A نزدیک می‌شود. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\text{شیب خط مماس بر } f \text{ در } A = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

به حد فوق اگر موجود باشد، مشتق تابع f می‌گوییم و آن را با نماد $f'(a)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف مشتق تابع در یک نقطه

تعریف: فرض کنید تابع f در همسایگی نقطه‌ی a تعریف شده باشد. اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ موجود و متناهی باشد، می‌گوییم تابع f در نقطه‌ی $x = a$ مشتق‌پذیر و یا دارای مشتق است و مقدار این حد را با $f'(a)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین مقدار مشتق تابع f در $x = a$ برابر است با:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

تذکر: اگر در حد فوق، قرار دهیم $x = a + h$ ، در این صورت وقتی $x \rightarrow a$ ، آن‌گاه $h \rightarrow 0$ و در نتیجه تعریف مشتق تابع f در نقطه‌ی a به صورت زیر درمی‌آید:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

به عبارت $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ ، **خارج قسمت تفاضلی** گفته می‌شود.

بنابراین اگر تابع f در همسایگی نقطه‌ی $x = a$ تعریف شده باشد، آن‌گاه مقدار مشتق تابع f در نقطه‌ی a برابر است با:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

به شرط آن‌که حدود فوق موجود باشند.

نکته: از تعریف مشتق تابع f در $x = a$ ، نتیجه می‌شود که وقتی مشتق تابع f در $x = a$ موجود است، آن‌گاه تابع f حتماً

در $x = a$ پیوسته است. زیرا در رابطه‌ی $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ، حد مخرج کسر وقتی $x \rightarrow a$ ، صفر می‌شود و از آنجایی که

حاصل حد موجود است، لازم است حد صورت کسر نیز وقتی $x \rightarrow a$ ، صفر شود. پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(a) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

و این یعنی تابع f در $x = a$ پیوسته است. بنابراین در تعریف مشتق تابع f در $x = a$ ، شرط تعریف شده بودن f در $x = a$ کافی است و نیازی نیست شرط پیوستگی f را در $x = a$ لحاظ کنیم. بلکه همان‌طور که دیدید پیوستگی خودبه‌خود از تعریف مشتق f در $x = a$ نتیجه می‌شود.

تذکر: همان‌طور که گفتیم اگر $f'(a)$ موجود و متناهی باشد، آن‌گاه تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر و یا دارای مشتق است. بنابراین اگر $f'(a)$ موجود نباشد و یا حاصل $f'(a)$ نامتناهی باشد، آن‌گاه تابع f در $x = a$ مشتق‌ناپذیر خواهد بود.

مثال ۱: مشتق تابع $f(x) = \frac{(x^2-1)\sqrt[3]{5x-4}}{x^4+x^2+1}$ در نقطه‌ی $x=1$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۱

پاسخ: با استفاده از تعریف مشتق تابع f در $x=1$ ، می‌توان نوشت:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{(x^2-1)\sqrt[3]{5x-4}}{x^4+x^2+1} - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)\sqrt[3]{5x-4}}{x^4+x^2+1} = \frac{2}{3}$$

پس گزینه‌ی (۳) صحیح است.

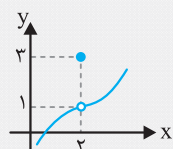
مثال ۲: مقدار مشتق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=0$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) موجود نیست.

پاسخ: با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \times \text{کران دار} = 0$$

پس گزینه‌ی (۱) صحیح است.



مثال ۳: نمودار تابع f در همسایگی $x=2$ به صورت مقابل است.

مقدار مشتق تابع $g(x) = (x-2)f(x)$ در $x=2$ چه قدر است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) موجود نیست.

پاسخ: با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$g'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)f(x) - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۴: اگر برای هر x و y داشته باشیم $f(x+y) = f(x)f(y)$ و $f'(0) = 2$ ، مقدار $f'(1)$ چند برابر $f(1)$ است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

پاسخ: چون رابطه‌ی $f(x+y) = f(x)f(y)$ به‌ازای هر x و y برقرار است، به‌ازای $x=y=0$ داریم:

$$f(0) = f(0) \times f(0) \Rightarrow f(0) = 0 \text{ یا } f(0) = 1$$

اگر $f(0) = 0$ ، آن‌گاه به‌ازای $x=1$ و $y=0$ ، در رابطه‌ی داده شده خواهیم داشت $f(1) = 0$ و به همین ترتیب $f(2) = 0$ و ... در واقع با فرض $f(0) = 0$ ، به راحتی ثابت می‌شود که f تابع ثابت صفر است که با فرض $f'(0) = 2$ متناقض است. پس $f(0) = 1$. اکنون به کمک تعریف مشتق داریم:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \stackrel{f(x+y)=f(x)f(y)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1)f(h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1)(f(h) - 1)}{h} = f(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} \\ &\Rightarrow \frac{f'(1)}{f(1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} \stackrel{f(0)=1}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = f'(0) = 2 \Rightarrow \frac{f'(1)}{f(1)} = 2 \end{aligned}$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

مثال ۵: مشتق تابع f را در نقطه‌ای به طول $x=a$ بیان می‌کند. کدام گزینه برای تابع f و نقطه‌ی $x=a$ مناسب نیست؟

- (۱) $a=1$ و $f(x) = \sqrt{x} + x^2 + 5$ (۲) $a=1$ و $f(x) = \sqrt{x} + x^2$
(۳) $a=2$ و $f(x) = \sqrt{x-1} + (x-1)^2$ (۴) $a=1$ و $f(x) = \sqrt{1+x} + (x+1)^2$

پاسخ: با استفاده از تعریف $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱): $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+h} + (1+h)^2 + 5) - 7}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} + (1+h)^2 - 2}{h}$ ✓

گزینه‌ی (۲): $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} + (1+h)^2 - 2}{h}$ ✓

گزینه‌ی (۳): $f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(2+h)-1} + ((2+h)-1)^2 - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} + (1+h)^2 - 2}{h}$ ✓

گزینه‌ی (۴): $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+(1+h)} + ((1+h)+1)^2 - (\sqrt{2} + 4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+h} + (2+h)^2 - \sqrt{2} - 4}{h}$ ✗

پس گزینه‌ی (۴) صحیح است.

نکته: چون تعریف مشتق تابع f در نقطه‌ی $x = a$ ، یک حد مبهم $\frac{0}{0}$ است، لذا مانند محاسبه‌ی حدود مبهم، در تست‌هایی که مشتق تابع f در $x = a$ پیوسته باشد (اغلب در تست‌ها این گونه است)، می‌توان از قاعده‌ی هسپیتال یا هم‌ارزی برای محاسبه‌ی آن استفاده نمود.

تذکر: فرض کنید u تابعی از x باشد، از حسابان یادآوری می‌کنیم که اگر $y = f(u)$ ، آن‌گاه $y' = u'f'(u)$

مثال ۶: اگر $f(x) = x^5 + x$ ، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-h)}{h^2 + 2h}$ کدام است؟

(۴) ۳

(۳) ۶

(۲) ۹

(۱) ۱۸

پاسخ:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-h)}{h^2 + 2h} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \text{حاصل حد} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f'(1+2h) + f'(1-h)}{2h+2} = \frac{2f'(1) + f'(1)}{2} = \frac{3f'(1)}{2} = \frac{3}{2} f'(1) = \frac{3}{2} f'(x) = \frac{3}{2} (5x^4 + 1) = \frac{3}{2} \times 6 = 9$$

پس گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۷: اگر $f(x) = \sin(\frac{\pi}{4}\sqrt{x})$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(4x) - 1}{x^2 - \sqrt{x}}$ کدام است؟

(۴) صفر

(۳) $\frac{\pi}{2}$

(۲) $\frac{\pi}{4}$

(۱) $\frac{\pi}{16}$

پاسخ:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(4x) - 1}{x^2 - \sqrt{x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \text{حاصل حد} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4f'(4x)}{2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{4f'(4)}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} f'(4)$$

چون $f(x) = \sin(\frac{\pi}{4}\sqrt{x})$ ، پس $f'(x) = \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos(\frac{\pi}{4}\sqrt{x})$ و در نتیجه $f'(4) = 0$. بنابراین حاصل حد فوق نیز برابر صفر بوده و لذا گزینه‌ی (۴) صحیح است.

نکته: اگر تابع f در نقطه‌ی $x = a$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+mh) - f(a+nh)}{kh} = \left(\frac{m-n}{k}\right)f'(a)$$

رابطه‌ی فوق به سادگی به کمک قاعده‌ی هسپیتال به‌دست می‌آید و لذا می‌توانید این رابطه را به خاطر نسپارید.

