

# فصل اول

## الگو و دنباله

### درسنامه‌ی ۱

■ **تعریف دنباله:** هر تعداد از اعداد که آن‌ها را پشت سر هم نوشته باشیم یک دنباله از اعداد نامیده می‌شود و به هر عدد که در دنباله قرار گرفته است یک جمله‌ی آن دنباله گفته می‌شود.

■ **جمله‌ی عمومی دنباله:** جمله‌ی  $n$ ام یک دنباله را که در آن عدد طبیعی دلخواه می‌باشد، جمله‌ی عمومی دنباله می‌نامند. معمولاً جمله‌ی عمومی یک دنباله را با  $a_n$  یا  $t_n$  یا  $u_n$  و دنباله‌ی آن را با  $\{a_n\}$  یا  $\{t_n\}$  یا  $\{u_n\}$  نشان می‌دهند.

■ **الگویابی:** در برخی دنباله‌ها الگویی وجود دارد که از روی آن می‌توانیم اعداد دنباله را به دست آوریم. این الگوها می‌توانند به صورت‌های مختلفی (شکل، جدول و ...) بیان شوند.

به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$1) 1, 2, 3, \dots, n, \dots \Rightarrow a_n = n$$

$$2) 1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1, \dots \Rightarrow a_n = 2n-1$$

$$3) 2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, \dots \Rightarrow a_n = 2^n$$

**تذکر:** جمله‌ی اول دنباله‌ی  $\{a_n\}$  را با  $a$  یا  $a_1$  نشان می‌دهیم.

**مثال:** جمله‌ی عمومی دنباله‌ای به صورت  $a_n = \frac{3n-1}{n}$  می‌باشد. سه جمله‌ی اول آن را بنویسید.

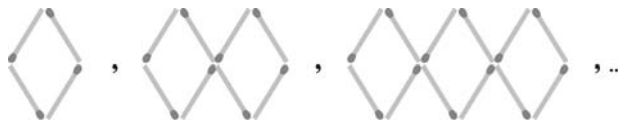
✓ پاسخ:  $a_1 = \frac{3(1)-1}{1} = 2$  ، جمله‌ی دوم  $a_2 = \frac{3(2)-1}{2} = \frac{5}{2}$  ، جمله‌ی سوم  $a_3 = \frac{3(3)-1}{3} = \frac{8}{3}$

**مثال:** دنباله‌ی  $a_n = \frac{n}{n+1}$  مفروض است. کدام جمله‌ی این دنباله برابر  $\frac{2}{3}$  می‌باشد؟

✓ پاسخ:  $\frac{n}{n+1} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{طرفین} = \text{وسطین}} 3n = 2(n+1) \Rightarrow 3n = 2n+2 \Rightarrow n=2$

بنابراین جمله‌ی دوم (شماره‌ی ۲) برابر  $\frac{2}{3}$  می‌باشد (یعنی  $a_2 = \frac{2}{3}$ ).

**مثال:** به کمک چوب کبریت شکل‌های زیر را ساخته‌ایم. با به دست آوردن یک الگو بگویید در شکل  $n$ ام چند چوب کبریت به کار رفته است.



✓ پاسخ:

همان‌طور که از شکل‌ها مشخص است، در مرحله‌ی اول، ۴ چوب کبریت به کار رفته و در هر مرحله‌ی بعدی تعداد چوب کبریت‌ها ۴ تا نسبت به مرحله‌ی قبلی بیشتر شده است، پس در شکل  $n$ ام، ۴ن چوب کبریت به کار رفته است.

■ **رابطه‌ی بازگشتی:** اگر در دنباله‌ای بین هر جمله و جمله یا جملات قبل از آن، رابطه‌ای برقرار کنیم و جملات دنباله را به کمک آن رابطه بیان نماییم، رابطه‌ی حاصل را رابطه‌ی بازگشتی می‌گوییم.

**تذکر:** در رابطه‌های بازگشتی باید جمله‌ی اول و یا گاهی حتی دو جمله‌ی اول یا بیشتر معلوم باشد.

**مثال:** رابطه‌ی  $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$  با شرط  $a_1 = 1$  و  $a_2 = 2$  مفروض است. جمله‌ی چهارم دنباله را بیابید.

✓ پاسخ:  $a_1 = 1, a_2 = 2 \Rightarrow a_3 = 2a_2 - a_1 = 2(2) - 1 = 3, a_4 = 2a_3 - a_2 = 2(3) - 2 = 4$

۱- جمله‌ی عمومی دنباله‌ای به صورت  $a_n = \frac{n^2-1}{n+3}$  است. کدام جمله‌ی این دنباله برابر ۳ می‌باشد؟

(۴) جمله‌ی سوم

(۳) جمله‌ی هفتم

(۲) جمله‌ی پنجم

(۱) جمله‌ی دوم

۲- اگر جمله  $(3n - 2)$ ام یک دنباله به صورت  $\frac{2\sqrt{n+5}}{n^2+3}$  باشد، جمله هفتم این دنباله کدام است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{13} \quad (4) \quad \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (3) \quad \frac{\sqrt{2}}{3} \quad (2) \quad \frac{\sqrt{8}}{12} \quad (1)$$

۳- جملات دنباله‌ای به صورت  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$  است. جمله عمومی این دنباله کدام می‌تواند باشد؟

$$a_n = \frac{n}{n-1} \quad (4) \quad a_n = \frac{n}{n+1} \quad (3) \quad a_n = \frac{n-1}{n} \quad (2) \quad a_n = \frac{n+1}{n+2} \quad (1)$$

$$1^3 = 1^2$$

$$1^3 + 2^3 = 3^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$$

۴- عدد حاصل از مرحله پنجم الگوی روبه‌رو کدام است؟

$$216 \quad (2) \quad 196 \quad (1)$$

$$256 \quad (4) \quad 225 \quad (3)$$

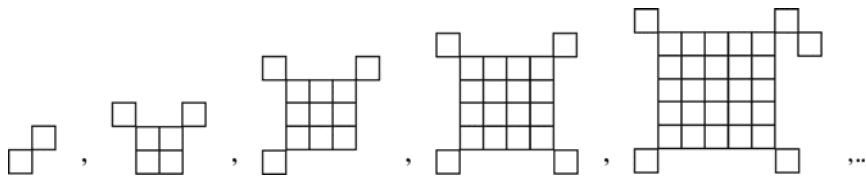
۵- با توجه به شکل‌های مقابل، نسبت دایره‌های توپر به کل دایره‌ها در شکل صدم کدام است؟

$$\frac{100}{201} \quad (2) \quad \frac{100}{101} \quad (1)$$

$$\frac{199}{400} \quad (4) \quad \frac{99}{200} \quad (3)$$



۶- با توجه به الگوی زیر، در شکل پانزدهم چند مربع کوچک وجود دارد؟



$$255 \quad (4) \quad 230 \quad (3) \quad 240 \quad (2) \quad 225 \quad (1)$$

۷- اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر شماره‌ی آن دسته باشد،  $\dots, (7, 9, 11), (3, 5), (1)$ .

سراسری ریاضی فارغ از کشور ۹۱

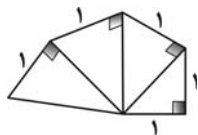
جمله‌ی آخر در دسته‌ی بیستم کدام است؟

$$423 \quad (4) \quad 421 \quad (3) \quad 419 \quad (2) \quad 415 \quad (1)$$

۸- مثلث‌های قائم‌الزاویه، در یک رأس مشترک، اندازه‌ی یک ضلع قائم آن‌ها ۱ واحد، چنان رسم می‌شوند که

یک ضلع قائم مثلث بعدی، وتر مثلث قبلی است. مساحت نهمین مثلث کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (4) \quad \sqrt{2} \quad (3) \quad \frac{5}{4} \quad (2) \quad \frac{3}{4} \quad (1)$$



۹- در دنباله‌ای  $a_1 = 5$  و به ازای  $n \geq 1$ ،  $a_{n+1} = 4a_n$ . جمله  $n$ ام این دنباله کدام است؟

$$3n + 2 \quad (2) \quad n + 4 \quad (1) \quad 5 \times 2^{n-1} \quad (3) \quad 5 \times 2^{2n-1} \quad (4)$$

۱۰- در دنباله‌ی  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ،  $a_7 = 13$ ،  $a_6 = 8$ ، با استفاده از الگوی «مجموع مربعات  $n$  جمله‌ی اول برابر است با حاصل ضرب

