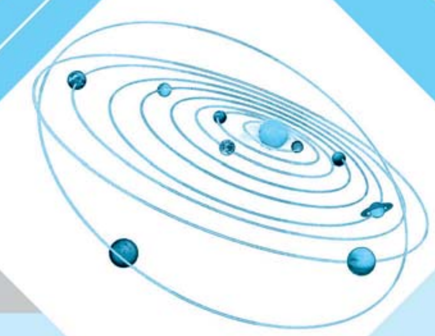
فصل دوم

جلسه دوم



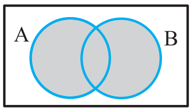
عملیات روی مجموعه‌ها

اجتماع

تعریف: اگر A و B دو مجموعه باشند، مجموعه‌ای را که شامل اعضای هر دو مجموعه A و B است، اجتماع دو مجموعه A و B می‌نامیم.

$\cup$ نماد اجتماع است و اجتماع دو مجموعه A و B را با $A\cup B$ نمایش می‌دهیم.

دقت کنید که هنگام نوشتن اجتماع دو مجموعه، عضوهای مشترک را فقط یک‌بار بنویسید. چون همانطور که قبلاً هم گفتیم در مجموعه‌ها عضو تکراری را می‌توان حذف کرد، بدون آن‌که مجموعه تغییر کند.



اگر نمودار ون دو مجموعه A و B به‌صورت مقابل باشد، قسمت سایه‌خورده نمایشگر $A\cup B$ است:

به عنوان مثال، اگر $A=\{a,b,c,\varnothing\}$ و $B=\{a,b,e\}$ باشد، $A\cup B$ برابر است با:

$$A\cup B=\{a,b,c,\varnothing\}\cup\{a,b,e\}=\{\underline{a},\underline{b},c,\varnothing,\underline{a},\underline{b},e\}=\{a,b,c,\varnothing,e\}$$

عضوهای تکراری را فقط یک‌بار می‌نویسیم.

ویژگی‌های اجتماع مجموعه‌ها

اگر A، B و C سه مجموعه دلخواه باشند، با توجه به تعریف اجتماع دو مجموعه می‌توانیم ویژگی‌های زیر را برای اجتماع مجموعه‌ها بیان کنیم:

۱) $A\cup B=B\cup A$

۲) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

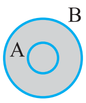
۳) $A\cup\varnothing=A$

۴) $A\cup A=A$

۵) $A\subset A\cup B$ و $B\subset A\cup B$

۶) اگر $A\subset B\Rightarrow A\cup B=B$

برای توضیح ویژگی (۵)، توجه کنید که $A\cup B$ شامل تمام عضوهای مجموعه‌های A و B است، پس هر عضو A (و البته هر عضو B) در اجتماع A و B قرار دارد. یعنی $A\subset A\cup B$ (و هم‌چنین $B\subset A\cup B$). در مورد ویژگی (۶)، اگر $A\subset B$ باشد، آن‌گاه هر عضو A در مجموعه B است، در این صورت مجموعه شامل همه اعضای A و B، همه اعضای B را شامل می‌شود.



به نمودار ون مقابل توجه کنید:

مثال ۱۶: **درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید.**

آ) $\mathbb{N}\cup ۰=\mathbb{W}$ ب) $\mathbb{Z}\cup\mathbb{N}=\mathbb{Z}$ پ) $\mathbb{Z}\cup\mathbb{Q}=\mathbb{R}$ ت) $\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$

پاسخ: آ) نادرست است. عمل اجتماع بین دو مجموعه تعریف می‌شود و چون صفر یک عدد است و نه مجموعه، عبارتی مانند $\mathbb{N}\cup ۰$ بی‌معنا است. این عبارت را می‌توان به صورت $\mathbb{N}\cup\{۰\}=\mathbb{W}$ اصلاح کرد.

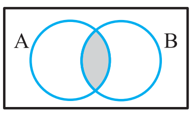
ب) درست است. زیرا همه اعضای $\mathbb{N}$ در مجموعه $\mathbb{Z}$ قرار دارند $(\mathbb{N}\subset\mathbb{Z})$ و بنابراین مجموعه همه عضوهای $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$، همان $\mathbb{Z}$ می‌شود. (ویژگی (۶) اجتماع)

پ) نادرست است. داریم $\mathbb{Z}\cup\mathbb{Q}=\mathbb{Q}$، زیرا $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$ است.

ت) درست است. می‌دانیم که مجموعه اعداد گنگ و مجموعه اعداد گویا، مجموعه اعداد حقیقی را تشکیل می‌دهند.

اشتراک

تعریف: اگر A و B دو مجموعه باشند، مجموعه‌ای را که شامل عضوهای مشترک A و B است، اشتراک A و B می‌نامیم.



اشتراک دو مجموعه A و B را به‌صورت $A\cap B$ نمایش می‌دهیم.

اگر نمودار ون دو مجموعه A و B به‌صورت مقابل باشد، قسمت سایه‌خورده نمایشگر $A\cap B$ است:

به عنوان مثال، اگر $A=\{۱,۲,۳,\varnothing,\{۰\}\}$ و $B=\{۲,۳,\{\varnothing\},۰\}$ باشد، $A\cap B$، یعنی مجموعه‌ای که شامل عضوهای مشترک A و B می‌باشد، عبارت است از:

$$A\cap B=\{۱,۲,۳,\varnothing,\{۰\}\}\cap\{۲,۳,\{\varnothing\},۰\}=\{۲,۳\}$$

ویژگی‌های اشتراک مجموعه‌ها

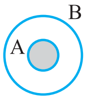
اگر A، B و C سه مجموعه دلخواه باشند، با توجه به تعریف اشتراک دو مجموعه، می‌توانیم ویژگی‌های زیر را برای اشتراک مجموعه‌ها بیان کنیم:

۱) $A \cap B = B \cap A$ ۲) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ۳) $A \cap \varnothing = \varnothing$ ۴) $A \cap A = A$

۵) $A \cap B \subset A$ و $A \cap B \subset B$ ۶) اگر $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$ ۷) $A \cap B \subset A \cup B$

ویژگی‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) واضح هستند و ضمناً در مورد ویژگی (۵)، چون عضوهای $A \cap B$، عضوهای مشترک A و B هستند، پس عضوهای $A \cap B$، عضو A (یعنی $A \cap B \subset A$) و عضو B (یعنی $A \cap B \subset B$) هستند.