مثال ۸: دو نقطه به طول‌های $4-2h$ و $4+3h$ بر روی نمودار تابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ قرار دارند. ضریب زاویه‌ی خط گذرنده بر این نقاط وقتی $h \rightarrow 0$ کدام است؟

(۴) $\frac{7}{4}$

(۳) $\frac{5}{4}$

(۲) $\frac{3}{4}$

(۱) $\frac{1}{4}$

پاسخ: عرض نقاط به طول‌های $4-2h$ و $4+3h$ به ترتیب برابر $f(4-2h)$ و $f(4+3h)$ است. پس ضریب زاویه یا همان شیب خط گذرنده از این نقاط وقتی $h \rightarrow 0$ ، برابر است با:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+3h) - f(4-2h)}{(4+3h) - (4-2h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+3h) - f(4-2h)}{\Delta h} \xrightarrow{\text{طبق نکته‌ی قبل}} \left(\frac{3 - (-2)}{\Delta}\right)f'(4) = f'(4) = f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{4}$$

پس گزینه‌ی (۳) صحیح است.

مشتق‌های راست و چپ

مشتق راست: فرض کنید تابع f در نقطه‌ای به طول a و یک همسایگی راست آن تعریف شده باشد. اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ یا $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ موجود باشد، آن‌گاه تابع f در $x = a$ از راست مشتق‌پذیر است و مقدار هر یک از حدود فوق را با $f'_+(a)$ نمایش داده و به آن مشتق راست تابع f در $x = a$ می‌گوییم. پس:

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

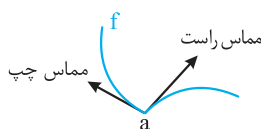
مشتق چپ: به طریق مشابه در صورتی که تابع f در نقطه‌ای به طول a و یک همسایگی چپ آن تعریف شده باشد، مشتق چپ تابع f در $x = a$ که آن را با نماد $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم، در صورت وجود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

تذکر: از تعریف مشتق‌های یک‌طرفه در $x = a$ معلوم می‌شود که وقتی $f'_+(a)$ موجود است، f در $x = a$ پیوستگی راست دارد و چنانچه $f'_-(a)$ موجود باشد، تابع f در $x = a$ پیوستگی چپ دارد.

تعبیر هندسی مشتق‌های چپ و راست

فرض کنید نمودار f به صورت مقابل باشد:



در این صورت در نقطه‌ای a دو خط (دو نیم‌خط) مماس می‌توان بر نمودار f رسم کرد. به نیم‌خطی که به شاخه‌ی سمت راست f در $x = a$ مماس شده، **مماس راست** یا **نیم‌مماس راست** و به نیم‌خطی که به شاخه‌ی سمت چپ f در $x = a$ مماس شده، **مماس چپ** یا **نیم‌مماس چپ** می‌گوییم. شیب مماس راست و مماس چپ مرسوم بر تابع f در نقطه‌ای به طول a ، در صورت وجود، به ترتیب برابر $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ می‌باشند. **تذکر:** اگر نمودار f در $x = a$ به گونه‌ای باشد که مماس‌های چپ و راست f در a بر هم منطبق شوند و این خط مماس غیرموازی محور y ها باشد، آن‌گاه تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر خواهد بود.

تعریف مشتق‌پذیری

(آ) تابع f در نقطه‌ی **درونی** به طول $x = a$ مشتق‌پذیر است، هرگاه $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ موجود، متناهی و برابر هم باشند.
(ب) اگر دامنه‌ی تابع f به صورت بازه‌ی $[a, b]$ باشد، آن‌گاه طبق قرارداد کتاب درسی حسابان، مشتق‌پذیری تابع f در نقطه‌ی **انتهایی** a ، به معنی وجود مشتق راست f در a و مشتق‌پذیری تابع f در نقطه‌ی **انتهایی** b ، به معنی وجود مشتق چپ f در b می‌باشد.

مثال ۹: مشتق‌های چپ و راست توابع زیر را در نقطه‌ی داده شده به دست آورید. آیا این توابع در این نقاط مشتق‌پذیرند؟

(آ) $f(x) = (x-2)[x]$ در $x = 2$ (ب) $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ در $x = 0$

پاسخ:

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} [x] = 2 \quad f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} [x] = 1$$

چون $f'_+(2) \neq f'_-(2)$ پس تابع f در $x = 2$ مشتق‌پذیر نیست.

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}}{x} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}}{x} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

چون $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ پس تابع f در $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

مثال ۱۰: تابع $f(x) = \begin{cases} x \tan^{-1}(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در $x = 0$:

(۲) مشتق راست دارد ولی مشتق چپ ندارد.

(۴) مشتق چپ و راست نابرابر دارد.

(۱) مشتق پذیر است.

(۳) مشتق چپ دارد ولی مشتق راست ندارد.

پاسخ:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan^{-1} \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \tan^{-1} \frac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan^{-1} \frac{1}{x} = \tan^{-1}(+\infty) = \frac{\pi}{2} \\ f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \tan^{-1} \frac{1}{x} = \tan^{-1}(-\infty) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

مثال ۱۱: چه تعداد از توابع $f_1(x) = \sqrt{x}$ ، $f_2(x) = x\sqrt{-x}$ و $f_3(x) = \sqrt{x^3}$ در $x = 0$ مشتق پذیرند؟

(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

پاسخ: توابع $f_1(x) = \sqrt{x}$ و $f_2(x) = x\sqrt{-x}$ فقط در همسایگی راست شامل $x = 0$ تعریف شده‌اند، پس مشتق پذیری این توابع در $x = 0$ به معنی وجود مشتق راست در $x = 0$ است. همچنین تابع $f_3(x) = \sqrt{x^3}$ فقط در همسایگی چپ شامل $x = 0$ تعریف شده است، لذا مشتق پذیری این تابع در $x = 0$ به معنی وجود مشتق چپ در این نقطه است:

$$f_1(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'_1(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$f_2(x) = x\sqrt{-x} \Rightarrow f'_2(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f_2(x) - f_2(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x\sqrt{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{-x} = 0$$

$$f_3(x) = \sqrt{x^3} \Rightarrow f'_3(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_3(x) - f_3(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

بنابراین توابع $f_2(x) = x\sqrt{-x}$ و $f_3(x) = \sqrt{x^3}$ در $x = 0$ مشتق پذیر و تابع $f_1(x) = \sqrt{x}$ در $x = 0$ مشتق ناپذیر بوده و لذا گزینه‌ی (۳) صحیح است.

مثال ۱۲: اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x > 0 \\ x^3 + x & x \leq 0 \end{cases}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2h) - f(-2h)}{\sin h}$ کدام است؟

(۴) -۱

(۳) -۷

(۲) ۱

(۱) ۷

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x > 0 \\ 3x^2 + 1 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(0) = -2 \\ f'_-(0) = 1 \end{cases}$$

پاسخ: تابع f در $x = 0$ پیوسته بوده و داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2h) - f(-2h)}{\sin h} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \text{حاصل حد} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2f'(2h) + 3f'(-2h)}{\cosh}$$

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0^+ \Rightarrow 2h \rightarrow 0^+, -2h \rightarrow 0^-} \frac{2f'_+(0) + 3f'_-(0)}{2} = \frac{2 \times (-2) + 3 \times 1}{2} = -\frac{1}{2}$$

پس گزینه‌ی (۴) صحیح است.

ارتباط پیوستگی و مشتق پذیری

قضیه: اگر تابع f در نقطه‌ی درونی $x = a$ مشتق پذیر باشد، آن گاه f در $x = a$ از چپ و راست پیوسته است.

نکته ۱: عکس قضیه‌ی فوق درست نیست. یعنی اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد، آن گاه لزوماً f در $x = a$ مشتق پذیر نیست. به طور مثال تابع $f(x) = |x|$ در $x = 0$ پیوسته است، اما $f'_+(0) = 1$ و $f'_-(0) = -1$ و لذا تابع f در $x = 0$ مشتق ناپذیر است.

نکته ۲: اگر تابع f در $x = a$ ناپیوسته باشد، آن گاه f در $x = a$ مشتق ناپذیر است. به طور مثال تابع $f(x) = [x]$ در نقاط صحیح ناپیوسته و در نتیجه در این نقاط مشتق ناپذیر است. بنابراین می‌توان گفت پیوستگی f در $x = a$ شرط لازم برای مشتق پذیری f در $x = a$ است ولی کافی نیست.