مشابه سراسری انسانی ۸۹

جمله‌ی  $n$ ام در جمله‌ی  $(n+1)$ ام، مجموع مربعات یازده جمله‌ی اول آن کدام است؟

$$12618 \quad (2) \quad 12426 \quad (1) \quad 12816 \quad (4) \quad 12636 \quad (3)$$

۱۱- جملات یک دنباله از رابطه‌ی بازگشتی  $a_{n+2} = 2a_{n+1} + xa_n$  به دست می‌آیند. اگر جملات این دنباله به صورت  $205, 14, \dots$  باشند،

جمله‌ی چهارم این دنباله کدام است؟

$$38 \quad (4) \quad 28 \quad (3) \quad 41 \quad (2) \quad 2 \quad (1)$$

۱۲- شخصی، اول هر ماه ۱۰۰۰ تومان می‌گیرد و  $\frac{3}{5}$  کل پول خود را تا آخر ماه خرج می‌کند. اگر پول شخص در پایان ماه  $n$ ام به صورت

مشابه تمرین کتاب درسی

$a_n = ka_{n-1} + l$  باشد،  $k \times l$  کدام است؟

$$180 \quad (4) \quad 360 \quad (3) \quad 240 \quad (2) \quad 160 \quad (1)$$

## درسنامه ۲

**دنباله‌های معروف:** بهتر است الگوی دنباله‌های زیر را به خاطر داشته باشیم:

■ **۱- دنباله‌ی مربعی:** دنباله‌ای است که جملات آن توان دوم اعداد طبیعی هستند و جمله‌ی عمومی آن به صورت  $a_n = n^2$  می‌باشد.



■ **۲- دنباله‌ی مثلثی:** جمله‌ی عمومی این دنباله به شکل  $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$  می‌باشد.

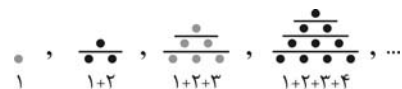
■ **۳- دنباله‌ی ثابت:** دنباله‌ای است که تمام جملات آن با هم برابرند و جمله‌ی عمومی آن به صورت  $a_n = k$  ( $k \in \mathbb{R}$ ) می‌باشد.

**مثال:** دنباله‌ی  $a_n = (-1)^n$  یک دنباله‌ی ثابت است، زیرا:

بنابراین تمام جملات این دنباله برابر ۱ هستند.

**نکته ۱:** جمله‌ی عمومی دنباله‌ی مثلثی ( $a_n$ ) برابر با مجموع اعداد طبیعی ۱ تا  $n$  است.

$$a_1 = 1, a_2 = 3 = 1 + 2, a_3 = 6 = 1 + 2 + 3, a_4 = 10 = 1 + 2 + 3 + 4, \dots, a_n = \frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + \dots + n$$



این موضوع را می‌توان به کمک شکل (آرایه‌ای) نیز نشان داد:

**نکته ۲:** اگر دنباله‌ی مثلثی را با  $\{a_n\}$  و دنباله‌ی مربعی را با  $\{b_n\}$  نمایش دهیم، داریم:

$$\begin{cases} b_1 = a_1 = 1 \\ b_n = a_n + a_{n-1} \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

به کمک شکل نیز می‌توان این موضوع را نشان داد:

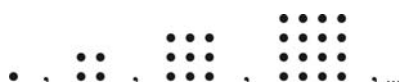


$$b_1 = a_1 = 1, b_2 = 1 + 3 = a_1 + a_2, b_3 = 3 + 6 = a_2 + a_3, b_4 = 6 + 10 = a_3 + a_4, \dots$$

**نتیجه:** مجموع جملات  $n$ ام و  $(n-1)$ ام دنباله‌ی مثلثی برابر  $n^2$  می‌شود.

**تذکر:** نیازی به حفظ کردن نام دنباله‌های مثلثی و مربعی برای دانش‌آموزان سال دوم نیست، بلکه ویژگی‌های این دنباله‌ها دارای اهمیت هستند.

**۱۳- عدد ۲۶ جمله‌ی چندم دنباله‌ی زیر است؟**



(۲) هفتم

(۱) ششم

(۴) نهم

(۳) هشتم

مشابه انسانی فارغ از کشور ۹۲

**۱۴- در یک دنباله‌ی مربعی، هر جمله را از جمله‌ی بعدی آن کم می‌کنیم. جمله‌ی پنجاه و پنجم دنباله‌ی جدید کدام است؟**

(۲) ۱۱۱

(۱) ۱۱۷

(۴) ۱۱۵

(۳) ۱۱۳

**۱۵- در دنباله‌ی زیر، اگر هر جمله بیانگر تعداد دایره‌ها باشد، مجموع دو جمله‌ی ششم و هفتم کدام است؟**

(۲) ۴۹

(۱) ۴۲

(۴) ۶۴

(۳) ۶۳



سراسری انسانی ۸۶

**۱۶- در آرایه‌ی زیر، تفاضل صفرهای توپر در دو جمله‌ی دهم و یازدهم کدام است؟**

(۲) ۱۷

(۱) صفر

(۴) ۲۱

(۳) ۱۹



سراسری انسانی ۸۸

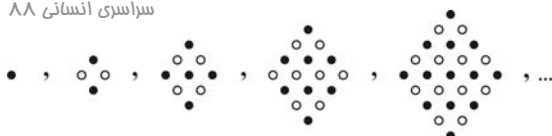
**۱۷- در آرایه‌ی لوزی زیر، تعداد دایره‌های توپر در جمله‌ی یازدهم کدام است؟**

(۲) ۶۲

(۱) ۶۱

(۴) ۶۴

(۳) ۶۳



## دنباله‌ی حسابی

■ **دنباله‌ی حسابی (عددی):** دنباله‌ای است که هر جمله‌ی آن (غیر از جمله‌ی اول)، از افزودن یک مقدار ثابت به جمله‌ی قبل از خود به دست می‌آید. به این مقدار ثابت **قدرنسبت** می‌گوییم و آن را با  $d$  نمایش می‌دهیم. جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی را با  $a_1$  یا  $a$  نشان می‌دهیم. **توجه:** در دنباله‌ی حسابی، قدرنسبت از تفاضل هر جمله از جمله‌ی بعد به دست می‌آید. به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$\begin{aligned} 2, 4, 6, \dots & \quad a_1 = 2, d = 4 - 2 = 6 - 4 = 2 \\ 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \dots & \quad a_1 = 2, d = \frac{7}{3} - 2 = \frac{7-6}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

جملات دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت  $d$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

جمله‌ی اول	جمله‌ی دوم	جمله‌ی سوم	جمله‌ی چهارم	...	جمله‌ی $n$ ام	...
$a_1$	$a_1 + d$	$a_1 + 2d$	$a_1 + 3d$	...	$a_1 + (n-1)d$	...

📌 **سؤال:** دانش‌پژوه (مریم پوری): جمله‌ی  $n$  ام رو چرا به صورت  $a_1 + (n-1)d$  نوشتید؟ مگه  $a_1 + nd$  نمی‌شه؟

**پاسخ:** نه نمی‌شه! دقت کن جمله‌ی اول  $d$  نراره، جمله‌ی دوم یک  $d$  نراره، جمله‌ی سوم  $2d$  نراره و جمله‌ی چهارم هم  $3d$  نراره. بنابراین جمله‌ی  $n$  ام هم  $(n-1)d$  نراره.

در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی عمومی به صورت زیر است که در آن  $a_n$  جمله‌ی  $n$  ام،  $a_1$  جمله‌ی اول،  $n$  تعداد جملات (شماره‌ی جمله) و  $d$  قدرنسبت می‌باشد.

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d : \text{جمله‌ی عمومی}}$$

**مثال:** اگر در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی اول ۷ و قدرنسبت ۳ باشد، جمله‌ی دهم چه قدر است؟

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{10} = a_1 + 9d = 7 + 9(3) = 7 + 27 \Rightarrow a_{10} = 34$$

✓ **پاسخ:**

## نکات و خواص دیگری از دنباله‌ی حسابی

۱- همان‌طور که گفته شد قدرنسبت ( $d$ ) برابر است با تفاضل هر جمله از جمله‌ی بعدی‌اش. یعنی:

$$\boxed{a_{n+1} - a_n = d}$$

۲- در دنباله‌ی حسابی اگر قدرنسبت مثبت باشد ( $d > 0$ )، جملات دنباله با افزایش شماره‌ی جملات به اندازه‌ی ثابتی افزایش می‌یابند و اگر قدرنسبت منفی باشد ( $d < 0$ )، به اندازه‌ی ثابتی کاهش می‌یابند.