در مورد ویژگی (۶)، اگر هر عضو A، در مجموعه B قرار داشته باشد، پس عضوهای مشترک A و B یعنی عضوهای $A \cap B$ هم، همگی در A هستند، یعنی $A \cap B = A$. به نمودار ون مقابل توجه کنید:



در مورد ویژگی (۷)؛ استفاده از نمودار ون درستی رابطه را نشان می‌دهد. (به عهده خودتان)

مثال ۱۷: درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

آ) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$ ب) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Q}$ پ) $\mathbb{Q}' \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}$ ت) $(\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}') \cup \mathbb{Z} = \varnothing$

پاسخ: آ) درست است. می‌دانیم که $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$، پس با توجه به ویژگی (۶)، داریم: $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$

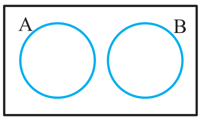
ب) نادرست است. می‌دانیم که $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$، پس با توجه به ویژگی (۶)، داریم: $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

پ) نادرست است. زیرا $\mathbb{Q}' \subset \mathbb{R}$ است، پس $\mathbb{Q}' \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}'$

ت) نادرست است. زیرا: $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \varnothing \Rightarrow (\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}') \cup \mathbb{Z} = \varnothing \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

تعریف: اگر اشتراک دو مجموعه ناتهی، تهی باشد، آن دو مجموعه را **جدا از هم** یا **مجزا** می‌نامیم.

نمودار ون دو مجموعه مجزا به شکل مقابل است:



مثال ۱۸: در کدام‌یک از موارد زیر، مجموعه‌های داده شده جدا از هم هستند؟

آ) مجموعه اعداد زوج طبیعی کم‌تر از ۲۰ که بر ۳ بخش‌پذیرند و مجموعه اعداد طبیعی کم‌تر از ۲۰ که بر ۶ بخش‌پذیر هستند.

ب) مجموعه اعداد فرد طبیعی کم‌تر از ۳۵ که مضرب ۵ هستند و مجموعه اعداد طبیعی کم‌تر از ۳۵ و مضرب ۱۰

پ) مجموعه اعداد اول دو رقمی زوج و مجموعه اعداد اول دو رقمی

ت) مجموعه اعداد زوج طبیعی نابیش‌تر از ۴ و مجموعه مضارب یک رقمی عدد ۴

پاسخ: آ) هر دو مجموعه برابر با $\{6,12,18\}$ می‌باشند و اشتراک آن‌ها خودشان بوده و ناتهی است، پس مجزا نیستند.

ب) این دو مجموعه جدا از هم هستند. $\underbrace{\{5,15,25\}}_{\text{مجموعه اعداد فرد طبیعی کم‌تر از ۳۵ که مضرب ۵ هستند.}} \cap \underbrace{\{10,20,30\}}_{\text{مجموعه اعداد طبیعی کم‌تر از ۳۵ که مضرب ۱۰ هستند.}} = \varnothing \Rightarrow$

پ) می‌دانیم که تنها عدد اول زوج، عدد ۲ است، پس مجموعه اعداد اول دو رقمی زوج، یک مجموعه تهی است. ولی طبق تعریف دو مجموعه جدا از هم، دو مجموعه باید غیرتهی بوده اما اشتراکشان تهی باشد. پس این دو مجموعه مجزا نیستند.

ت) این دو مجموعه مجزا نیستند. $\underbrace{\{2,4\}}_{\text{مجموعه اعداد طبیعی زوج نابیش‌تر از ۴}} \cap \underbrace{\{-8,-4,0,4,8\}}_{\text{مجموعه مضارب یک رقمی عدد ۴}} = \{4\} \neq \varnothing \Rightarrow$

مثال ۱۹: آ) اگر $A \cup B = A$، نشان دهید که $B \subset A$

ب) اگر $A \cap B = A$، نشان دهید که $A \subset B$

پاسخ: آ) اگر $A \cup B = A$، آن‌گاه هر عضو از $A \cup B$ در A قرار دارد. یعنی هر عضو از A یا B در A قرار دارد، پس هر عضو B نیز در A قرار دارد، یعنی $B \subset A$

ب) اگر $A \cap B = A$، آن‌گاه هر عضو از A در $A \cap B$ قرار دارد. یعنی هر عضو از A، هم در A و هم در B قرار دارد، پس هر عضو A در B هم قرار دارد، یعنی $A \subset B$

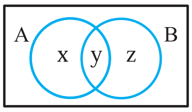
با توجه به مثال قبل و ویژگی‌های اجتماع و اشتراک می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

آ) اگر $A \cup B = A$، آن‌گاه $B \subset A$ و برعکس.

ب) اگر $A \cap B = A$، آن‌گاه $A \subset B$ و برعکس.

حال می‌خواهیم تعداد اعضای مجموعه $A \cup B$ و رابطه آن‌را با تعداد اعضای $A \cap B$ بیابیم.

برای این‌کار نمودار ون مقابل را در نظر بگیرید:



اگر داشته باشیم: $x =$ تعداد اعضایی که فقط در A هستند و در B نیستند.

$z =$ تعداد اعضایی که فقط در B هستند و در A نیستند.