تذکر: مطالب فوق برای مشتق‌های یک‌طرفه نیز برقرار است. یعنی اگر $f'_+(a)$ (یا $f'_-(a)$) موجود باشد، آن گاه تابع f در $x = a$ پیوستگی راست (یا پیوستگی چپ) دارد. همچنین اگر تابع f در $x = a$ از راست (یا چپ) ناپیوسته باشد، آن گاه $f'_+(a)$ (یا $f'_-(a)$) موجود نیست.

مثال ۳: مشتق پذیری توابع زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید.

(آ) $f(x) = [2x]$; $(x=1)$ (ب) $f(x) = |x^2 - 2x|$; $(x=2)$

(پ) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$; $(x=0)$ (ت) $f(x) = \cos^{-1} \frac{1}{x}$; $(x=1)$

پاسخ: (آ) تابع f در $x=1$ ناپیوسته است، زیرا $f(1^-) = 1$ و $f(1) = 2$ و $f(1^+) = 2$. پس تابع f در $x=1$ مشتق ناپذیر است.
(ب) تابع f در $x=2$ پیوسته است، زیرا $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 0$. همچنین داریم:

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 2x| - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x| |x - 2|}{x - 2} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x| (x - 2)}{x - 2} = 2 \\ f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-|x| (x - 2)}{x - 2} = -2 \end{cases}$$

چون $f'_+(2) \neq f'_-(2)$ ، پس تابع f در $x=2$ مشتق ناپذیر است.

(پ) تابع f در $x=0$ پیوسته است، زیرا: $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \times \infty = 0$

همچنین داریم: $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ موجود نیست.

بنابراین تابع f در $x=0$ مشتق ناپذیر است.

(ت) می‌دانیم اگر $y = \cos^{-1} u$ ، آنگاه $-1 \leq u \leq 1$. در این تابع باید داشته باشیم: $x \leq -1$ یا $x \geq 1 \Rightarrow |x| \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{|x|} \leq 1$. یعنی این که تابع f تنها در همسایگی راست $x=1$ تعریف شده است. پس پیوستگی و مشتق پذیری این تابع در $x=1$ ، به معنی پیوستگی راست و وجود مشتق راست f در $x=1$ است:

در $x=1$ پیوسته است. $f(1) = \cos^{-1} 1 = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \cos^{-1} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \cos^{-1} \frac{1}{x} = \cos^{-1}(1^-) = 0 \Rightarrow$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cos^{-1} \frac{1}{x} - 0}{x - 1} \stackrel{u \rightarrow 1^-}{\sim} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cos^{-1} u}{\sqrt{1-u^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x(x-1)}$$

این تابع نیز در $x=1$ مشتق پذیر نیست. $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{2}}{0^+} = +\infty$

مثال ۴: اگر $f(x) = x^2[x]$ باشد، حاصل $f'_+(2)$ و $f'_-(2)$ به ترتیب کدام است؟

(۱) ۸ و ۴ (۲) ۴ و ۴ (۳) ۸ و موجود نیست (۴) ۴ و موجود نیست.

پاسخ: عبارت درون براکت به ازای $x=2$ ، تبدیل به عددی صحیح می‌شود و $x=2$ ، مینیمم نسبی تابع درون براکت نیست و ضمناً تابع f در $x=2$ عامل صفرکننده ندارد. پس تابع f در $x=2$ ناپیوسته است. اما از آنجایی که تابع درون براکت، صعودی است، لذا در $x=2$ فقط پیوستگی راست دارد. در نتیجه $f'_-(2)$ موجود نیست. همچنین:

گزینه‌ی (۳) صحیح است. $\Rightarrow f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2[x] - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)(x+2)}{x - 2} = 8$

تابع مشتق

قبلاً دیدیم مشتق تابع f در نقطه‌ی ثابت a (در صورت وجود) از رابطه‌ی $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ به دست می‌آید. در واقع $f'(a)$ در صورت وجود، عددی حقیقی و برابر شیب یا ضریب زاویه‌ی خط مماس بر نمودار f در نقطه‌ی a است. حال اگر در تعریف فوق به جای نقطه‌ی

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ثابت a ، نقطه‌ی متغیر x ($x \in D_f$) را جایگزین کنیم، خواهیم داشت:

به تابع f' ، تابع مشتق f می‌گوییم. در واقع f' تابعی است که به هر $x \in D_f$ که به ازای آن حد فوق موجود باشد، $f'(x)$ را نظیر می‌کند. دلیل نام گذاری تابع مشتق، به این خاطر است که f' به کمک حدگیری از تابع f مشتق شده است. بدیهی است که به ازای هر x ، $f'(x)$ ، شیب خط مماس بر نمودار f در نقطه‌ی $(x, f(x))$ است.

تذکر: تابع مشتق تابع $y = f(x)$ را با نمادهای دیگری مانند y'_x ، y' و $\frac{dy}{dx}$ نیز نمایش می‌دهند.

تعریف مشتق پذیری در یک بازه: تابع f را در بازه‌ی I مشتق پذیر می‌گوییم، هرگاه در تمام نقاط این بازه مشتق پذیر باشد.

مثال ۱۵: تابع مشتق توابع زیر را به کمک تعریف تابع مشتق به دست آورید.

(الف) $f(x) = \sqrt{x}$ (ب) $f(x) = x^n ; (n \in \mathbb{N})$ (پ) $f(x) = \sin x$

پاسخ:

(الف)
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(ب)
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \xrightarrow{\text{بسط دو جمله ای}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \dots + \binom{n}{n}h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \dots + \binom{n}{n}h^{n-1})}{h} \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

(پ)
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \xrightarrow{\text{تبدیل جمع به ضرب}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos(x + \frac{h}{2})}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \times \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x + \frac{h}{2}) = \frac{1}{2} \times 2 \cos x \Rightarrow f'(x) = \cos x$$

قواعد و قضایای مشتق گیری

همانطور که در مثال قبل دیدید، محاسبه‌ی تابع مشتق یک تابع به کمک تعریف، کار ساده‌ای نیست و در برخی مواقع کاری مشکل و طاقت‌فرسا است. لذا برای محاسبه‌ی مشتق توابع از فرمول‌ها و قواعد زیر که همگی از تعریف تابع مشتق مانند مثال قبل به دست می‌آیند، استفاده می‌کنیم. (در قواعد زیر منظور از u ، تابعی بر حسب x است.)

تابع	مشتق تابع	تابع	مشتق تابع
۱) $y = k$ (ثابت)	$y' = 0$	۱۵) $y = \cos x$	$y' = -\sin x$
۲) $y = kf(x)$	$y' = kf'(x)$	۱۶) $y = \cos u$	$y' = -u' \sin u$
۳) $y = f(x) \pm g(x)$	$y' = f'(x) \pm g'(x)$	۱۷) $y = \tan x$	$y' = 1 + \tan^2 x$
۴) $y = f(x) \cdot g(x)$	$y' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$	۱۸) $y = \tan u$	$y' = u'(1 + \tan^2 u)$
۵) $y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$	۱۹) $y = \cot x$	$y' = -(1 + \cot^2 x)$
۶) $y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	۲۰) $y = \cot u$	$y' = -u'(1 + \cot^2 u)$
۷) $y = u^n$	$y' = nu'u^{n-1}$	۲۱) $y = \sin^{-1} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
۸) $y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} ; (x > 0)$	۲۲) $y = \sin^{-1} u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
۹) $y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} ; (u > 0)$	۲۳) $y = \cos^{-1} x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
۱۰) $y = \sqrt[m]{u^n}$	$y' = \frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$	۲۴) $y = \cos^{-1} u$	$y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
۱۱) $y = x $	$y' = \frac{x}{ x } , (x \neq 0)$	۲۵) $y = \tan^{-1} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
۱۲) $y = u $	$y' = \frac{u'u}{ u } , (u \neq 0)$	۲۶) $y = \tan^{-1} u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$
۱۳) $y = \sin x$	$y' = \cos x$	۲۷) $y = \cot^{-1} x$	$y' = \frac{-1}{1+x^2}$
۱۴) $y = \sin u$	$y' = u' \cos u$	۲۸) $y = \cot^{-1} u$	$y' = \frac{-u'}{1+u^2}$

مثال ۱۶: مشتق توابع زیر را حساب کنید.

$$(آ) f(x) = x\sqrt{x-1}$$

$$(ب) f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} + x}{x^2 + 2}$$

$$(پ) f(x) = \sin(\pi \cos x)$$

$$(ت) f(x) = 2\sin^{-1}\sqrt{x} + \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

پاسخ:

$$(آ) f'(x) = \sqrt{x-1} + \frac{x}{2\sqrt{x-1}}$$

$$(ب) f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 1\right)(x^2 + 2) - 2x(\sqrt[3]{x} + x)}{(x^2 + 2)^2}$$

$$(پ) f'(x) = -\pi \sin x \cos(\pi \cos x)$$

$$(ت) f'(x) = 2 \times \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

مثال ۱۷: حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(3x+h) - \cos 3x}{h}$ برابر است با:

$$(آ) -\sin 3x \quad (ب) -3 \sin 3x \quad (پ) \sin 3x \quad (ت) 3 \sin 3x$$

پاسخ:

توجه کنید که در این سؤال، اگر چه به ظاهر دو متغیر داریم، ولی چون $h \rightarrow 0$ ، پس h متغیر و x ثابت است. با استفاده از قاعده‌ی هوییتال

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(3x+h) - \cos 3x}{h} \stackrel{HOP}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin(3x+h) \cdot 1}{1} = -\sin 3x$$

(مشتق‌گیری نسبت به h) می‌توان نوشت:

پس گزینه‌ی (آ) صحیح است.