## فرم بازگشتی دنباله‌ی حسابی

از آن‌جا که اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی در یک دنباله‌ی حسابی برابر  $d$  می‌باشد، رابطه‌ی بازگشتی یک دنباله‌ی حسابی به صورت زیر می‌باشد که  $k$  عددی حقیقی است.

$$a_1 = k, \quad a_{n+1} - a_n = d$$

۱۸- در یک دنباله‌ی حسابی، بین جملات رابطه‌ی  $2a_1 + 3a_2 - 5a_3 = 8$  برقرار است. حاصل  $5a_1 - 2a_2 - 2a_3$  کدام است؟

آزاد (ریاضی ۹۰ و مشابه آزاد پزشکی ۸۹ و ۹۰)

$$\begin{aligned} (1) & -8 \\ (2) & -\frac{8}{7} \\ (3) & \frac{8}{7} \\ (4) & 8 \end{aligned}$$

۱۹- جمله‌ی پانزدهم دنباله‌ی  $2, 6, 10, \dots$  کدام است؟

$$(1) 52 \quad (2) 54 \quad (3) 56 \quad (4) 58$$

مشابه آزاد پزشکی ۹۰

۲۰- اگر  $110 = 88d + 22a_1$  باشد، جمله‌ی پنجم این دنباله‌ی حسابی کدام است؟

$$(1) 5 \quad (2) 4 \quad (3) 3 \quad (4) 6$$

مشابه آزاد (ریاضی فارغ از کشور ۹۰)

۲۱- در دنباله‌ی حسابی  $204, 208, \dots$  کدام جمله صفر است؟

$$(1) 52 \quad (2) 51 \quad (3) 54 \quad (4) 53$$

۲۲- دنباله‌ی حسابی  $20, 3k, 4k, \dots, 80, 110, 140, \dots$  چند جمله دارد؟

$$(1) k \quad (2) 20 + 3k \quad (3) k + 6 \quad (4) k + 3$$

آزاد ریاضی ۸۴

۲۳- دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول ۶۳ و قدرنسبت (۴-)، چند جمله‌ی مثبت دارد؟

۱۸ (۴)

۱۷ (۳)

۱۶ (۲)

۱۵ (۱)

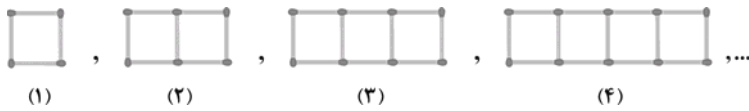
۲۴- در شکل بیست و چهارم الگوی زیر چند چوب کبریت به کار رفته است؟

۶۹ (۱)

۷۳ (۲)

۷۷ (۳)

۸۱ (۴)



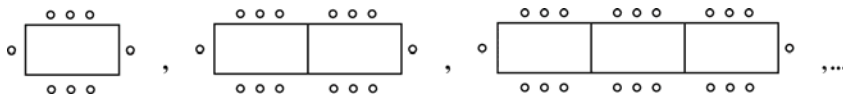
۲۵- الگوی زیر، مدلی از چیدمان میز و صندلی را نشان می‌دهد. تعداد کل میز و صندلی‌ها در مرحله‌ی نهم کدام است؟

۵۷ (۱)

۶۴ (۲)

۵۶ (۳)

۶۵ (۴)



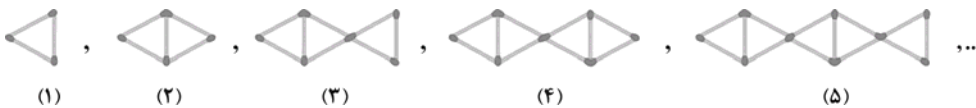
۲۶- شکل چهل و پنجم الگوی زیر از چه تعداد چوب کبریت ساخته شده است؟

۱۳۰ (۱)

۱۲۵ (۲)

۱۳۵ (۳)

۱۱۳ (۴)



۲۷- مجموع  $n$  جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی حسابی را با  $S_n$  نشان می‌دهیم. اگر  $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$  باشد، در این دنباله مجموع جملات با شروع از جمله‌ی هفتم و ختم به جمله‌ی هجدهم، کدام است؟

۱۸ (۴)

$\frac{49}{3}$  (۳)

$\frac{29}{3}$  (۲)

۹ (۱)

۲۸- مقادیر  $K$ ،  $K'$ ،  $\frac{1}{3}$ ،  $\frac{1}{4}$ ، چهار جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی کاهشی هستند. در این صورت:

$$K + K' = \frac{1}{6} \quad (۴)$$

$$K + K' = \frac{1}{4} \quad (۳)$$

$$K + K' = \frac{1}{12} \quad (۲)$$

$$K + K' = 0 \quad (۱)$$

سراسری انسانی ۸۲

۲۹- مجموع دو جمله‌ی  $n$ ام و  $(n-1)$ ام دنباله‌ی حسابی  $10, 8, 6, 4, 2$  کدام است؟

$$4n + 1 \quad (۴)$$

$$4n \quad (۳)$$

$$4n - 1 \quad (۲)$$

$$4n - 2 \quad (۱)$$

آزاد پزشکی ۸۰

۳۰- کدام یک از دنباله‌های زیر، دنباله‌ی حسابی است؟

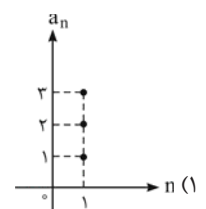
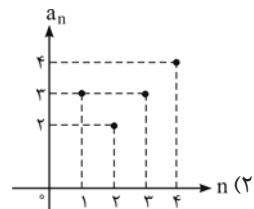
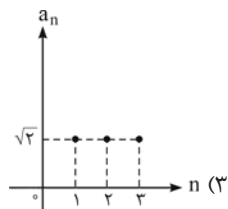
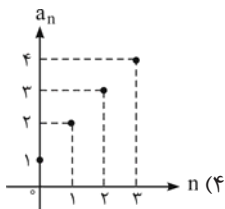
$$a_n = n^3 + n \quad (۴)$$

$$a_n = \frac{1}{n} \quad (۳)$$

$$a_n = n^2 \quad (۲)$$

$$a_n = 8n + 1 \quad (۱)$$

۳۱- کدام نمودار زیر می‌تواند بیان‌گر نمودار یک دنباله‌ی حسابی باشد؟



۳۲- اگر در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی عمومی به صورت  $a_n = \frac{7n+1}{3}$  باشد، قدرنسبت کدام است؟

۵ (۴)

$4/5$  (۳)

۴ (۲)

$3/5$  (۱)

۳۳- در یک دنباله‌ی حسابی  $a_1 = 4$  و  $a_{n-1} = a_n - 3$ ، جمله‌ی  $n$ ام کدام است؟ ( $n > 1$ )

$$4n - 1 \quad (۴)$$

$$2n + 3 \quad (۳)$$

$$3n + 1 \quad (۲)$$

$$n + 5 \quad (۱)$$

۳۴- ۶ میلی‌متر از یک میخ در دیواری فرو رفته است و با هر ضربه‌ی چکش ۴ میلی‌متر آن داخل دیوار می‌شود. دنباله‌ی جمله‌ی عمومی

میزان فرو رفتگی میخ در دیوار (برحسب میلی‌متر) پس از ضربه‌ی  $n$ ام به صورت  $a_n = kn + b$  می‌باشد.  $k - b$  کدام است؟

۲ (۴)

-۲ (۳)

۱۰ (۲)

۶ (۱)

۳۵- قطار سریع السیری به طور آزمایشی، فاصله‌ی دو شهر را بار اول در ۴ ساعت طی کرده است. طبق برنامه‌ی تعیین شده، در هر رفت یا برگشت ۵ دقیقه از مدت زمان نوبت قبل کاسته می‌شود تا مدت زمان این مسافت به ۲ ساعت پیش‌بینی شده برسد. تعداد نوبت‌های آزمایشی کدام است؟

سراسری انسانی ۸۶

۱۶ (۱) ۲۰ (۲) ۲۴ (۳) ۲۵ (۴)

۳۶- علی در یک امتحان ۶۴ از ۱۰۰ گرفت و در هر امتحان بعدی ۷ نمره بیش از امتحان قبلی به دست آورده است. محمد در همان امتحان نمره‌ی ۵۳ گرفت و در هر امتحان بعدی ۹ نمره بیش از امتحان قبلی کسب کرده است. در امتحانات پنجم و ششم به ترتیب کدام یک نمرات بهتری کسب کرده‌اند؟