$y =$ تعداد اعضایی که هم در A هستند و هم در B، به عبارت دیگر تعداد اعضای $A \cap B$

با توجه به شکل واضح است که:

تعداد اعضای مجموعه $A = x + y$ (۱) و تعداد اعضای مجموعه $B = y + z$ (۲)

تعداد اعضای $A \cap B = y$ (۳)

$$(\text{تعداد اعضای } A \cup B) = x + y + z = \underbrace{x + y}_{\text{تعداد اعضای } A} + \underbrace{y + z}_{\text{تعداد اعضای } B} - \underbrace{y}_{\text{تعداد اعضای } (A \cap B)}$$

یک y اضافه و کم می‌کنیم.

$$\Rightarrow \boxed{(\text{تعداد اعضای } A \cup B) = (\text{تعداد اعضای } A) + (\text{تعداد اعضای } B) - (\text{تعداد اعضای } A \cap B)} \Rightarrow \boxed{|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|}$$

مثال ۲۰: اگر A و B دو مجموعه باشند که مجموعه B، ۱۳ عضو داشته باشد و $A \cup B$ و $A \cap B$ به ترتیب ۱۷ و ۲ عضو داشته باشند، مجموعه A چند عضو دارد؟

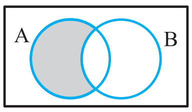
پاسخ: می‌دانیم که:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$\Rightarrow ۱۷ = |A| + \underbrace{۱۳ - ۲}_{۱۱} \Rightarrow \Rightarrow |A| = ۱۷ - ۱۱ = ۶$$

تعریف: اگر A و B دو مجموعه باشند، مجموعه شامل همه اعضای A که در B نیستند، تفاضل B از A نامیده می‌شود و آن را با $A - B$ نشان می‌دهیم.

نمودار ون این رابطه به‌صورت مقابل می‌باشد و قسمت سایه‌خورده نمایش $A - B$ است:



برای نوشتن اعضای مجموعه $A - B$ کافی است اعضای مجموعه A را نوشته و اعضای مجموعه B را از آن حذف کنیم.

مثال ۲۱: اگر $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{c, d, e, f\}$، درستی روابط زیر را تحقیق کنید.

آ) $A - B \neq B - A$ ب) $A - A = \varnothing$ پ) $A - \varnothing = A$ ت) $\varnothing - A = \varnothing$

پاسخ: آ)

$$\begin{cases} A - B = \{a, b, \cancel{c}, \cancel{d}\} - \{c, d, e, f\} = \{a, b\} \\ B - A = \{\cancel{c}, \cancel{d}, e, f\} - \{a, b, c, d\} = \{e, f\} \end{cases} \Rightarrow A - B \neq B - A$$

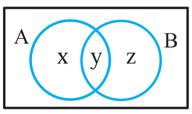
ب) $A - A = \{\cancel{a}, \cancel{b}, \cancel{c}, \cancel{d}\} - \{a, b, c, d\} = \varnothing \Rightarrow A - A = \varnothing$

پ) $A - \varnothing = \{a, b, c, d\} - \{\} = \{a, b, c, d\} = A \Rightarrow A - \varnothing = A$

ت) $\varnothing - A = \{\} - \{a, b, c, d\} = \{\} = \varnothing \Rightarrow \varnothing - A = \varnothing$

هر یک از روابط مثال قبل روابط کلی بودند که در مورد همه مجموعه‌ها برقرار هستند. سعی کنید آن‌ها را به خاطر بسپارید. البته در مورد قسمت (آ)، مجموعه‌های A و B باید ناتهی باشند.

حال رابطه بین تعداد اعضای $A - B$ و $A \cap B$ را می‌یابیم، نمودار ون زیر را در نظر بگیرید.



$x =$ تعداد اعضایی که فقط در A هستند و در B نیستند. $z =$ تعداد اعضایی که فقط در B هستند و در A نیستند.

$y =$ تعداد اعضایی که در $A \cap B$ هستند.

$(\text{تعداد اعضای } A) = x + y$ و تعداد اعضای $A \cap B = y$

$$\Rightarrow (\text{تعداد اعضای } A - B) = x = \underbrace{x + y}_{\text{تعداد اعضای } A} - \underbrace{y}_{\text{تعداد اعضای } (A \cap B)}$$

y را اضافه و کم می‌کنیم.

$$\Rightarrow \boxed{((A - B) \text{ تعداد اعضای}) = (\text{تعداد اعضای } A) - (\text{تعداد اعضای } A \cap B)} \Rightarrow \boxed{|A - B| = |A| - |A \cap B|}$$

مثال ۲۲: در یک کلاس نام فامیل ۱۳ نفر از دانش‌آموزان چهار حرفی است و تعداد افرادی که نام فامیل آن‌ها چهار حرفی است اما نام آن‌ها سه حرفی نیست ۶ نفر می‌باشند. چند نفر از افراد این کلاس نام سه حرفی و نام فامیل چهارحرفی دارند؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ: اگر A مجموعه تمام افرادی باشد که نام فامیل آن‌ها چهار حرفی است و B مجموعه تمام افرادی باشد که نام آن‌ها سه حرفی است، طبق داده‌های مسأله مجموعه A، ۱۳ عضو و مجموعه $(A-B)$، ۶ عضو دارد، پس:

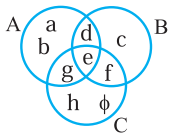
$|A-B|=|A|-|A\cap B| \Rightarrow ۶=۱۳-|A\cap B| \Rightarrow |A\cap B|=۱۳-۶=۷ \Rightarrow$ گزینه (۳) صحیح است.

پرسش‌های جلسه دوم

۶۶ اگر **A** مجموعه اعداد طبیعی یک‌رقمی، **B** مجموعه اعداد اول زوج، **C** مجموعه اعداد اول یک‌رقمی باشد، سه مجموعه را مشخص کرده و سپس مجموعه‌های زیر را با اعضایشان مشخص کنید.

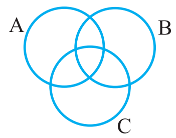
آ) $(A-C)\cup(A-B)$ ب) $(A\cap C)-(A\cup B)$

۶۷ با توجه به شکل، حاصل هر یک از عبارات زیر را بنویسید.

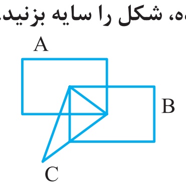


آ) $C-(A\cup B)$ ب) $A\cap B\cap C$ پ) $B-(A\cap C)$

۶۸ در هر قسمت با توجه به عبارت داده شده، شکل را سایه بزنید.