مثال ۱۸: اگر $f(x) = (x^2 + \sqrt{x+2})^5$ و $g(x) = (x^2 - \sqrt{x+2})^5$ باشد، حاصل $f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$ به‌ازای $x=0$ کدام است؟

$$(آ) 80 \quad (ب) 5 \quad (پ) -5 \quad (ت) -80$$

پاسخ: چون $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$ ، پس باید $(f \cdot g)'(0)$ را محاسبه کنیم. پس ابتدا $(f \cdot g)(x)$ را به‌دست می‌آوریم و سپس از آن مشتق گرفته و $x=0$ را جایگزین می‌کنیم:

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = (x^2 + \sqrt{x+2})^5 (x^2 - \sqrt{x+2})^5 = ((x^2 + \sqrt{x+2})(x^2 - \sqrt{x+2}))^5$$

$$\Rightarrow (f \cdot g)(x) = (x^4 - x - 2)^5 \Rightarrow (f \cdot g)'(x) = 5(x^4 - x - 2)^4 (4x^3 - 1) \Rightarrow (f \cdot g)'(0) = 5(-1)(-16) = -80$$

پس گزینه‌ی (ت) صحیح است.

مثال ۱۹: اگر $f(x) = \frac{1}{(\sqrt{\sin^{-1}x} - \sqrt{\pi - \cos^{-1}x})^2}$ و $g(x) = (\sqrt{\sin^{-1}x} + \sqrt{\pi - \cos^{-1}x})^2$ باشد، حاصل $f'g - g'f$ به‌ازای $x=1$ کدام است؟

$$(آ) 0 \quad (ب) 1 \quad (پ) \frac{2}{\pi} \quad (ت) -\frac{2}{\pi}$$

پاسخ: با توجه به این که $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$ ، لذا از تابع $\frac{f}{g}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{(\sqrt{\sin^{-1}x} - \sqrt{\pi - \cos^{-1}x})^2 (\sqrt{\sin^{-1}x} + \sqrt{\pi - \cos^{-1}x})^2} = \frac{1}{(\sin^{-1}x - (\pi - \cos^{-1}x))^2}$$

$$= \frac{1}{(\sin^{-1}x + \cos^{-1}x - \pi)^2} \stackrel{\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}}{=} \frac{1}{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2} \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = 0 \Rightarrow \frac{f'g - g'f}{g^2}(x) = 0 \Rightarrow (f'g - g'f)(x) = 0$$

$$\Rightarrow (f'g - g'f)(1) = 0$$

بنابراین گزینه‌ی (آ) صحیح است.

مثال ۲۰: اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b\sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x} & x \geq 1 \end{cases}$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ مشتق پذیر باشد، $b-a$ کدام است؟

- ۱ (۴) ۲ (۳) ۳ (۲) ۴ (۱)

پاسخ:

می‌دانیم شرط لازم برای مشتق پذیری f در $x=1$ ، پیوستگی f در $x=1$ است. چون تابع f در $x=1$ پیوسته است، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow a + b = 1 \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + \frac{b}{2\sqrt{x}} & 0 < x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(1) = 2a + \frac{b}{2} \\ f'_+(1) = -1 \end{cases} \xrightarrow{f'_-(1)=f'_+(1)} 2a + \frac{b}{2} = -1 \Rightarrow 4a + b = -2 \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow a = -1, b = 2 \Rightarrow b - a = 3$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

نکته: برای محاسبه‌ی مشتق یک تابع، در صورت امکان بهتر است ابتدا آن تابع را ساده‌تر نموده و سپس از آن مشتق گرفت.

مثال ۲۱: مقدار مشتق توابع زیر را در نقاط داده شده به‌دست آورید.

(آ) $f(x) = \frac{x^2 - x}{x + \sqrt{x}} ; (x=1)$

(ب) $f(x) = \sin x \cos^3 x - \cos x \sin^3 x ; (x = \frac{\pi}{12})$

(پ) $f(x) = \frac{x\sqrt{x+3} + \sqrt{x}(x+3)}{\sqrt{x^2+3x}} ; (x=1)$

پاسخ:

(آ) با استفاده از اتحاد مزدوج ضابطه‌ی تابع را ساده می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{(x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})}{x + \sqrt{x}} = x - \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$$

(ب) با استفاده از روابط $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ و $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ می‌توان نوشت:

$$f(x) = \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x \Rightarrow f'(x) = \cos 4x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{12}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

(پ) به کمک فاکتورگیری داریم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} \sqrt{x+3} (\sqrt{x} + \sqrt{x+3})}{\sqrt{x} \sqrt{x+3}} = \sqrt{x} + \sqrt{x+3} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x+3}} \Rightarrow f'(1) = \frac{3}{4}$$

مثال ۲۲: اگر $f(x) = 1 + \binom{5}{1}\sqrt{x} + \binom{5}{2}x + \binom{5}{3}x\sqrt{x} + \binom{5}{4}x^2 + \binom{5}{5}x^2\sqrt{x}$ ، حاصل $f'(1)$ کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۴۰ (۲) ۳۲ (۳) ۲۰ (۴)

پاسخ:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

با مقایسه‌ی بسط دوجمله‌ای فوق با ضابطه‌ی تابع f ، معلوم می‌شود که $a=1$ ، $b=\sqrt{x}$ و $n=5$. پس:

$$f(x) = (1 + \sqrt{x})^5 \Rightarrow f'(x) = 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} (1 + \sqrt{x})^4 \Rightarrow f'(1) = 40$$

پس گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مشتق توابع دارای عامل صفرکننده

فرض کنید تابع $f(x) = g(x)h(x)$ در همسایگی $x = a$ تعریف شده باشد و توابع g و h در $x = a$ مشتق پذیر بوده و $g(a) = 0$ باشد. در این صورت داریم:

$$f'(a) = g'(a)h(a)$$

یعنی اگر قانون تابع f به صورت حاصل ضرب دو یا چند عامل باشد، به طوری که یکی از عوامل به ازای $x = a$ صفر شود، برای محاسبه مشتق تابع f در $x = a$ ، $x = a$ را در عوامل غیر صفر جای گذاری کرده، سپس از تابع مشتق می گیریم و مقدار آن را به ازای $x = a$ می یابیم.