(۱) علی - علی (۲) علی - محمد (۳) محمد - علی (۴) محمد - محمد

۳۷- بیست جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول  $a_1 = 3$  و قدرنسبت  $d_1 = 2$  و بیست جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول  $b_1 = 2$  و قدرنسبت  $d_2 = 3$  چند جمله‌ی مساوی دارند؟

آزاد ریاضی ۸۴

۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

۳۸- تعداد اعداد سه رقمی که رقم سمت راست آن‌ها ۴ بوده و بر ۴ بخش پذیر هستند، برابر است با:

۴۴ (۱) ۴۵ (۲) ۴۶ (۳) ۴۷ (۴)

۳۹- جمله‌ی هشتم یک دنباله‌ی حسابی غیر ثابت دو برابر جمله‌ی سیزدهم آن است. جمله‌ی دوم آن چند برابر جمله‌ی دهم آن است؟

(۱)  $\frac{1}{5}$  برابر (۲)  $\frac{2}{5}$  برابر (۳) ۳ برابر (۴) ۲ برابر

آزاد ریاضی خوار از کشور ۸۷ و مشابه آزاد انسانی ۹۰

۴۰- در یک دنباله‌ی حسابی  $a_5 + a_6 = 3$  و  $a_8 + a_9 = -2$ . حاصل  $a_{13} + a_{15}$  چه قدر است؟

(۱)  $-\frac{55}{6}$  (۲)  $-\frac{37}{6}$  (۳)  $-\frac{5}{6}$  (۴)  $-\frac{67}{6}$

۴۱- تعداد افراد معرفی شده توسط یک مرکز کارایی جهت کار طی ۴ ماه گذشته تشکیل یک دنباله‌ی حسابی می‌دهند. اگر مجموع تعداد افراد معرفی شده در ماه‌های سوم و چهارم، ۱۰۰ نفر بیشتر از دو ماه اول باشد و کل افراد معرفی شده توسط مرکز در این مدت ۳۹۸ نفر باشند، این مرکز در ماه اول چند نفر را جهت کار معرفی کرده است؟

۲۵ (۱) ۶۲ (۲) ۶۴ (۳) ۷۲ (۴)

#### درسنامه‌ی ۴

#### به دست آوردن قدرنسبت دنباله‌ی حسابی

$$d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$$

اگر  $a_m$  و  $a_n$  دو جمله‌ی دلخواه و مختلف یک دنباله‌ی حسابی باشند، آن‌گاه قدرنسبت از رابطه‌ی مقابل به دست می‌آید:

مثال: اگر در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی سوم ۱۱ و جمله‌ی نهم ۳۵ باشد، قدرنسبت چه قدر است؟

$$d = \frac{a_9 - a_3}{9 - 3} = \frac{35 - 11}{6} \Rightarrow d = \frac{24}{6} = 4$$

پاسخ: ✓

نکته: اگر  $a_m$  و  $a_n$  دو جمله‌ی دلخواه از یک دنباله‌ی حسابی باشند، با طرفین - وسطین کردن فرمول قبلی داریم:

$$a_n - a_m = (n - m)d \quad \text{یا} \quad a_n = a_m + (n - m)d$$

مثال: در یک دنباله‌ی حسابی  $a_8 = 3$  و قدرنسبت  $d = 5$  می‌باشد.  $a_{20}$  را به دست آورید.

$$a_{20} = a_8 + (20 - 8)d \Rightarrow a_{20} = 3 + 12(5) \Rightarrow a_{20} = 3 + 60 = 63$$

پاسخ: ✓

۴۲- در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی اول مساوی  $\frac{1}{3}$  و جمله‌ی دهم آن مساوی ۳۲ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

(۱)  $\frac{7}{2}$  (۲)  $\frac{2}{7}$  (۳)  $\frac{3}{7}$  (۴)  $\frac{7}{3}$

۴۳- در یک دنباله‌ی حسابی  $t_3 - t_1 = 28$ . قدرنسبت این دنباله کدام است؟

(۱) ۴ (۲) -۴ (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $-\frac{1}{4}$

۴۴- در یک دنباله‌ی حسابی  $a_m = 2n$  و  $a_n = 2m$ . مقدار  $d$  (قدرنسبت) کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۱

۴۵- در یک دنباله‌ی حسابی مجموع دو جمله‌ی اول برابر  $\frac{7}{5}$  و مجموع جملات سوم و چهارم برابر  $\frac{5}{5}$  است. قدرنسبت آن کدام است؟

$$-\frac{3}{4} \quad (1) \quad -\frac{1}{2} \quad (2) \quad \frac{1}{2} \quad (3) \quad \frac{3}{4} \quad (4)$$

۴۶- در یک دنباله‌ی حسابی  $a_1 = 3 + \sqrt{2}$  و  $a_7 = 5 + \sqrt{2}$  می‌باشند. مجموع چهار جمله‌ی چهارم چه قدر از مجموع چهار جمله‌ی دوم

آزاد ریاضی ۸۸

بیشتر است؟

$$8 \quad (1) \quad 64 \quad (2) \quad 16 \quad (3) \quad 32 \quad (4)$$

۴۷- در بیست جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی حسابی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می‌باشد. قدرنسبت

مشابه سراسری تجربی خارج از کشور ۸۵

کدام است؟

$$\frac{5}{2} \quad (1) \quad \frac{4}{3} \quad (2) \quad \frac{3}{2} \quad (3) \quad \frac{5}{3} \quad (4)$$

۴۸- اگر  $\{a_n\}$  دنباله‌ای حسابی باشد، آن‌گاه حاصل  $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{39} a_{40}}$  کدام است؟

$$\frac{39}{a_1 a_{40}} \quad (1) \quad \frac{40}{a_1 a_{40}} \quad (2) \quad \frac{78}{a_1 a_{40}} \quad (3) \quad \frac{80}{a_1 a_{40}} \quad (4)$$

۴۹- در یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول ۵، جمله‌ی هفتم از جمله‌ی یازدهم ۱۲ واحد بیشتر است. جمله‌ی دهم کدام است؟

$$-22 \quad (1) \quad -18 \quad (2) \quad 18 \quad (3) \quad 22 \quad (4)$$

سراسری انسانی ۸۰

۵۰- در دنباله‌ی حسابی  $\dots, y, 35, x, 125$ ، عدد  $y$  کدام است؟

$$-10 \quad (1) \quad -5 \quad (2) \quad 5 \quad (3) \quad 0 \quad (4)$$

۵۱- در دنباله‌ی حسابی که جمله‌های اول و پنجم آن به ترتیب ۳ و ۱۹ می‌باشند، جمله‌ی چندم ۵۵ است؟

$$1 \text{ دوازدهم} \quad (1) \quad 2 \text{ سیزدهم} \quad (2)$$

$$3 \text{ چهاردهم} \quad (3) \quad 4 \text{ پانزدهم} \quad (4)$$

۵۲- قدرنسبت یک دنباله‌ی حسابی که در آن جمله‌ی پنجم ۱۲ و جمله‌ی هشتم ۱۸ می‌باشد، چند برابر جمله‌ی یازدهم است؟

$$\frac{1}{12} \quad (1) \quad \frac{1}{12} \quad (2) \quad \frac{1}{24} \quad (3) \quad \frac{1}{24} \quad (4)$$

## درسنامه ۵

### درج $m$ واسطه‌ی حسابی بین دو عدد

اگر بخواهیم بین دو عدد  $a$  و  $b$  تعداد  $m$  عدد را قرار دهیم به‌طوری‌که دنباله‌ی اعداد حاصل تشکیل یک دنباله‌ی حسابی دهند، به این عمل درج  $m$  واسطه‌ی حسابی بین اعداد  $a$  و  $b$  می‌گویند.

$$a, \underbrace{\dots, \dots, \dots, \dots}_{m \text{ واسطه‌ی حسابی}}, b$$

همان‌طور که در دنباله‌ی فوق مشاهده می‌کنید، این دنباله‌ی حسابی  $m+2$  جمله دارد (چرا؟) که جمله‌ی اول آن  $t_1 = a$  و جمله‌ی آخر آن  $t_{m+2} = b$  است. بنابراین قدرنسبت این دنباله‌ی حسابی برابر است با:

$$d = \frac{t_{m+2} - t_1}{(m+2) - 1} \Rightarrow d = \frac{b - a}{m+1}$$

یادآوری می‌شود که در رابطه‌ی اخیر،  $a$  جمله‌ی اول،  $b$  جمله‌ی آخر و  $m$  تعداد واسطه‌های حسابی بین  $a$  و  $b$  است. واضح است که  $m$  عددی طبیعی است اما  $a$  و  $b$  می‌توانند هر عدد حقیقی باشند.