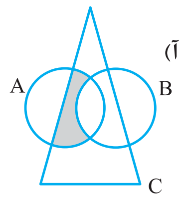
آ) $(A-B)\cap(B\cup C)$



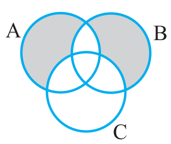
ب) $(A\cup C)-(A\cap B\cap C)$

۶۹ در هر یک از موارد زیر، ناحیه سایه‌خورده بیانگر چه مجموعه‌ای است؟

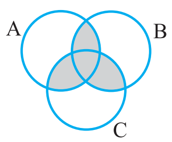
آ)



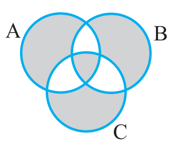
ب)



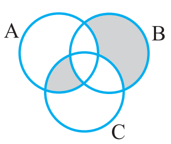
پ)



ت)



ث)



۷۰ اگر $A\cup B=A$، $A\cap C\neq\varnothing$ و $B\cap C=\varnothing$ نمودار ون مربوط به این سه مجموعه را رسم کنید.

۷۱ درستی یا نادرستی هریک از عبارات زیر را مشخص کنید.

آ) اگر $x\in A\cup B$، آن‌گاه $x\in A$ ب) اگر $x\in A\cap B$، آن‌گاه $x\in A$

پ) اگر $x\in A$، آن‌گاه $x\in A\cup B$ ت) اگر $x\in A$، آن‌گاه $x\in A\cap B$

ث) اگر $x\in A\cup B$، آن‌گاه $x\in A\cap B$ ج) اگر $x\in A\cap B$، آن‌گاه $x\in A\cup B$

۷۲ جاهای خالی را به کمک مجموعه‌های $\varnothing$، $\mathbb{N}$، $\mathbb{W}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{Q}'$ و $\mathbb{R}$ پر کنید.

آ) $\mathbb{Z}\cup\mathbb{W}=\square$ ب) $\mathbb{Z}\cap\mathbb{Q}=\square$ پ) $\mathbb{Z}\cap\mathbb{W}=\{۰\}\cup\square$ ت) $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\square$

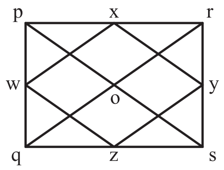
ث) $\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'=\square$ ج) $\mathbb{R}\cup\mathbb{Q}=\square$ چ) $\mathbb{R}\cap\mathbb{Q}=\square$ ح) $\mathbb{Q}-\mathbb{Q}'=\square$

خ) $\mathbb{R}-\mathbb{Q}=\square$

۷۳ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

آ) $\mathbb{W}-(\mathbb{W}-\mathbb{N})$ ب) $[(\mathbb{N}\cup\mathbb{Z})-\mathbb{Q}]\cup[(\mathbb{Q}\cap\mathbb{Z})-\mathbb{N}]$

۷۴ یک نمودار ون مناسب برای مجموعه‌های $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{W}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{Q}'$، $\mathbb{R}$، **P** (مجموعه اعداد اول)، **O** (مجموعه اعداد طبیعی فرد) و **E** (مجموعه اعداد طبیعی زوج) رسم کنید.



۷۵ در شکل روبه‌رو، اگر A مجموعه نقاط درون و روی مثلث opq، مجموعه B نقاط درون و روی مثلث ors و مجموعه C نقاط درون و روی چهارضلعی $xyzw$ باشد؛

آ) مجموعه‌های $A\bigcup B$، $A\bigcap B$، $C-A$، $A-C$، $C-(A\bigcup B)$ و $C-(A\bigcap B)$ را روی شکل مشخص کنید.

ب) درستی یا نادرستی عبارت $C-(A\bigcup B)\subset(C-A)$ را به کمک شکل مشخص کنید.

۷۶ با توجه به اطلاعات زیر، مجموعه S را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

$S\bigcap\{۳,۵,۸,۱۱\}=\{۵,۸\},\ S\bigcup\{۴,۵,۱۱,۱۳\}=\{۴,۵,۷,۱۱,۱۳\},\ \{۸,۱۳\}\subset S,\ S\subset\{۵,۷,۸,۹,۱۱,۱۳\}$

۷۷ کدام‌یک از نتیجه‌گیری‌های زیر، همواره درست است؟ برای موارد نادرست، مثالی با رسم نمودار ون ارائه کنید که نادرست بودن نتیجه را نشان دهد.

آ) $(A\bigcup B)\subset C \Leftarrow B\subset C\ ,\ A\subset C$

ب) $A\subset(B\bigcap C)\Leftarrow A\subset C\ ,\ A\subset B$

پ) $C\subset B\ ,\ C\subset A\Leftarrow C\subset(A\bigcup B)$

ت) $B\subset C\ ,\ A\subset C\Leftarrow(A\bigcap B)\subset C$

ث) $A\bigcap C=\varnothing\Leftarrow B\bigcap C=\varnothing\ ,\ A\bigcap B=\varnothing$

۷۸ آ) اگر $A\bigcup B=A\bigcup C$، آیا می‌توان نتیجه گرفت که $B=C$؟

ب) اگر $A\bigcap B=A\bigcap C$، آیا می‌توان نتیجه گرفت که $B=C$؟

۷۹ آ) اگر $A\subset B$ و $C\subset B$ باشند، نشان دهید که $(A\bigcup C)\subset B$

ب) اگر $A\subset B$ و $A\subset C$ باشند، نشان دهید که $A\subset(B\bigcap C)$

۸۰ از ۱۲۵ دانش‌آموز پایه اول دبیرستان در یک مدرسه، ۴۰ نفر در مسابقات ریاضی، ۳۵ نفر در مسابقات فیزیک و ۷۵ نفر فقط در مسابقات شیمی شرکت کرده‌اند. اگر هر دانش‌آموز حداقل در یک مسابقه شرکت کرده باشد، چند نفر در هر دو مسابقه ریاضی و فیزیک شرکت کرده‌اند؟

۸۱ اگر تعداد آقایان شرکت کننده در یک همایش ۲۰ نفر، تعداد افراد عینکی شرکت کننده ۱۵ نفر و تعداد آقایان غیرعینکی ۱۱ نفر باشد، خانم‌های عینکی شرکت‌کننده چند نفر هستند؟

۸۲ در یک مدرسه، تعداد دانش‌آموزانی که در تیم والیبال یا بسکتبال عضو هستند، سه برابر تعداد دانش‌آموزان عضو تیم والیبال می‌باشد و تعداد اعضای تیم والیبال $\frac{۵}{۱۱}$ تعداد اعضای تیم بسکتبال است و ۲ نفر از دانش‌آموزان عضو هر دو تیم ورزشی هستند. تعداد دانش‌آموزانی که فقط عضو یکی از تیم‌ها هستند، چند نفر است؟