مثال ۲۳: مقدار مشتق توابع را به ازای نقطه‌ی داده شده به دست آورید.

$$(آ) \quad f(x) = (x^2 - 1)\sqrt[3]{x^3 + 5x + 2}; \quad (x = 1)$$

$$(پ) \quad f(x) = \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x; \quad (x = \frac{\pi}{4})$$

پاسخ: آ) در این تابع عامل $(x^2 - 1)$ به ازای $x = 1$ صفرشونده و عامل $h(x) = \sqrt[3]{x^3 + 5x + 2}$ غیر صفر است. بنابراین ابتدا به جای عامل غیر صفر، مقدار آن را در $x = 1$ قرار داده و سپس از تابع حاصل مشتق گرفته و عدد $x = 1$ را جایگزین می کنیم. چون $h(1) = 2$ ، پس در همسایگی $x = 1$ داریم:

این مطلب را به صورت زیر نیز می توان نوشت:

$$f(x) = \underbrace{(x^2 - 1)}_{\text{عامل صفرشونده}} \sqrt[3]{x^3 + 5x + 2} \Rightarrow f'(1) = 2x \sqrt[3]{x^3 + 5x + 2} \Big|_{x=1} = 2 \times 2 = 4$$

عامل صفرشونده

(ب) در این تابع عامل x به ازای $x = 0$ صفرشونده است. در همسایگی $x = 0$ داریم:

$$(x = 0); \quad f(x) = x(-1)(-2) \cdots (-1 \cdot 0) = 1 \cdot 0! \cdot x \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot 0! \Rightarrow f'(0) = 1 \cdot 0!$$

(پ) عامل $\sin 2x$ به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ صفرشونده و عوامل $\sin x$ و $\sin 3x$ در این نقطه غیر صفرند. با جای گذاری $x = \frac{\pi}{4}$ در عوامل غیر صفر داریم:

$$(x = \frac{\pi}{4}); \quad f(x) = \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{3\pi}{4} \sin 2x = -\sin 2x \Rightarrow f'(x) = -2 \cos 2x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{4}) = 2$$

مثال ۲۴: اگر $f(x) = \cos \frac{\pi}{x} \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{x}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{h}$ کدام است؟

$$\pi (4) \quad \frac{\pi}{4} (3) \quad -\frac{\pi}{4} (2) \quad -\pi (1)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{h} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \text{حاصل حد} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f'(2+h) + f'(2-h)}{1} = 4f'(2)$$

پاسخ: ۲)

در تابع f ، عامل $\cos \frac{\pi}{x}$ به ازای $x = 2$ صفرشونده است و $\sin^2 \frac{2\pi}{x} = -1$ پس در همسایگی $x = 2$ داریم:

$$(x = 2); \quad f(x) = -\cos \frac{\pi}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{\pi}{x^2} \sin \left(\frac{\pi}{x}\right) \Rightarrow f'(2) = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow 4f'(2) = -\pi$$

پس گزینه‌ی (۱) صحیح است.

نکته: اگر در تابع $f(x) = g(x)h(x)$ ، $x = a$ ریشه‌ی مضاعف یا مکرر تابع g باشد و توابع g و h در a مشتق پذیر باشند، آن گاه $f'(a) = 0$. به عبارت دیگر اگر $x = a$ ریشه‌ی مضاعف یا مکرر برای عامل صفرکننده در تابع f باشد، آن گاه $f'(a) = 0$. به طور مثال $x = 2$ ، ریشه‌ی مضاعف عامل صفرکننده در تابع $f(x) = (x-2)^2(x^2 + \sqrt{x})^3$ است، پس $f'(2) = 0$.

مثال ۲۵: مشتق تابع $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x + \sqrt[3]{x}} + \frac{x^2-1}{x^5+x+1}$ به ازای $x = 1$ کدام است؟

$$1 (4) \quad \frac{2}{3} (3) \quad \frac{1}{3} (2) \quad \text{صفر} (1)$$

پاسخ: ۲) $x = 1$ ریشه‌ی مضاعف عامل صفرکننده در عبارت $\frac{(x-1)^2}{x + \sqrt[3]{x}}$ است. پس مشتق این عبارت در $x = 1$ برابر صفر است. هم چنین در قسمت دوم

تابع، یعنی $\frac{x^2-1}{x^5+x+1}$ ، صورت کسر به ازای $x = 1$ عامل صفرکننده و مخرج کسر عامل غیر صفر است. پس با جای گذاری $x = 1$ در مخرج کسر داریم:

$$(x = 1); \quad f(x) = \frac{x^2-1}{x^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^3} \Rightarrow f'(1) = \frac{2}{1} \Rightarrow \text{گزینه‌ی (۳) صحیح است.}$$

مشتق توابع شامل قدرمطلق در یک نقطه

فرض کنید تابع f در $x = a$ مشتق پذیر بوده و $f(a) \neq 0$. در این صورت برای محاسبه‌ی مشتق تابع $y = |f(x)|$ و یا تابع مشتق پذیر شامل $|f(x)|$ در نقطه‌ای به طول $x = a$ ، ابتدا علامت تابع f را در همسایگی $x = a$ مشخص نموده و قدرمطلق را برمی داریم. سپس از تابع مشتق گرفته و $x = a$ را جایگزین می کنیم.

تذکر: در حالتی که f در $x = a$ مشتق پذیر بوده و $f(a) = 0$ ، در مورد مشتق پذیری تابع $y = |f(x)|$ بعداً صحبت خواهیم کرد.

مثال ۲۶: مقدار مشتق توابع زیر را در نقاط داده شده به دست آورید.

(آ) $f(x) = |x^2 - 3x + 1|$; $(x = 1)$

(ب) $f(x) = |x| + |x-1| + |x-2| + \dots + |x-100|$; $(x = \frac{5}{4})$

پاسخ:

(آ) مقدار تابع درون قدرمطلق، یعنی $g(x) = x^2 - 3x + 1$ ، به ازای $x = 1$ منفی است. پس در همسایگی $x = 1$ می توان نوشت:

$$f(x) = -x^2 + 3x - 1 \Rightarrow f'(x) = -2x + 3 \Rightarrow f'(1) = 1$$

(ب) به ازای $x = \frac{5}{4}$ ، مقدار تابع درون سه قدرمطلق اول مثبت، ولی مقدار عبارت های درون بقیه ی قدرمطلق ها منفی است. پس در همسایگی $x = \frac{5}{4}$ می توان نوشت:

$$f(x) = x + (x-1) + (x-2) + (3-x) + (4-x) + \dots + (100-x)$$

در ضابطه ی تابع f ، ۱۰۱ قدرمطلق داشتیم که پس از حذف قدرمطلق ها، سه تا از x های مثبت با سه تا از x های منفی ساده شده و لذا نودوپنج x منفی و تعدادی عدد باقی می ماند که چون مشتق آن ها صفر می شود، مقدار آن ها برای ما اهمیت ندارد. در واقع داریم:

$$f(x) = -95x + \text{عدد} \Rightarrow f'(x) = -95 \Rightarrow f'(\frac{5}{4}) = -95$$

مثال ۲۷: اگر $f(x) = ||\sqrt{x} - x| - 4|$ ، حاصل $f'(4)$ کدام است؟

(۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: مقدار $\sqrt{x} - x$ به ازای $x = 4$ منفی است. پس $|\sqrt{x} - x| = x - \sqrt{x}$. پس $f(x) = |x - \sqrt{x} - 4|$. هم چنین مقدار عبارت درون قدرمطلق بیرونی یعنی $x - \sqrt{x} - 4$ ، به ازای $x = 4$ منفی است. بنابراین در همسایگی $x = 4$ داریم:

$$f(x) = -x + \sqrt{x} + 4 \Rightarrow f'(x) = -1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = -\frac{3}{4}$$

پس گزینه ی (۲) صحیح است.

مشتق توابع شامل براکت در یک نقطه

فرض کنید f تابعی شامل براکت بوده و در $x = a$ مشتق پذیر باشد. در این صورت برای محاسبه‌ی مشتق تابع f در $x = a$ ، ابتدا در همسایگی $x = a$ ، مقدار جزء صحیح را تعیین کرده و جزء صحیح را برمی داریم و سپس از تابع مشتق گرفته و $x = a$ را جایگزین می کنیم.

مثال ۲۸: مقدار مشتق تابع $f(x) = \sin 4x [\cos x]$ به ازای $x = \frac{3\pi}{4}$ کدام است؟

(۱) -4 (۲) -2 (۳) 2 (۴) 4

پاسخ: مقدار $[\cos x]$ به ازای $x = \frac{3\pi}{4}$ برابر -1 است، پس در همسایگی $x = \frac{3\pi}{4}$ خواهیم داشت:

$$f(x) = -\sin 4x \Rightarrow f'(x) = -4 \cos 4x \Rightarrow f'(\frac{3\pi}{4}) = -4 \cos 3\pi = 4$$

پس گزینه ی (۴) صحیح است.

نکته: همان‌طور که گفتیم، پیوستگی تابع f در $x = a$ ، شرط لازم برای مشتق‌پذیری f در $x = a$ است. بنابراین تابع از هر طرفی که در $x = a$ پیوسته باشد، مشتق آن در $x = a$ نیز از همان طرف می‌تواند موجود باشد. لذا برای محاسبه‌ی مشتق یک‌طرفه‌ی توابع شامل براکت در $x = a$ ، در صورتی که تابع از همان طرف در $x = a$ پیوسته باشد، مقدار براکت را در همان همسایگی یک‌طرفه تعیین نموده و براکت را برمی‌داریم. سپس از تابع مشتق گرفته و $x = a$ را جایگزین می‌کنیم.