مثال: بین دو عدد ۷ و ۱۹ سه عدد قرار دهید به‌طوری‌که با این دو عدد تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند.

$$7, \dots, \dots, \dots, 19 \Rightarrow d = \frac{b-a}{m+1} = \frac{19-7}{3+1} = \frac{12}{4} \Rightarrow d = 3$$

$\downarrow$   $a$  ۳ واسطه‌ی حسابی ۳  $\downarrow$   $b$

پاسخ:

$$\begin{array}{ccccccc} & +3 & & +3 & & +3 & & +3 \\ \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\ 7 & , & 10 & , & 13 & , & 16 & , & 19 \end{array}$$

حال با استفاده از  $d = 3$  می‌توان جملات بین ۷ و ۱۹ را پیدا کرد:

**سؤال:** دانش‌پژوه (ایمان فراراد): من برای پیدا کردن قدرنسبت گفتم ۵ جمله داریم که جمله‌ی اول  $t_1 = 7$  و جمله‌ی پنجم  $t_5 = 19$  است. بعد با استفاده از فرمول درسنامه‌ی قبل، قدرنسبت رو پیدا کردم:

$$d = \frac{t_5 - t_1}{5 - 1} = \frac{19 - 7}{4} = \frac{12}{4} \Rightarrow d = 3$$

✓ پاسخ: درسته. اینم همونه که ما گفتیم دیگه.

**توجه:** اگر  $m = 1$  باشد، یعنی اگر یک واسطه‌ی حسابی بین  $a$  و  $b$  درج کنیم، به این عدد «واسطه‌ی (میانگین) حسابی  $a$  و  $b$ » می‌گویند. در درسنامه‌ی بعد با خاصیت مهم واسطه‌ی حسابی آشنا خواهید شد.

۵۳- بین دو عدد که تفاضل آن‌ها ۸۴۰ است، پنج عدد درج شده است به‌طوری که هفت جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی را تشکیل داده‌اند. قدرنسبت دنباله چه قدر است؟

$$140 \text{ (۴)}$$

$$160 \text{ (۳)}$$

$$168 \text{ (۲)}$$

$$210 \text{ (۱)}$$

۵۴- بین دو عدد  $5 - \sqrt{3}$  و  $5 + \sqrt{3}$  چند عدد می‌توان قرار داد که اعداد حاصل تشکیل دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت ۱ بدهند؟

$$11 \text{ (۴)}$$

$$10 \text{ (۳)}$$

$$9 \text{ (۲)}$$

$$5 \text{ (۱)}$$

## درسنامه‌ی ۶

### خاصیت دنباله‌ی حسابی

اگر  $x, y, z$  سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، آن‌گاه  $y$  را واسطه‌ی (میانگین) حسابی  $x$  و  $z$  می‌گوییم و داریم:

$$2y = x + z$$

یا

$$y = \frac{x + z}{2}$$

**سؤال:** دانش‌پژوه (مهرناز و غایی آزر): معذرت می‌خواهم! می‌شه دلیل این که  $2y = x + z$  می‌شه رو بگین؟

$$d = y - x = z - y \Rightarrow 2y = x + z \Rightarrow y = \frac{x + z}{2}$$

✓ پاسخ: پرا نمی‌شه! ببین:

**مثال:** اگر  $5, x, 11$  سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند،  $x$  را به دست آورید.

$$5, x, 11 \Rightarrow x = \frac{5 + 11}{2} \Rightarrow x = 8$$

✓ پاسخ:

**نکته:** معمولاً وقتی گفته می‌شود سه عدد تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند، بهتر است اعداد را به‌صورت  $a - d, a, a + d$  در نظر بگیرید.

۵۵- کدام یک از دنباله‌های زیر، دنباله‌ی حسابی است؟

$$1 + \sqrt{3}, 2, 3 - \sqrt{3} \text{ (۴)}$$

$$1 - \sqrt{2}, -2, -1 - \sqrt{2} \text{ (۳)}$$

$$5, -1, \frac{1}{5} \text{ (۲)}$$

$$2, 1, \frac{1}{2} \text{ (۱)}$$

۵۶- بین دو عدد  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$  و  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$  کدام عدد را قرار دهیم تا سه عدد تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند؟

$$a + b \text{ (۴)}$$

$$a - b \text{ (۳)}$$

$$\frac{1}{2}(a + b) \text{ (۲)}$$

$$2(a + b) \text{ (۱)}$$

۵۷- اعداد  $1 - 4p, 3 - 2p, 2p + 3$  سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی هستند. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

سراسری ریاضی ۸۴

$$7 \text{ (۴)}$$

$$6 \text{ (۳)}$$

$$5 \text{ (۲)}$$

$$4 \text{ (۱)}$$

۵۸- مجموع جملات اول و سوم یک دنباله‌ی حسابی ۸ و حاصل ضرب جملات دوم و چهارم ۴۰ است. قدرنسبت دنباله چه قدر است؟

$$5 \text{ (۴)}$$

$$4 \text{ (۳)}$$

$$3 \text{ (۲)}$$

$$2 \text{ (۱)}$$

۵۹- مجموع سه عدد که تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند برابر ۳ و حاصل ضرب مربعات آن‌ها ۱۰۰ است. کوچک‌ترین عدد کدام است؟

آزمون‌های گاج

$$1 - \sqrt{3} \text{ (۴)}$$

$$1 - \sqrt{11} \text{ (۳)}$$

$$-2 \text{ (۲)}$$

$$-\sqrt{11} \text{ (۱)}$$

۶۰- اگر زاویه‌های یک مثلث تشکیل دنباله‌ی حسابی بدهند، یک زاویه‌ی این مثلث همواره برابر است با:

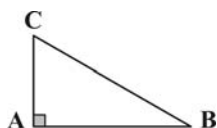
$$75^\circ \text{ (۴)}$$

$$60^\circ \text{ (۳)}$$

$$90^\circ \text{ (۲)}$$

$$30^\circ \text{ (۱)}$$

۶۱- اگر طول اضلاع مثلث مقابل تشکیل دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت  $d$  دهند، نسبت  $\frac{AB}{d}$  برابر است با:



$$5 \text{ (۴)}$$

$$4 \text{ (۳)}$$

$$3 \text{ (۲)}$$

$$2 \text{ (۱)}$$

( $AB$  ضلع متوسط مثلث است.)



۶۲- در یک مثلث قائم‌الزاویه با محیط ۲۴ سانتی‌متر، طول اضلاع تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند. اندازه‌ی وتر این مثلث برابر است با:

مشابه سراسری فنی و مرفه‌ای ۹۱

۸ (۲)

۶ (۱)

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

### درسنامه‌ی ۷

#### جملات متساوی‌الفاصله

اگر بین اندیس‌های چهار جمله‌ی دلخواه از یک دنباله‌ی حسابی رابطه‌ی  $m + n = p + q$  برقرار باشد، اصطلاحاً می‌گوییم این جملات متساوی‌الفاصله هستند و داریم:

$$m + n = p + q \Rightarrow a_m + a_n = a_p + a_q$$

**تذکر:** در این قانون، تعداد اندیس‌ها در دو طرف تساوی باید برابر باشد. مثلاً  $5 + 7 = 12$  ولی  $a_5 + a_7 \neq a_{12}$ . زیرا سمت چپ شامل دو اندیس ۵ و ۷ ولی سمت راست فقط شامل یک اندیس ۱۲ است.

**مثال:** مجموع جملات هفتم و دهم یک دنباله‌ی حسابی ۱۸ می‌باشد. اگر جمله‌ی دوازدهم ۶ باشد، جمله‌ی پنجم را بیابید.

$$7 + 10 = 12 + 5 \Rightarrow \overbrace{a_7 + a_{10}}^{18} = a_{12} + a_5 \Rightarrow 18 = 6 + a_5 \Rightarrow a_5 = 12$$

پاسخ: ✓

با توجه به فرمول بالا، اگر  $a_m, a_p, a_q$  سه جمله‌ی متساوی‌الفاصله از یک دنباله‌ی حسابی باشند ( $p + q = 2m$ )، آنگاه  $a_p + a_q = 2a_m$ ، زیرا:

$$p + q = 2m \Rightarrow p + q = m + m \Rightarrow a_p + a_q = a_m + a_m \Rightarrow a_p + a_q = 2a_m$$

**مثال:** اگر  $10, b, c, d, 10$  پنج جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابی باشند، حاصل  $b + c + d$  چه قدر است؟

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 10 & b & c & d & 10 \end{matrix} \xrightarrow{1+5=2+4=2(3)} a_1 + a_5 = a_2 + a_4 = 2a_3 \Rightarrow 10 + 10 = b + d = 2c$$

پاسخ: ✓

$$\Rightarrow b + d = 12 \text{ و } c = \frac{12}{2} = 6 \Rightarrow b + c + d = 12 + 6 = 18$$

**نتیجه:** در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع تعداد فردی از جملات متساوی‌الفاصله برابر است با حاصل ضرب جمله‌ی وسط در تعداد جملات.