پاسخ پرسش‌های جلسه دوم

۶۶

$A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}\ ,\ B=\{۲\}\ ,\ C=\{۲,۳,۵,۷\}$

آ)

$$\begin{cases}A-C=\{۱,\cancel{۲},\cancel{۳},۴,\cancel{۵},۶,\cancel{۷},۸,۹\}-\{۲,۳,۵,۷\}=\{۱,۴,۶,۸,۹\}\\ A-B=\{۱,\cancel{۲},۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}-\{۲\}=\{۱,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}\end{cases}$$

$\Rightarrow(A-C)\bigcup(A-B)=\{۱,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$

ب)

$A\bigcap C=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}\bigcap\{۲,۳,۵,۷\}=\{۲,۳,۵,۷\}$

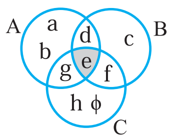
$A\bigcup B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}\bigcup\{۲\}=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$

$\Rightarrow(A\bigcap C)-(A\bigcup B)=\{\cancel{۲},\cancel{۳},\cancel{۵},\cancel{۷}\}-\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}=\varnothing$

۶۷

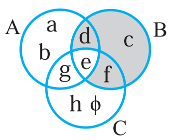
آ) $A\bigcup B=\{a,b,d,e,g,c,f\}\Rightarrow C-(A\bigcup B)=\{\cancel{g},\cancel{e},\cancel{f},h,\varnothing\}-\{a,b,d,e,g,c,f\}=\{h,\varnothing\}$

ب) می‌توانیم از شکل استفاده کرده و با سایه زدن ناحیه مورد نظر، جواب سؤال را بیابیم:



$A\bigcap B\bigcap C=\{e\}$

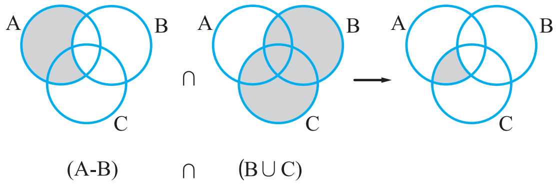
پ)



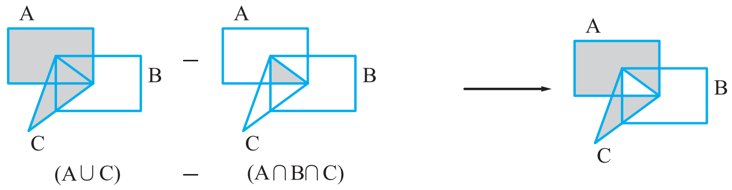
$B-(A\bigcap C)=\{d,c,f\}$

۶۸

آ)



ب)



۶۹

آ) $(A-B)\cap C$ یا $(A\cap C)-(A\cap B)$ یا $(A\cap C)-B$

ب) $(A\cup B)-(A\cap B)-C$ یا $(A-(B\cup C))\cup(B-(A\cup C))$

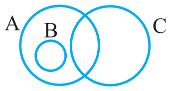
پ) $(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C)$

ت) $[(A\cup B\cup C)-((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))]\cup(A\cap B\cap C)$

ث) $[B-(A\cup C)]\cup[(A\cap C)-B]$

۷۰

داریم $A\cup B=A$، پس $B\subset A$، از طرفی $A\cap C\neq\varnothing$ و $B\cap C=\varnothing$ می‌باشد. بنابراین می‌توان شکل زیر را رسم کرد:



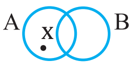
۷۱

آ) نادرست است، اگر $x\in A\cup B$ باشد، آن‌گاه $x\in A$ یا $x\in B$ است.

ب) درست است، وقتی $x\in A\cap B$ است، یعنی $x\in A$ و $x\in B$ است.

پ) درست است. وقتی $x\in A$، داریم: $x\in A\cup B$

ت) نادرست است. زیرا ممکن است x عضوی در A باشد که در B نباشد (مانند شکل روبه‌رو)، پس $x\notin A\cap B$



ث) نادرست است، اگر $x\in A-B$ یا $x\in B-A$ باشد، آن‌گاه $x\in A\cup B$ و $x\notin A\cap B$

ج) درست است. زیرا همواره داریم: $(A\cap B)\subset(A\cup B)$

۷۲

آ) می‌دانیم که $\mathbb{W}\subset\mathbb{Z}$، پس طبق خواص اجتماع داریم: $\mathbb{Z}\cup\mathbb{W}=\boxed{\mathbb{Z}}$

ب) می‌دانیم که $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$، پس طبق خواص اشتراک داریم: $\mathbb{Z}\cap\mathbb{Q}=\boxed{\mathbb{Z}}$

پ) $\mathbb{W}\subset\mathbb{Z}\Rightarrow\mathbb{Z}\cap\mathbb{W}=\mathbb{W}=\{۰\}\cup\boxed{\mathbb{N}}$

ت) دو مجموعه اعداد گنگ و اعداد گویا اشتراک ندارند (مجزا از هم هستند.)، پس: $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\boxed{\varnothing}$

ث) با توجه به مطالب فصل قبل می‌دانیم که: $\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'=\boxed{\mathbb{R}}$

ج) می‌دانیم که $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$، پس: $\mathbb{R}\cup\mathbb{Q}=\boxed{\mathbb{R}}$

چ) داریم $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$، پس: $\mathbb{R}\cap\mathbb{Q}=\boxed{\mathbb{Q}}$

ح) می‌دانیم که $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}'$ دو مجموعه مجزا هستند (یعنی $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\varnothing$)، پس $\mathbb{Q}-\mathbb{Q}'=\boxed{\mathbb{Q}}$، همچنین $\mathbb{Q}'-\mathbb{Q}=\mathbb{Q}'$

خ) می‌دانیم که $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$، پس اگر اعضای مجموعه $\mathbb{Q}$ را از مجموعه $\mathbb{R}$ حذف کنیم، فقط اعضای مجموعه $\mathbb{Q}'$ باقی می‌مانند، یعنی $\mathbb{R}-\mathbb{Q}=\boxed{\mathbb{Q}'}$، به‌همین ترتیب $\mathbb{R}-\mathbb{Q}'=\mathbb{Q}$