مثال ۲۹: اگر $f(x) = |x^2 - 4|$ ، حاصل $f'_+(2) - f'_-(2)$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) ۴ (۳) ۶۰ (۴) -۶۰

پاسخ:

اگرچه مقدار عبارت درون براکت به‌ازای $x = 2$ برابر مقداری صحیح می‌شود، اما به دلیل این‌که تابع f در $x = 2$ دارای عامل صفرکننده در بیرون براکت است، لذا تابع f در $x = 2$ از چپ و راست پیوسته می‌باشد. بنابراین داریم:

$$x \rightarrow 2^+ : |x^2 - 4| = x^2 - 4, [x^2] = 8 \Rightarrow f(x) = 8(x^2 - 4) \Rightarrow f'(x) = 16x \Rightarrow f'_+(2) = 32$$

$$x \rightarrow 2^- : |x^2 - 4| = 4 - x^2, [x^2] = 7 \Rightarrow f(x) = 7(4 - x^2) \Rightarrow f'(x) = -14x \Rightarrow f'_-(2) = -28$$

بنابراین $f'_+(2) - f'_-(2) = 32 - (-28) = 60$ و در نتیجه گزینه‌ی (۳) صحیح است.

مثال ۳۰: اگر $f(x) = x^2[3 - x]$ باشد، $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ به‌ترتیب کدام‌اند؟

- (۱) ۸ و ۴ (۲) ۴ و موجود نیست. (۳) موجود نیست و ۴ (۴) موجود نیست و ۸

پاسخ:

عبارت درون براکت به‌ازای $x = 1$ ، به عدد صحیح تبدیل می‌شود. چون $x = 1$ ، مینیمم نسبی تابع درون براکت نیست و نیز تابع f در $x = 1$ و در بیرون براکت عامل صفرکننده ندارد، پس تابع f در $x = 1$ ناپیوسته است. اما از آن‌جایی که تابع درون براکت همواره نزولی است، لذا تابع f در $x = 1$ فقط پیوستگی چپ دارد. بنابراین به دلیل عدم پیوستگی راست f در $x = 1$ ، $f'_+(1)$ موجود نیست. اما در همسایگی چپ $x = 1$ داریم $2 = [3 - x] = [2^+]$. در نتیجه:

$$x \rightarrow 1^- ; f(x) = 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x \Rightarrow f'_-(1) = 4$$

پس گزینه‌ی (۳) صحیح است.

نکته: اگر $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، آن‌گاه $f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ و در حالت کلی اگر u تابعی از x باشد و $y = \frac{au+b}{cu+d}$ ، آن‌گاه

$$y' = \frac{(ad-bc)u'}{(cu+d)^2}$$

مثال ۳۱: مقدار مشتق تابع $f(x) = \frac{2\sin^2 x - 1}{3\sin^2 x + 1}$ به‌ازای $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{4}{25}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{25}{4}$

پاسخ:

با فرض $u = \sin^2 x$ ، با استفاده از نکته‌ی فوق داریم:

$$f'(x) = \frac{(2 - (-3))(\sin^2 x)'}{(3\sin^2 x + 1)^2} = \frac{5\sin 2x}{(3\sin^2 x + 1)^2} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

پس گزینه‌ی (۱) صحیح است.

تست‌های جلسه اول

۲۲

(آزمون‌های گاج)

۱. اگر $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ و $f'(a) = -4$ باشد، کدام است a ؟

- (۱) $\frac{1}{16}$ (۲) $\frac{1}{16}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{14}$

(آزمون‌های گاج)

۲. مشتق تابع $y = \cos^2 \frac{\pi}{x}$ در $x = 12$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{144}$ (۲) $-\frac{\pi}{144}$ (۳) $-\frac{\pi}{288}$ (۴) $\frac{\pi}{288}$

۳. اگر $f(x) = \sqrt{x-2}\sqrt{x-1}$ باشد، $f'(5)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{3}{8}$

(آزمون‌های گاج)

۴. مشتق تابع $f(x) = (\frac{x}{2} - \sqrt[3]{x})^2$ در $x = 8$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{7}$ (۲) $\frac{16}{7}$ (۳) $\frac{7}{16}$ (۴) $-\frac{1}{7}$

(آزمون‌های گاج)

۵. اگر $f(x) = \cot^{-1} \sqrt{2x}$ باشد، مقدار $f'(\frac{1}{2})$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) -1 (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

(آزمون‌های گاج)

۶. مقدار مشتق $y = \sqrt{2 + \sin^2 x}$ در $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\sqrt{3}$

(آزمون‌های گاج)

۷. مشتق تابع $y = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$ در $x = \frac{1}{2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{6}$ (۲) $-\frac{\pi}{6}$ (۳) $\frac{\pi}{3}$ (۴) $-\frac{\pi}{3}$

۸. تابع مشتق تابع $f(x) = 2 \sin x \cos^2 \frac{x}{2}$ کدام است؟

- (۱) $1 + \cos x$ (۲) $1 - \cos x$ (۳) $\cos x + \cos^2 x$ (۴) $\cos x - \cos^2 x$

(مسئله‌ی ۹ کتاب درسی - صفحه‌ی ۱۵۱)

۹. اگر $f(x) = \frac{x+1}{x} \operatorname{sgn}(x^2 - x + 1)$ ، $f'(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{x^2}$ (۲) $-\frac{1}{x^2}$ (۳) $\frac{2}{x^2}$ (۴) $-\frac{2}{x^2}$

۱۰. مشتق تابع $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x}}$ به ازای $x = 1$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $-\frac{1}{9}$

۱۱. مشتق تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{x\sqrt{x+5} + \sqrt{x}(x+5)}{\sqrt{x^2+5x}}$ در $x = 4$ چه قدر است؟

- (۱) 5 (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{13}{72}$ (۴) $\frac{5}{12}$

۱۲. مشتق تابع $y = (\sqrt{x+4} - \sqrt{x+1})^2 (\sqrt{x+4} + \sqrt{x+1})^2$ در $x = 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{27}{4}$ (۳) $-\frac{27}{4}$ (۴) $-\frac{9}{4}$

۱۳. اگر $f(x) = (2x + \sqrt{4x^2 - 1})^1$ و $g(x) = (2x - \sqrt{4x^2 - 1})^1$ ، حاصل $f'g + g'f$ در $x = 3$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) صفر

۱۴. اگر $f(x) = \sqrt{x^2} \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2 \sqrt{x}}$ ، حاصل $f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$ در $x = 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{21}{12}$ (۲) ۱ (۳) $-\frac{21}{12}$ (۴) $\frac{5}{12}$

۱۵. اگر $f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 1}}$ و $g(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ باشند، حاصل $f'(x)g(x) - g'(x)f(x)$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) $2x$ (۴) $\sqrt{x^2 + 1}$

۱۶. اگر $f'(x)g(x) - g'(x)f(x) = x^2$ و $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ باشد، مشتق تابع $\frac{g}{f}$ در $x = \sqrt{3}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{4}$

۱۷. اگر $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + \sin x}$ و $g(x) = \frac{x^2 + \sin^2 x + 2x \sin x}{x + 1}$ ، آن‌گاه $2ff'g + g'f^2$ به‌ازای $x = 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) ۱

۱۸. اگر $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x + 1}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}$ باشند، حاصل $xf'(x) + g'(x) + f(x)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $x + 1$ (۳) $x - 1$ (۴) -۱

۱۹. مشتق تابع $y = (x^3 - 1)(x^3 - 2) \cdots (x^3 - 28)$ در $x = 3$ چه قدر است؟

- (۱) $27!$ (۲) $26!$ (۳) $-(27!)$ (۴) $-(26!)$

۲۰. مشتق تابع $f(x) = \frac{(x^2 - 4)\sqrt{x^2 + 2x - 1}}{x^2 + x + 2}$ در $x = 2$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

۲۱. اگر $f(x) = x + (x - 1)\sin^{-1} \sqrt{\frac{x}{x + 1}}$ باشد، مقدار $f'(1) - f(1)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{6}$ (۲) $-\frac{\pi}{6}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $-\frac{\pi}{4}$

۲۲. مشتق $f(x) = (x - 3)|x - 3| + \sqrt[3]{(x - 3)^3(x - 4)}$ در $x = 3$ چه قدر است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) مشتق پذیر نیست.