۶۳- اگر در یک دنباله‌ی حسابی  $a_3 + a_4 = 20$  باشد، حاصل  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$  کدام است؟

۸۰ (۴)

۶۰ (۳)

۵۰ (۲)

۴۰ (۱)

۶۴- در یک دنباله‌ی حسابی مجموع جمله‌های هفتم و سیزدهم برابر  $a$  و جمله‌ی نهم برابر  $b$  است. جمله‌ی یازدهم کدام است؟

$$a + \frac{b}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{a}{2} + b \quad (۳)$$

$$a - b \quad (۲)$$

$$a + b \quad (۱)$$

۶۵- در یک دنباله‌ی حسابی مجموع جملات هفتم و بیست و چهارم برابر ۱۰۰ می‌باشد. اگر جمله‌ی بیست و نهم برابر ۱۵۰- باشد، آنگاه مجموع سه جمله‌ی اول این دنباله برابر است با:

۷۵۰ (۴)

۳۰۰۰ (۳)

۱۵۰۰ (۲)

۱۰۰۰ (۱)

۶۶- در یک دنباله‌ی حسابی غیرثابت  $a_n + a_k = a_{n-1}$ . در این دنباله  $\frac{a_1}{d}$  کدام است؟

$$2n - k \quad (۴)$$

$$n - k \quad (۳)$$

$$-k \quad (۲)$$

$$k \quad (۱)$$

۶۷- اگر  $b_n$  جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی باشد، آنگاه به ازای  $1 < k < n$ ، حاصل عبارت  $\frac{1}{2}(b_{n-k} + b_{n+k})$  کدام است؟

$$b_n + 2k \quad (۴)$$

$$b_n - 2k \quad (۳)$$

$$b_k \quad (۲)$$

$$b_n \quad (۱)$$

۶۸- یک فروشنده ۲۳ نوع غذایی را به ترتیب قیمت از کم‌ترین تا بیشترین، در قفسه‌ای چیده است. اگر هر کالا با کالای قبلی  $k$  تومان اختلاف داشته باشد و مجموع قیمت کالاهای نهم و بیست و یکم ۸۳۰ تومان باشد، قیمت کالای پانزدهم چه قدر است؟

۴۱۵ (۴)

۴۵۵ (۳)

۳۹۵ (۲)

۴۳۵ (۱)

۶۹- اگر در یک دنباله‌ی حسابی  $a_n$  جمله‌ی  $n$ ام و  $a_8 + a_7 = 32$  باشد، آنگاه  $a_7 + a_8 + a_9$  کدام است؟

۶۴ (۴)

۵۴ (۳)

۴۸ (۲)

۴۰ (۱)

۷۰- در یک دنباله‌ی حسابی مجموع جملات اول، دوم و سوم ۱۲ و مجموع جملات هفتم و نهم ۳۲ است. قدرنسبت دنباله کدام است؟

$$\frac{3}{2} \text{ (۱)} \quad 2 \text{ (۲)} \quad \frac{2}{3} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{2} \text{ (۴)}$$

۷۱- مجموع سه جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی، چهار برابر مجموع سه جمله‌ی بعدی آن است. جمله‌ی ششم این دنباله کدام است؟

$$\text{صفر (۱)} \quad \frac{1}{2} \text{ (۲)} \quad 1 \text{ (۳)} \quad \frac{3}{2} \text{ (۴)}$$

۷۲- در یک دنباله‌ی حسابی  $a_7 + a_8 + a_{12} = 36$ ، آن‌گاه حاصل  $a_8 + a_{13}$  کدام است؟

$$18 \text{ (۱)} \quad 36 \text{ (۲)} \quad 24 \text{ (۳)} \quad 27 \text{ (۴)}$$

۷۳- تفاضل جمله‌ی دهم از جمله‌ی دوازدهم یک دنباله‌ی حسابی ۵ و مجموع دو جمله‌ی دهم و دوازدهم ۲۵ است. جمله‌ی بیست و یکم این دنباله کدام است؟

$$35 \text{ (۱)} \quad 36 \text{ (۲)} \quad 37 \text{ (۳)} \quad 38 \text{ (۴)}$$

۷۴- در یک دنباله‌ی حسابی  $a_1 = 5$  و  $a_3 = 9$ ، آن‌گاه  $a_7 + a_8 + a_9$  چه قدر است؟

$$19 \text{ (۱)} \quad 38 \text{ (۲)} \quad 57 \text{ (۳)} \quad 76 \text{ (۴)}$$

۷۵- در یک دنباله‌ی حسابی  $a_1 + a_3 + a_8 = 12$  می‌باشد. اگر  $a_7 + a_k = 8$  باشد،  $k$  کدام است؟

$$7 \text{ (۱)} \quad 6 \text{ (۲)} \quad 5 \text{ (۳)} \quad 4 \text{ (۴)}$$

۷۶- واسطه‌ی (میانگین) حسابی بین جملات هشتم و چهاردهم دنباله‌ی حسابی  $120, 8, 4$  کدام است؟

$$16\sqrt{7} \text{ (۱)} \quad 32\sqrt{7} \text{ (۲)} \quad 44 \text{ (۳)} \quad 56 \text{ (۴)}$$

۷۷- جمله‌های پنجم و پانزدهم یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب ۱۹ و ۹۹ می‌باشند. جمله‌ی بیست و پنجم آن کدام است؟

$$179 \text{ (۱)} \quad 189 \text{ (۲)} \quad 169 \text{ (۳)} \quad 159 \text{ (۴)}$$

۷۸- اعداد  $3x+3$ ،  $x+4$  و  $2x-1$  جملات اول، سوم و پنجم از یک دنباله‌ی حسابی هستند. جمله‌ی دوم این دنباله کدام است؟

$$4 \text{ (۱)} \quad 4/5 \text{ (۲)} \quad 5 \text{ (۳)} \quad 6 \text{ (۴)}$$

۷۹- مجموع ۵ جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی ۳۰ است. اگر  $a_7 = 12$  باشد، آن‌گاه:

$$a_8 = 9 \text{ (۱)} \quad a_8 = 8 \text{ (۲)} \quad a_8 = 10 \text{ (۳)} \quad a_8 = 7 \text{ (۴)}$$

۸۰- در دنباله‌ی حسابی  $\{a_n\}$  مجموع  $n$  جمله‌ی اول را با  $S_n$  نشان می‌دهیم. اگر  $S_8 - S_5 = 7$ ، حاصل  $a_6 + a_8 + \dots + a_1$  چه قدر است؟

$$14 \text{ (۱)} \quad \frac{14}{3} \text{ (۲)} \quad 49 \text{ (۳)} \quad \frac{49}{3} \text{ (۴)}$$

آزاد ریاضی ۹۱

## درسنامه‌ی ۸

### انجام عملیات ریاضی روی دنباله‌های حسابی

۱- اگر همه‌ی جملات یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت  $d$  را با یک عدد ثابت جمع یا از یک عدد ثابت تفریق کنیم، دنباله‌ی حاصل مجدداً یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت  $d$  می‌باشد.

۲- اگر همه‌ی جملات یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت  $d$  را در یک عدد ثابت مثل  $k$  ضرب کنیم، دنباله‌ی حاصل مجدداً یک دنباله‌ی حسابی ولی با قدرنسبت  $kd$  است.

۳- اگر همه‌ی جملات یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت  $d$  را به توان یک عدد ثابت برسانیم، دنباله‌ی حاصل می‌تواند دنباله‌ی حسابی باشد یا نباشد.