۷۳

آ) $\mathbb{W}-\mathbb{N}=\{۰,۱,۲,\cdots\}-\{۱,۲,۳,\cdots\}=\{۰\}\Rightarrow\mathbb{W}-(\mathbb{W}-\mathbb{N})=\{۰,۱,۲,۳,\cdots\}-\{۰\}=\{۱,۲,۳,\cdots\}=\mathbb{N}$

ب) $\mathbb{N}\cup\mathbb{Z}\overset{\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}}{=\!=}\mathbb{Z}\Rightarrow(\mathbb{N}\cup\mathbb{Z})-\mathbb{Q}=\mathbb{Z}-\mathbb{Q}\overset{\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}}{=\!=}\varnothing$

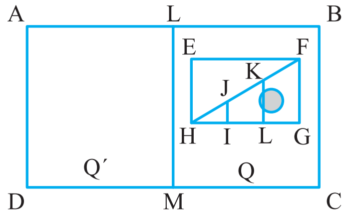
$\mathbb{Q}\cap\mathbb{Z}\overset{\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}}{=\!=}\mathbb{Z}\Rightarrow(\mathbb{Q}\cap\mathbb{Z})-\mathbb{N}=\mathbb{Z}-\mathbb{N}=\{\cdots,-۲,-۱,۰\}$

$\Rightarrow[(\mathbb{N}\cup\mathbb{Z})-\mathbb{Q}]\cup[(\mathbb{Q}\cap\mathbb{Z})-\mathbb{N}]=\varnothing\cup\{\cdots,-۲,-۱,۰\}=\{\cdots,-۲,-۱,۰\}$

۷۴

دقت کنید که $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$ و $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\varnothing$، پس باید دو مجموعه $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}'$ طوری رسم شوند که اولاً اجتماع آن‌ها $\mathbb{R}$ و ثانیاً اشتراکشان تهی باشد. همچنین $O\cap E=\varnothing$ و $O\cup E=\mathbb{N}$ از طرفی داریم: $\mathbb{N}\subset\mathbb{W}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}, O\subset\mathbb{N}\subset\mathbb{W}, E\subset\mathbb{N}\subset\mathbb{W}$

پس:



$\mathbb{N}=$ ذوزنقه FJIG — $\mathbb{R}=$ مستطیل ABCD

(مجموعه اعداد طبیعی زوج) $E=$ ذوزنقه KJIL — $\mathbb{Q}=$ مستطیل LBCM

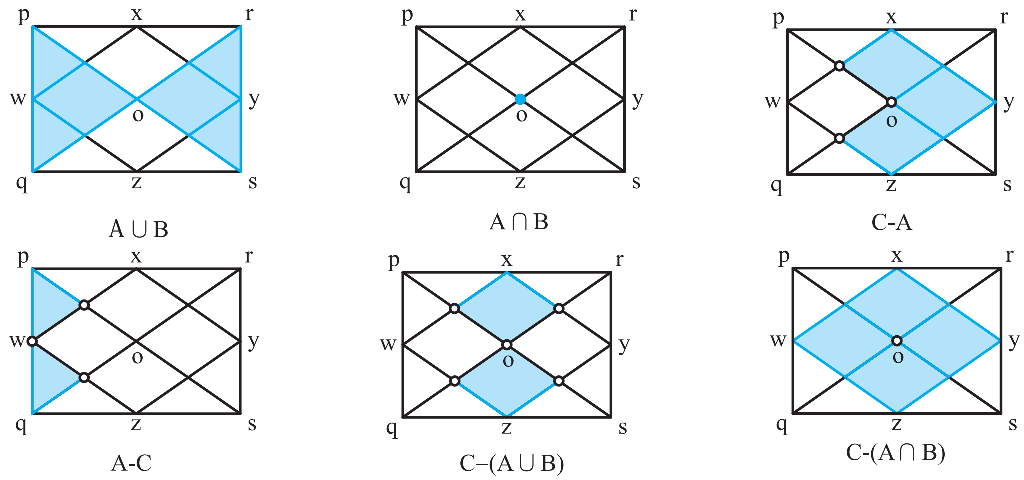
$\mathbb{Q}'=$ مستطیل ALMD

(مجموعه اعداد طبیعی فرد) $O=$ ذوزنقه KLGF — $\mathbb{Z}=$ مستطیل EFGH

(اعداد اول) $P=$ دایره رنگی — $\mathbb{W}=$ مثلث FHG

۷۵

آ)



ب) با توجه به شکل‌های قسمت (آ) واضح است که $C-(A\cup B)\subset(C-A)$

۷۶

داریم: $S\subset\{۵,۷,۸,۹,۱۱,۱۳\}$

پس هر یک از عضوهای S در $A=\{۵,۷,۸,۹,۱۱,۱۳\}$ واقع هستند. حال بررسی می‌کنیم که کدام‌یک از عضوهای مجموعه A در S واقع است:

$$S\cap\{۳,۵,۸,۱۱\}=\{۵,۸\}\Rightarrow\begin{cases}۸\in S,۵\in S\\ ۳\notin S,۱۱\notin S\end{cases}\quad,\quad \{۸,۱۳\}\subset S\Rightarrow ۸\in S,۱۳\in S$$

$$S\cup\{۴,۵,۱۱,۱۳\}=\{۴,۵,۷,۱۱,۱۳\}\Rightarrow ۷\in S$$

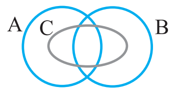
همچنین $۹\notin S$، زیرا اگر $۹\in S$ باشد، باید عدد ۹ در مجموعه $S\cup\{۴,۵,۱۱,۱۳\}=\{۴,۵,۷,۱۱,۱۳\}$ قرار می‌گرفت که چنین نیست. پس مجموعه S به‌صورت مقابل نوشته می‌شود: $S=\{۸,۱۳,۵,۷\}$

۷۷

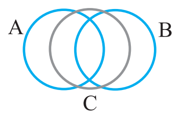
آ) درست است.

ب) درست است.

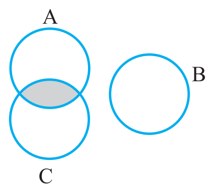
پ) نادرست است.