۲۳. مقدار مشتق تابع $y = \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 2}{x + 2}$ در $x = -1$ برابر است با:

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -۱

۲۴. اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = 2\sqrt{x}$ ، آن‌گاه $f'(4)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) ۴ (۴) ۲

۲۵. اگر $f(2) = 1$ و $2f'(2) = f(2)$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{f(2+h)} - \sqrt{f(2)}}{h}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(آزمون‌های گاه)

(آزمون‌های گاه)

(آزمون‌های گاه)

(تمرین در کلاس کتاب درسی - صفحه ۱۳۵)

۲۶. اگر $f(x) = \sqrt{x^2}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^3(1+h) - f^3(1)}{h}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{2}{9}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$

(آزمون‌های گاج)

۲۷. حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\cos x + h) - \sin(\cos x)}{h}$ کدام است؟

- (۱) $-\sin x \cos(\cos x)$ (۲) $\cos(\sin x)$ (۳) $\sin(\sin x)$ (۴) $\cos(\cos x)$

۲۸. عبارت $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 + 2(2+h) - 15}{h}$ مربوط به تعریف مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول a است. f و a در کدام گزینه به درستی انتخاب شده است؟

(آزمون‌های گاج)

- (۱) $a = 3, f(x) = x^2 + 2x$ (۲) $a = 3, f(x) = x^2 - 2x$
(۳) $a = 2, f(x) = x^2 + 3x$ (۴) $a = -2, f(x) = x^2 - 3x$

(آزمون‌های گاج)

۲۹. اگر $f(x) = [x] \cos \frac{\pi}{x}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+2h) - f(2-h)}{h}$ کدام است؟

- (۱) وجود ندارد. (۲) π (۳) 2π (۴) $\frac{5\pi}{4}$

۳۰. به ازای کدام مقدار a ، در تابع $f(x) = \begin{cases} x+a & x \leq 1 \\ b\sqrt{x} & x > 1 \end{cases}$ مقدار $f'(1)$ موجود است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

(مثال کتاب درسی - صفحه ۱۳۷)

۳۱. اگر تابع $f(x) = \begin{cases} (x+1)^3 & x \leq 0 \\ ax + a + b & x > 0 \end{cases}$ در $x = 0$ مشتق پذیر باشد، ab کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) -۴ (۳) ۴ (۴) ۶

(آزمون‌های گاج)

۳۲. اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a \sin x + 3 \cos x & x < \pi \\ b \sin \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{2} & x \geq \pi \end{cases}$ در $x = \pi$ مشتق پذیر باشد، دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟

- (۱) $(1, -3)$ (۲) $(-1, 3)$ (۳) $(-1, -3)$ (۴) $(1, 3)$

(آزمون‌های گاج)

۳۳. اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax[x] + 1 & x \geq 1 \\ bx^2 + 2ax - 1 & x < 1 \end{cases}$ در $x = 1$ مشتق پذیر باشد، $a - b$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۶ (۳) ۲ (۴) -۴

۳۴. در تابع $f(x) = |5 - x\sqrt{x}|$ ، مقدار $f'(1) + f'(4)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۳

۳۵. مشتق تابع $y = |x^2 - 1| + |x^2 - 2| + \dots + |x^2 - 10|$ به ازای $x = \frac{3}{2}$ چه قدر است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۱۸ (۳) -۳۰ (۴) -۱۸

۳۶. اگر $f(x) = |\sin x - \cos x| \cos x$ باشد، $f'(\frac{\pi}{12})$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) وجود ندارد. (۳) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ (۴) $-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

(آزمون‌های گاج)

۳۷. اگر مشتق راست $f(x) = a |\sin x - \cos x|$ در $x = \frac{\pi}{4}$ برابر ۱ باشد، a کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $-\sqrt{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۳۸. مقدار مشتق تابع $f(x) = x^2 [\frac{2x}{3}]$ در $x = 2$ چه قدر است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۱۲ (۳) ۱۸ (۴) صفر

پاسخ تست‌های جلسه اول



۲۵

$$y = \frac{\sqrt{x} \sqrt{x+\Delta} (\sqrt{x} + \sqrt{x+\Delta})}{\sqrt{x} \sqrt{x+\Delta}} = \sqrt{x} + \sqrt{x+\Delta}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x+\Delta}} \Rightarrow y'(4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

$$y = (\sqrt{x+4} - \sqrt{x+1})((\sqrt{x+4} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x+4} + \sqrt{x+1}))^2$$

$$= 9(\sqrt{x+4} - \sqrt{x+1}) \Rightarrow y' = 9\left(\frac{1}{2\sqrt{x+4}} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)$$

$$\Rightarrow y'(0) = 9\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = ((2x + \sqrt{4x^2 - 1})(2x - \sqrt{4x^2 - 1}))^{10} = 1$$

$$\Rightarrow (f \cdot g)'(x) = 0 \Rightarrow f'(x)g(x) + g'(x)f(x) = 0$$

$$f(x) = \sqrt{x^r} \sqrt{x} = \sqrt{x^r} x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{r}{2}} x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{r+1}{2}}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^{\frac{r}{2}} \sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{r}{2}} x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{r+1}{2}}$$

$$\Rightarrow f(x)g(x) = x^{\frac{r+1}{2}} \cdot x^{-\frac{r+1}{2}} = x^0 = 1 \Rightarrow (f \cdot g)'(x) = 0$$

$$\Rightarrow (f \cdot g)'(1) = 0 \Rightarrow f'(1)g(1) + g'(1)f(1) = 0$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{(x - \sqrt{x^r+1})(x + \sqrt{x^r+1})}$$

$$= \frac{1}{x^r - (x^r+1)} = -1 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} = 0 \Rightarrow f'(x)g(x) - g'(x)f(x) = 0$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(x) = \frac{g'(x)f(x) - f'(x)g(x)}{f^2(x)} = \frac{-x^r}{x^r + 3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{g}{f}\right)'(\sqrt{3}) = -\frac{1}{4}$$

چون $f^2g + g'f^2 = (f^2 \cdot g)'$ ، لذا ابتدا f^2g را محاسبه کرده و سپس از آن مشتق می‌گیریم و $x=1$ را جایگزین می‌کنیم:

$$(f^2g)(x) = f^2(x) \cdot g(x)$$

$$= \frac{x}{x^r + \sin^r x + 2x \sin x} \times \frac{x^r + \sin^r x + 2x \sin x}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

$$\Rightarrow (f^2g)'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow (f^2g)'(1) = \frac{1}{4}$$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \xrightarrow{f'(a)=-4} -\frac{1}{2a\sqrt{a}} = -4$$

$$\Rightarrow a\sqrt{a} = \frac{1}{8} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$y'(x) = -2\left(-\frac{\pi}{x^r}\right) \sin \frac{\pi}{x} \cos \frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{x^r} \sin \frac{2\pi}{x}$$

$$\Rightarrow y'(12) = \frac{\pi}{144} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{288}$$

$$f'(x) = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{x-1}}}{2\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}} \Rightarrow f'(\Delta) = \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$f'(x) = 2\left(-\frac{4}{x^r} - \frac{1}{r\sqrt{x^r}}\right)\left(\frac{4}{x} - \sqrt{x}\right)$$

$$\Rightarrow f'(4) = 2\left(-\frac{4}{64} - \frac{1}{12}\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right) = 2\left(-\frac{7}{16}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{21}{16}$$

$$f'(x) = \frac{-\frac{2}{2\sqrt{2x}}}{1+2x} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$y' = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{2+\sin^2 x}} \Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$y'(x) = \sin^{-1} x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x \Rightarrow y'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$f(x) = \sin x \left(2 \cos^r \frac{x}{r}\right) = \sin x (1 + \cos x)$$

$$= \sin x + \sin x \cos x = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\Rightarrow f'(x) = \cos x + \cos 2x$$

$$x^r - x + 1 > 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}(x^r - x + 1) = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x+1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$$y = \frac{\sqrt[3]{x^r+1}}{x + \sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x^r+1}}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x^r+1})} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} \Rightarrow y'(1) = -\frac{1}{3}$$

۲۶ ۱ ۲ ۳ ۴

$$f(x) = \sqrt[q]{x^r} = x^{\frac{r}{q}} \Rightarrow f'(x) = \frac{r}{q} x^{\frac{r}{q}-1}$$

$$\Rightarrow f'(1) = \frac{r}{q} \text{ و } f(1) = 1 \quad (*)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^r(1+h) - f^r(1)}{h} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r f^{r-1}(1+h) f'(1+h) - 0}{1}$$

$$= r f'(1) f^r(1) \stackrel{(*)}{=} r \left(\frac{r}{q}\right) (1)^r = \frac{r}{q}$$

۲۷ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\cos x + h) - \sin(\cos x)}{h} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(\cos x + h) - \cos(\cos x)}{1} = \cos(\cos x)$$