۴- اگر  $\{a_n\}$  یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت  $d$  باشد و از این دنباله با فاصله‌ی  $k$  تا  $k$  جملاتی را انتخاب کنیم (یعنی اندیس هر جمله‌ی انتخاب شده با اندیس جمله‌ی انتخاب شده‌ی بعدی  $k$  تا فاصله داشته باشد)، آن‌گاه جملات انتخاب شده تشکیل یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت  $kd$  می‌دهند. مثال: از دنباله‌ی حسابی  $6, 11, 16, \dots$  با شروع از جمله‌ی دوم، جملات را ۳ تا ۳ انتخاب می‌کنیم و دنباله‌ی حسابی جدیدی تشکیل می‌دهیم. قدرنسبت دنباله‌ی جدید را بیابید.

پاسخ: قدرنسبت دنباله‌ی اولیه  $11 - 6 = 5$  می‌باشد. بنابراین با توجه به نکته، قدرنسبت دنباله‌ی جدید  $3 \times 5 = 15$  می‌شود.

۵- اگر  $\{a_n\}$  یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت  $d_1$  و  $\{b_n\}$  یک دنباله‌ی حسابی دیگر با قدرنسبت  $d_2$  باشد و  $k_1$  و  $k_2$  دو عدد حقیقی دلخواه باشند، دنباله‌ی  $\{c_n\}$  با جمله‌ی عمومی  $c_n = k_1 a_n \pm k_2 b_n$  نیز یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت  $k_1 d_1 \pm k_2 d_2$  است.

مثال: اگر  $\{a_n\}$  یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت ۵ و  $\{b_n\}$  یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت ۳ باشند، قدرنسبت دنباله‌ی  $\{c_n\}$  با جمله‌ی عمومی  $c_n = 3a_n - 2b_n$  را بیابید.

$$d = 3(5) - 2(3) = 15 - 6 = 9$$

پاسخ: بنابر آن چه گفته شد داریم:

۸۱- تحت کدام یک از اعمال روی یک دنباله‌ی حسابی، دنباله‌ی حاصل ممکن است یک دنباله‌ی حسابی نباشد؟

(۱) جمع جملات دنباله با یک عدد ثابت

(۲) تقسیم جملات دنباله بر عدد ثابت غیرصفر

(۳) ضرب جملات دنباله در یک عدد ثابت

(۴) به توان یک عدد ثابت رساندن جملات دنباله

۸۲- در دنباله‌ی حسابی  $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \dots$  جملات  $a_4, a_8, a_{12}, \dots$  تشکیل دنباله‌ی حسابی دیگری می‌دهند. قدرنسبت این دنباله چه قدر است؟

$$-\frac{1}{4} \quad (1) \quad -1 \quad (2) \quad -4 \quad (3) \quad \frac{1}{4} \quad (4)$$

۸۳- در دنباله‌ی حسابی  $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$  جمله‌ی اول را با  $\frac{1}{3}$ ، جمله‌ی دوم را با  $\frac{1}{4}$  و جمله‌ی سوم را با  $\frac{1}{5}$  جمع می‌کنیم. جمله‌ی شصت و پنجم دنباله‌ی جدید چه قدر است؟

$$\frac{139}{3} \quad (1) \quad 125 \quad (2) \quad 25 \quad (3) \quad 24 \quad (4)$$

۸۴- اگر به قدرنسبت یک دنباله‌ی حسابی ۲ واحد اضافه کنیم، به جمله‌ی پنجم در دنباله‌ی حاصل چند واحد اضافه می‌شود؟

$$10 \quad (4) \quad 8 \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad \text{صفر} \quad (1)$$

۸۵- اگر جملات زوج یک دنباله‌ی حسابی که ۲۰ جمله دارد را حذف کنیم، قدرنسبت دنباله‌ی جدید ۱۲ می‌شود. اگر جمله‌ی چهارم دنباله‌ی جدید ۳۹ باشد، حاصل ضرب جملات اول و بیستم دنباله‌ی اصلی کدام است؟

سراسری فنی و حرفه‌ای ۹۲

$$351 \quad (4) \quad 234 \quad (3) \quad 333 \quad (2) \quad 222 \quad (1)$$

۸۶- جملات دو دنباله‌ی حسابی  $\{bn-1\}$  و  $\{an^2-2n+3\}$  را به ترتیب با هم جمع کرده‌ایم. اگر جمله‌ی هفتم دنباله‌ی جدید ۲ باشد،  $b$  کدام است؟

$$-1 \quad (4) \quad 1 \quad (3) \quad -2 \quad (2) \quad 2 \quad (1)$$

## درسنامه ۹

### دنباله‌ی هندسی

■ **دنباله‌ی هندسی:** دنباله‌ی هندسی، یک دنباله از اعداد است که در آن (از جمله‌ی دوم به بعد) هر جمله از ضرب جمله‌ی قبلی در یک عدد ثابت به دست می‌آید، این عدد ثابت را قدرنسبت می‌گوییم و با  $q$  (یا  $r$ ) نشان می‌دهیم و جمله‌ی اول دنباله را با  $a_1$  یا  $a$  نمایش می‌دهیم.

$$1, 10, 100, \dots \quad a_1 = 1, \quad q = \frac{1}{1} = 1$$

$$2, 4, 8, 16, \dots \quad a_1 = 2, \quad q = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = 2$$

$$3, -6, 12, -24, \dots \quad a_1 = 3, \quad q = \frac{-6}{3} = \frac{12}{-6} = \frac{-24}{12} = -2$$

**نتیجه:** در یک دنباله‌ی هندسی با جملات غیرصفر، قدرنسبت از تقسیم هر جمله بر جمله‌ی قبلی حاصل می‌شود.

اگر جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی را با  $a_1$  و قدرنسبت آن را با  $q$  نمایش دهیم، جملات این دنباله به صورت زیر می‌شود:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{جمله‌ی } n\text{ام} & , & \dots & , & \text{جمله‌ی سوم} & , & \text{جمله‌ی دوم} & , & \text{جمله‌ی اول} \\ a_1 q^{n-1} & , & \dots & , & a_1 q^2 & , & a_1 q & , & a_1 \end{array}$$

■ **جمله‌ی عمومی:** می‌دانیم که جمله‌ی  $n$ ام همان جمله‌ی عمومی است که با  $a_n$  نمایش می‌دهیم، بنابراین در دنباله‌ی هندسی داریم:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

که در آن  $a_n$  جمله‌ی  $n$ ام،  $a_1$  جمله‌ی اول،  $q$  قدرنسبت و  $n$  تعداد جملات می‌باشد.

👉 **سؤال:** دانش‌پژوه (نغمه زعفرانی): آقا چرا توان  $q$  در جمله‌ی عمومی،  $n-1$  است؟ مگه نباید  $n$  باشد؟

👉 **پاسخ:** دقت کن، در جملات نوشته شده جمله‌ی اول  $q$  ندارد و در جمله‌ی دوم  $q$  است. هم‌پنین در جمله‌ی سوم  $q$ ، ۲ است.

بنابراین در دنباله‌ی هندسی همیشه توان  $q$  از شماره‌ی جمله‌ی یک واحد کم‌تره. پس توان  $q$  در جمله‌ی  $n$ ام،  $n-1$  می‌شه.

مثال: در دنباله‌ی هندسی  $۲, ۶, ۱۸, \dots$  جمله‌ی پنجم را به دست آورید.

پاسخ: ✓

$$۲, ۶, ۱۸, \dots \Rightarrow a_1 = 2, \quad q = \frac{6}{2} = 3$$

$$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow a_5 = a_1 q^4 = 2(3)^4 = 2(81) \Rightarrow a_5 = 162$$

نکته: برای سریع‌تر حل کردن تست‌های دنباله‌ی هندسی، بهتر است اعداد توان‌دار زیر را به خاطر داشته باشید:

$$۲^3 = 8, \quad ۲^4 = 16, \quad ۲^5 = 32, \quad ۲^6 = 64, \quad ۲^7 = 128, \quad ۲^8 = 256, \quad ۲^9 = 512, \quad ۲^{10} = 1024$$

$$۳^3 = 27, \quad ۳^4 = 81, \quad ۳^5 = 243, \quad ۳^6 = 729$$

$$۴^3 = 64, \quad ۴^4 = 256, \quad ۵^3 = 125, \quad ۵^4 = 625$$

### فرم بازگشتی دنباله‌ی هندسی

در یک دنباله‌ی هندسی هر جمله‌ی آن (غیر از جمله‌ی اول) با ضرب یک عدد ثابت مثل  $q$  در جمله‌ی قبلی به دست می‌آید که  $q$  قدرنسبت دنباله است. اگر اولین جمله‌ی دنباله‌ی هندسی برابر  $k$  ( $k \in \mathbb{R}$ ) باشد، فرم بازگشتی آن به صورت زیر است:

$$a_1 = k, \quad a_{n+1} = qa_n$$

مثالیه سراسری فنی و مرفه‌ای ۸۸

۸۷- جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی  $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \dots$  کدام است؟

$$a_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (۲)$$

$$a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad (۱)$$

$$a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad (۴)$$

$$a_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (۳)$$

مثالیه سراسری فنی و مرفه‌ای ۹۱

۸۸- در دنباله‌ی هندسی  $۴, ۶, ۹, \dots$  مجموع جملات چهارم و پنجم چه قدر است؟

$$\frac{81}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{135}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{135}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{27}{2} \quad (۱)$$