ت) نادرست است.

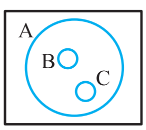


ث) نادرست است.



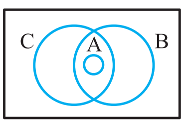
۷۸

آ) در حالت کلی این نتیجه‌گیری درست نمی‌باشد، زیرا مثلاً اگر B و C زیرمجموعه‌هایی متمایز از مجموعه A باشند، یعنی $C\subset A$ و $B\subset A$، آن‌گاه داریم $A\cup B=A$ و $A\cup C=A$، یعنی $A\cup B=A\cup C$ اما $B\neq C$. می‌توانیم برای بهتر نشان دادن مثال نقض‌کننده این نتیجه‌گیری، نمودار ون روبه‌رو را رسم کنیم:



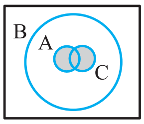
$$\Rightarrow\begin{cases}A\cup B=A\\ A\cup C=A\end{cases}\Rightarrow A\cup B=A\cup C, B\neq C$$

ب) در حالت کلی این نتیجه‌گیری هم نادرست است، زیرا اگر B و C دو مجموعه متمایز شامل مجموعه A باشند، یعنی B و C دو مجموعه متمایز باشند اما $A\subset B$ و $A\subset C$ باشد، آن‌گاه داریم:



$$\Rightarrow\begin{cases}A\subset C\Rightarrow A\cap C=A\\ A\subset B\Rightarrow A\cap B=A\end{cases}\Rightarrow A\cap B=A\cap C\quad,\quad B\neq C$$

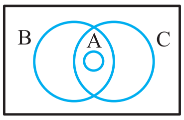
۷۹



آ) داریم $A \subset B$، پس هر عضو از A در مجموعه B قرار دارد. (۱)

و $C \subset B$، پس هر عضو از C در مجموعه B قرار دارد. (۲)

چون $A \cup C$ مجموعه‌ای شامل همه اعضای A و C می‌باشد و طبق (۱) و (۲) می‌دانیم که هر عضو از A یا C در B قرار دارند، پس هر عضو $A \cup C$ هم در B قرار دارد، یعنی $A \cup C \subset B$



ب) داریم $A \subset B$، پس هر عضو از A در مجموعه B قرار دارد.

و چون $A \subset C$، پس هر عضو از A در مجموعه C قرار دارد.

پس می‌توان گفت که هر عضو از A هم در مجموعه B و هم در مجموعه C و لذا در مجموعه $B \cap C$ واقع است، پس $A \subset B \cap C$

۸۰

۷۵ نفر فقط در مسابقه شیمی شرکت کرده‌اند.

پس این افراد در هیچ یک از مسابقات ریاضی و فیزیک شرکت نکرده‌اند.

یعنی $۱۲۵ - ۷۵ = ۵۰$ نفر یا در مسابقه ریاضی یا فیزیک یا هر دو شرکت کرده‌اند.

اگر مجموعه افراد شرکت‌کننده در مسابقات ریاضی، فیزیک و شیمی را به ترتیب R، F و S در نظر بگیریم، داریم:

$|R \cup F| = |R| + |F| - |R \cap F| \Rightarrow ۵۰ = ۴۰ + ۳۵ - |R \cap F| \Rightarrow$ تعداد اعضای $R \cap F = ۴۰ + ۳۵ - ۵۰ = ۲۵$

پس ۲۵ نفر در هر دو مسابقه ریاضی و فیزیک شرکت کرده‌اند.

۸۱

اگر A مجموعه آقایان شرکت‌کننده در همایش و B مجموعه افراد عینکی شرکت‌کننده باشد، طبق داده‌های مسأله تعداد اعضای A، ۲۰ نفر، تعداد اعضای B، ۱۵ نفر و تعداد اعضای $A - B$ (یعنی آقایان غیرعینکی) ۱۱ نفر است، پس داریم:

$|A - B| = |A| - |A \cap B| \Rightarrow ۱۱ = ۲۰ - |A \cap B| \Rightarrow |A \cap B| = ۲۰ - ۱۱ = ۹$ تعداد آقایان عینکی

از طرفی ما تعداد خانم‌های عینکی را می‌خواهیم، یعنی تعداد افراد عینکی که آقا نیستند، یعنی تعداد اعضای مجموعه $B - A$، پس می‌توان نوشت:

$|B - A| = |B| - |A \cap B| \Rightarrow |B - A| = ۱۵ - ۹ = ۶$ تعداد خانم‌های عینکی

۸۲

اگر مجموعه دانش‌آموزان عضو تیم بسکتبال را با B و مجموعه دانش‌آموزان عضو تیم والیبال را با V نمایش دهیم، با توجه به داده‌های مسأله خواهیم داشت:

$$|V \cup B| = ۳|V|,\ |V| = \frac{۵}{۱۱}|B|,\ |V \cap B| = ۲$$

$$\Rightarrow |V \cup B| = ۳|V| = ۳ \times \frac{۵}{۱۱}|B| = \frac{۱۵}{۱۱}|B|$$

از طرفی:

$$|V \cup B| = |V| + |B| - |V \cap B| \Rightarrow \frac{۱۵}{۱۱}|B| = \frac{۵}{۱۱}|B| + |B| - ۲$$

$$\xrightarrow{|B|=x} \frac{۱۵}{۱۱}x = \frac{۵}{۱۱}x + x - ۲ \Rightarrow \frac{۱۵}{۱۱}x - \frac{۵}{۱۱}x - x = -۲ \Rightarrow \frac{-۱}{۱۱}x = -۲ \Rightarrow x = ۲۲$$

$$\Rightarrow |B| = ۲۲ \xrightarrow{|V \cup B| = \frac{۱۵}{۱۱}|B|} |V \cup B| = \frac{۱۵}{۱۱} \times ۲۲ = ۳۰$$

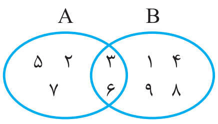
$\Rightarrow$ تعداد افرادی که فقط عضو یک تیم هستند $= |V \cup B| - |V \cap B| = ۳۰ - ۲ = ۲۸$