۲۸ ۱ ۲ ۳ ۴

گزینه‌ی (۱):

$$f(x) = x^r + rx, \quad a = r$$

$$f'(r) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(r+h) - f(r)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(r+h)^r + r(r+h) - 15}{h} \quad \checkmark$$

گزینه‌ی (۲):

$$f(x) = x^r - rx, \quad a = r$$

$$f'(r) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(r+h) - f(r)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(r+h)^r - r(r+h) - r}{h} \quad \times$$

گزینه‌ی (۳):

$$f(x) = x^r + rx, \quad a = r$$

$$f'(r) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(r+h) - f(r)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(r+h)^r + r(r+h) - 10}{h} \quad \times$$

گزینه‌ی (۴):

$$f(x) = x^r - rx, \quad a = -r$$

$$f'(-r) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-r+h) - f(-r)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-r+h)^r - r(-r+h) - 10}{h} \quad \times$$

۲۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$x \rightarrow r^+ : f(x) = r \cos \frac{\pi}{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{r\pi}{x^2} \sin \frac{\pi}{x} \Rightarrow f'_+(r) = \frac{\pi}{r}$$

$$x \rightarrow r^- : f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\pi}{x^2} \sin \frac{\pi}{x} \Rightarrow f'_-(r) = \frac{\pi}{r}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(r+rh) - f(r-h)}{h} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{r f'(r+rh) + f'(r-h)}{1}$$

$$\stackrel{h \rightarrow 0^- \Rightarrow rh \rightarrow 0^-, -h \rightarrow 0^+}{=} r f'_-(r) + f'_+(r) = \frac{r f'_-(r) = \frac{\pi}{r}}{f'_-(r) = \frac{\pi}{r}} \frac{f'_+(r) = \frac{\pi}{r}}{f'_-(r) = \frac{\pi}{r}} + \frac{\pi}{r} = \frac{\Delta \pi}{r}$$

۱۸ ۱ ۲ ۳ ۴

$$xf(x) + g(x) = \frac{x^r}{x^r - x + 1} + \frac{1}{x^r - x + 1} = \frac{x^r + 1}{x^r - x + 1}$$

$$= \frac{(x+1)(x^r - x + 1)}{x^r - x + 1} = x + 1$$

$$\Rightarrow (xf(x) + g(x))' = 1 \Rightarrow xf'(x) + f(x) + g'(x) = 1$$

۱۹ ۱ ۲ ۳ ۴

عبارت $x^r - 27$ عامل صفرکننده است. پس:

$$y'(r) = r x^r (x^r - 1)(x^r - 2) \dots (x^r - 26)(x^r - 28) \Big|_{x=r}$$

$$= 27 \times 26 \times 25 \times \dots \times 1 \times (-1) = -(27!)$$

۲۰ ۱ ۲ ۳ ۴

عامل صفرکننده

$$f(x) = \frac{(x^r - r) \sqrt{x^r + rx - 11}}{x^r + x + r} \Rightarrow f'(r) = rx \times \frac{1}{1} \Big|_{x=r} = \frac{1}{r}$$

۲۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$$f(x) = x + (x-1) \sin^{-1} \sqrt{\frac{x}{x+1}} \Rightarrow f'(1) = 1 + \frac{\pi}{4}$$

عامل صفرکننده

$$f'(1) - f(1) = \frac{\pi}{4}$$

از طرفی $f(1) = 1$ پس:

۲۲ ۱ ۲ ۳ ۴

$$f(x) = (x-r) |x-r| + (x-r) \sqrt{x-r}$$

$$= (x-r) (|x-r| + \sqrt{x-r}) \Rightarrow f'(r) = 1 \times (0 + (-1)) = -1$$

عامل صفرکننده

۲۳ ۱ ۲ ۳ ۴

$$y = \frac{(x^r + rx^r + rx + 1) + 1}{x + r} = \frac{(x+1)^r + 1}{x + r} = \frac{(x+1)^r}{x + r} + \frac{1}{x + r}$$

عبارت $\frac{(x+1)^r}{x+r}$ در $x = -1$ دارای عامل صفرکننده با توان بیش‌تر از ۱ بوده و لذا مشتق آن در این نقطه صفر است. پس:

$$y' = 0 + \frac{-1}{(x+r)^2} \Big|_{x=-1} = -1$$

۲۴ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = r\sqrt{x}$$

$$\stackrel{\text{HOP}}{\rightarrow} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) + f'(x-h)}{1} = r\sqrt{x} \Rightarrow 2f'(x) = r\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(4) = 2$$

۲۵ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{f(r+h)} - \sqrt{f(r)}}{h} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f'(r+h)}{2\sqrt{f(r+h)}}}{1}$$

$$= \frac{f'(r)}{2\sqrt{f(r)}} = \frac{f'(r) = \frac{1}{r}}{f(r) = 1} \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۳۴

$$x \rightarrow 1 \Rightarrow 5 - x\sqrt{x} > 0 \Rightarrow f(x) = 5 - x^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(1) = -\frac{3}{2}$$

$$x \rightarrow 4 \Rightarrow 5 - x\sqrt{x} < 0 \Rightarrow f(x) = x^{\frac{3}{2}} - 5$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \Rightarrow f'(4) = 3$$

$$\Rightarrow f'(1) + f'(4) = \frac{3}{2}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۳۵

$$x \rightarrow \frac{3}{4} : y = (x^{\frac{3}{4}} - 1) + (x^{\frac{3}{4}} - 2) + (-x^{\frac{3}{4}} + 3) + \dots + (-x^{\frac{3}{4}} + 10)$$

$$\Rightarrow y = -6x^{\frac{3}{4}} + \text{عدد}$$

$$\Rightarrow y' = -12x^{\frac{3}{4}} \Rightarrow y'(\frac{3}{4}) = -18$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۳۶

$$x \rightarrow \frac{\pi}{12} \Rightarrow \cos x > \sin x$$

$$\Rightarrow f(x) = (\cos x - \sin x) \cos x = \cos^2 x - \sin x \cos x$$

$$\Rightarrow f(x) = \cos^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x \Rightarrow f'(x) = -\sin 2x - \cos 2x$$

$$\Rightarrow f'(\frac{\pi}{12}) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۳۷

$$x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+ \Rightarrow \sin x > \cos x$$

$$f(x) = a(\sin x - \cos x) \Rightarrow f'(x) = a(\cos x + \sin x)$$

$$\Rightarrow f'_+(\frac{\pi}{4}) = a\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{f'_+(\frac{\pi}{4})=1} a\sqrt{2}=1 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۳۸

در همسایگی $x=2$ ، داریم $1 = [\frac{2x}{3}]$. پس:

$$x \rightarrow 2; f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(2) = 12$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۳۰

اولاً تابع f باید در $x=1$ پیوسته باشد. پس:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow a+1=b \quad (*)$$

ثانیاً مقادیر $f'_-(1)$ و $f'_+(1)$ باید موجود و برابر باشند.

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x < 1 \\ \frac{b}{3\sqrt{x^3}} & x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(1) = 1 \\ f'_+(1) = \frac{b}{3} \end{cases} \xrightarrow{f'_+(1)=f'_-(1)} \frac{b}{3} = 1$$

$$\Rightarrow b=3 \xrightarrow{(*)} a=2$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۳۱

مانند تست قبل عمل می‌کنیم. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Rightarrow a+b=1 \quad (*)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3(x+1)^2 & x < 0 \\ a & x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(0) = 3 \\ f'_+(0) = a \end{cases}$$

$$\xrightarrow{f'_+(0)=f'_-(0)} a=3 \xrightarrow{(*)} b=-2 \Rightarrow ab=-6$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۳۲

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = f(\pi) \Rightarrow b = -3$$

$$f'(x) = \begin{cases} a \cos x - 3 \sin x & x < \pi \\ \frac{b}{2} \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} & x > \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(\pi) = -a \\ f'_+(\pi) = -1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{f'_+(\pi)=f'_-(\pi)} -a = -1 \Rightarrow a = 1$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۳۳

در همسایگی $x=1$ ، ضابطه‌ی تابع f را می‌توان به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} ax+1 & x \geq 1 \\ bx^2+2ax-1 & x < 1 \end{cases} \text{ نوشت.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

$$\Rightarrow a+1=b+2a-1 \Rightarrow a+b=2 \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} a & x > 1 \\ 2bx+2a & x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(1) = a \\ f'_-(1) = 2b+2a \end{cases}$$

$$\xrightarrow{f'_+(1)=f'_-(1)} a=2b+2a \Rightarrow a=-2b \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow b=-2, a=4 \Rightarrow a-b=6$$