۸۹- جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی هندسی  $a_n = \frac{2}{3 \times 2^n}$  است. قدرنسبت این دنباله چه قدر است؟

$$\frac{2}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{6} \quad (۱)$$

۹۰- کدام یک از گزینه‌های زیر، بیانگر یک دنباله‌ی هندسی است؟

$$a_n = 8^{n^2} \quad (۴)$$

$$a_n = 5^{2n-2} \quad (۳)$$

$$a_n = n^2 \quad (۲)$$

$$a_n = \frac{1}{n} \quad (۱)$$

۹۱- اگر جمله‌ی عمومی دنباله‌ای هندسی به صورت  $a_n = \sqrt{5} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2n-\sqrt{5}}$  باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{5} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{\sqrt{25}} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \quad (۱)$$

۹۲- قدرنسبت دنباله‌ی  $u_n = \frac{(-25)^n}{5^{2n-1}}$  کدام است؟

$$۱ \quad (۴)$$

$$-۱ \quad (۳)$$

$$۵ \quad (۲)$$

$$-۵ \quad (۱)$$

۹۳- در یک دنباله‌ی هندسی  $a_1 = ۱$  و  $۴a_n - 3a_{n-1} = ۰$ ، جمله‌ی عمومی کدام است؟

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n \quad (۴)$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \quad (۳)$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n \quad (۲)$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \quad (۱)$$

۹۴- کدام یک از گزینه‌های زیر، بیانگر یک دنباله‌ی هندسی کاهشی است؟

$$a_n = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (۲)$$

$$a_n = \frac{1}{2} + (n-1) \left(-\frac{1}{3}\right) \quad (۱)$$

$$a_n = 100 \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \quad (۴)$$

$$a_n = \frac{1}{100} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \quad (۳)$$

۹۵- در یک دنباله‌ی هندسی جمله‌ی اول ۷ و قدرنسبت ۲ می‌باشد. جمله‌ی چندم این دنباله برابر ۲۲۴ است؟

هشتم (۴)

هفتم (۳)

ششم (۲)

پنجم (۱)

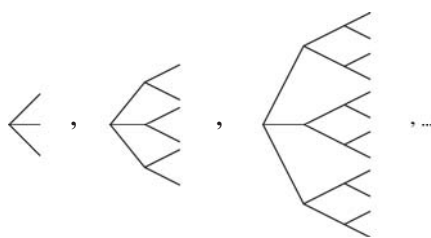
۹۶- در یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول  $a_1 = ۵$  و قدرنسبت  $q = \frac{1}{10}$ ، نخستین جمله‌ای که از  $۰.۰۰۰۳$  کم‌تر باشد، کدام است؟

$$a_8 \quad (۴)$$

$$a_7 \quad (۳)$$

$$a_6 \quad (۲)$$

$$a_5 \quad (۱)$$



۹۷- برای ساختن شکل هفتم الگوی زیر، چند شاخه باید به شکل ششم بیفزاییم؟

(۱) ۱۲۸

(۲) ۹۶

(۳) ۱۹۲

(۴) ۳۸۴

۹۸- در یک دنباله هندسی  $t_7 - t_6 = 6$  و قدرنسبت دنباله،  $\sqrt{3}$  است. جمله اول کدام است؟

(۴)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۳) ۱

(۲)  $\sqrt{3}$

(۱) ۳

۹۹- در یک دنباله هندسی جمله اول برابر ۲ و جمله هشتم، مربع جمله پنجم است. قدرنسبت این دنباله برابر است با: ( $q \neq 0$ )

(۴)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۳)  $\frac{1}{2}$

(۲)  $\sqrt{2}$

(۱) ۲

مشابه آزاد پزشکی ۸۹

۱۰۰- اگر  $a, b, c$  و  $d$  جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن گاه  $ac + bd - 2ad$  برابر است با:

(۴)  $(b+c)^2$

(۳)  $(b-c)^2$

(۲)  $b^2 - c^2$

(۱)  $b^2 + c^2$

۱۰۱- در یک دنباله هندسی مجموع جملات اول و سوم،  $\frac{1}{5}$  برابر مجموع جملات دوم و چهارم است. قدرنسبت دنباله کدام است؟ ( $a, q \neq 0$ )

(۴)  $\frac{3}{2}$

(۳)  $\frac{2}{3}$

(۲)  $\frac{1}{2}$

(۱)  $\frac{1}{3}$

مشابه آزاد پزشکی ۹۱

۱۰۲- در یک دنباله هندسی مجموع جملات اول و دوم  $\frac{9}{4}$  و مجموع جملات چهارم و پنجم ۳۶ می باشد. جمله سوم این دنباله کدام است؟

(۴) ۱۲

(۳) ۹

(۲) ۸

(۱) ۶

سراسری انسانی ۸۸

۱۰۳- در یک دنباله هندسی افزایشی با جملات مثبت، مجموع جمله های اول و سوم، ۴ برابر جمله دوم است. قدرنسبت این دنباله برابر است با:

(۴)  $2 - \sqrt{3}$

(۳)  $2 \pm \sqrt{3}$

(۲)  $2 + \sqrt{3}$

(۱) ۳

۱۰۴- در یک دنباله هندسی افزایشی  $a_7 + a_6 = 60$  و  $a_7 + a_5 = 252$  است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟ سراسری فنی و مرفه ای ۸۹ و مشابه آزاد پزشکی ۹۱

(۴) ۷

(۳) ۵

(۲) ۶

(۱) ۴

۱۰۵- در یک دنباله هندسی با جملات مثبت، هر جمله دنباله (با شرط  $n \geq 3$ ) برابر با مجموع دو جمله قبل از خود می باشد.

قدرنسبت این دنباله کدام است؟

(۴)  $\frac{2}{\sqrt{5}}$

(۳)  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(۲)  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

(۱)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$

۱۰۶- در یک دنباله هندسی  $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 31$  و  $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 = 62$  می باشد. مقدار  $t_3$  کدام است؟

(۴)  $t_3 = 9$

(۳)  $t_3 = 8$

(۲)  $t_3 = 2$

(۱)  $t_3 = 4$

۱۰۷- مدیر یک کارگاه به یک کارگر مبتدی پیشنهاد کرده است، دستمزد روز اول ۱۰۰۰ تومان، و تا پایان هفته هر روز ۲۰ درصد به دستمزد روز قبل وی اضافه کند. دستمزد این کارگر در روز پنجم چه قدر است؟ سراسری انسانی ۸۳

(۴)  $2104/8$

(۳)  $2073/6$

(۲)  $2016/4$

(۱)  $1986/3$

۱۰۸- جمعیت یک روستا ۱۰۰۰ نفر است. اگر جمعیت این روستا هر سال به اندازه  $\frac{1}{10}$  جمعیت سال قبل کاهش یابد، پس از ۳ سال چند نفر در این روستا زندگی می کنند؟

(۴) ۲۷۱

(۳) ۶۰۰

(۲) ۸۱۰

(۱) ۷۲۹

۱۰۹- طول های اضلاع یک مثلث قائم الزاویه که طول کوچک ترین ضلع آن یک واحد می باشد، تشکیل یک دنباله هندسی می دهند.

اندازه وتر این مثلث کدام است؟

(۴)  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

(۳)  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(۲)  $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

(۱)  $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

۱۱۰- در یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۴۸ واحد، وسط های اضلاع را به هم وصل می کنیم تا مثلث متساوی الاضلاع جدیدی حاصل شود و این کار را به طور مداوم انجام می دهیم. محیط مثلث ششم کدام است؟ (مثلث اول، مثلث به ضلع ۴۸ واحد است.)

(۴) ۳ واحد

(۳)  $\frac{3}{4}$  واحد

(۲) ۹ واحد

(۱)  $\frac{9}{4}$  واحد