۲ تست‌های جلســـــه دوم

۱۲۵. اگر $A\cap B=\varnothing$ و $A\cap C=\varnothing$، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری درست است؟ (سراسری انسانی- ۹۲)

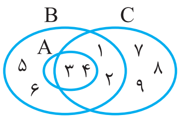
۱) $B\cap C=\varnothing$ ۲) $B\cap C\neq\varnothing$ ۳) $A\cap(B\cup C)=\varnothing$ ۴) $A\cap(B-C)\neq\varnothing$

۱۲۶. با توجه به شکل مقابل، اجتماع دو مجموعه $A-(A-B)$ و $B-(B-A)$ چند عضو دارد؟ (سراسری انسانی- ۸۹)



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۲۷. با توجه به شکل مقابل، مجموعه $(A-B)\cup(C-A)$ چند عضو دارد؟ (سراسری انسانی خارج از کشور- ۸۹)

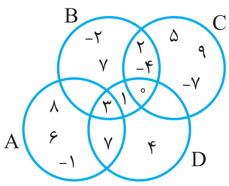


۱) ۳ ۲) ۴
۳) ۵ ۴) ۶

۱۲۸. اگر A زیرمجموعه B باشد، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟ (سراسری فنی‌حرفه‌ای- ۸۸)

۱) $(A\cap B)\cup B=A$ ۲) $(A\cap B)\cup A=B$ ۳) $(A\cap B)\cup A=A$ ۴) $(A\cup B)\cap B=A$

۱۲۹. با توجه به شکل مقابل، کدام گزینه درست است؟ (آزمون‌های گاج)

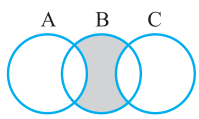


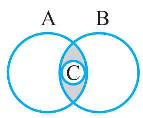
۱) $(A\cap B)\subset(B\cap D)$
۲) $\{۰,۱\}\subset C$
۳) $D-B=\{۴\}$
۴) $C\cap D\in B$

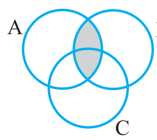
۱۳۰. اگر $A=\{\varnothing,\{۰\},\{\varnothing\}\}$ و $B=\{\varnothing,۰\}$ باشند، مجموعه $B-A$ چند زیرمجموعه دارد؟

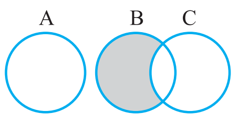
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) صفر

۱۳۱. اگر A، B و C سه مجموعه ناتهی باشند، حاصل مجموعه $(A-C)\cap(B-C)$ در کدام گزینه درست نشان داده شده است؟ (آزمون‌های گاج)

۱)


۲)


۳)


۴)


۱۳۲. اگر A، B و C سه مجموعه باشند، حاصل عبارت $[(B-A)\cap(A\cap C)]\cup[(C-B)\cup B]$ کدام است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) B ۲) $A\cap B$ ۳) $B\cup C$ ۴) C

۱۳۳. اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{-۲,-۱,۱,۲\}$ باشد، چند مجموعه مانند C می‌توان ساخت به‌طوری که $C\subset A$ باشد و $B-C$ تنها شامل دو عضو باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۳۴. چه تعداد از گزاره‌های زیر همواره درست است؟ (آزمون‌های گاج)

آ) $A-(A-B)=A\cap B$
ب) $B-(A\cap B)=B-A$
پ) $A-B=\varnothing\Rightarrow A=\varnothing$
ت) $(A\cup B)-(A\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$
ث) دو مجموعه ناتهی A و $A-B$ مجزا هستند.
ج) دو مجموعه ناتهی A و $B-A$ مجزا هستند.

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۳۵. اگر A، B و C سه مجموعه متمایز ناتهی باشند که A و B و همچنین A و C مجزا هستند، کدام گزینه نادرست است؟

۱) A و $B\cup C$ مجزا هستند.
۲) A و $B\cap C$ مجزا هستند.
۳) A و $B-C$ مجزا هستند.
۴) $B-C$ و $A-B$ مجزا هستند.

۱۳۶. اگر A ، B و C سه مجموعه باشند به‌طوری که $A \subset C$ و $B \subset C$ ، آن‌گاه کدام گزینه همواره درست است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) $(A \cap C) \subset B$ ۲) $A \subset (A \cap B)$

۳) $(A - B) \subset C$ ۴) $B \subset (C - A)$

۱۳۷. اگر A و B دو مجموعه ناتهی و $(B - A) \cup A = A$ باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $B \subset (B - A)$ ۲) $A - B = \varnothing$

۳) $B - A = \varnothing$ ۴) $B - A = B$

۱۳۸. کدام‌یک از روابط زیر نادرست است؟

۱) $A \cap (A \cup B) = A$ ۲) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

۳) $(A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ ۴) $A \cup (A \cap B) = A$

۱۳۹. A ، B و C سه مجموعه دلخواه هستند. اگر $A \subset B$ ، آن‌گاه کدام گزینه همواره درست است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) $(A \cup C) \subset B$ ۲) $(C - B) \subset (C - A)$

۳) $(B \cap C) \subset (A \cap C)$ ۴) $C \subset (B - A)$

۱۴۰. اگر A و B دو مجموعه مجزا باشند، حاصل $C \cup [A \cap (B \cap C)]$ همواره کدام است؟

۱) C ۲) $\varnothing$ ۳) $A \cap C$ ۴) B

۱۴۱. اگر داشته باشیم: $(B \cup C) \subset B \subset (A \cap B)$ ، حاصل $(A \cup B) \cup (A \cap C)$ لزوماً برابر با کدام گزینه است؟

۱) A ۲) $A \cap B$ ۳) $B \cup C$ ۴) C

۱۴۲. اگر $(B - A) \cup (A - B) = \varnothing$ باشد، آن‌گاه لزوماً کدام گزینه صحیح است؟

۱) $B = \varnothing$ یا $A = \varnothing$ ۲) $A \subset B$ ۳) $B \subset A$ ۴) $A = B$

۱۴۳. اگر مجموعه $A - B$ دارای ۳ عضو و مجموعه B دارای ۵ عضو باشد، آن‌گاه کدام گزینه همواره صحیح است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) A دارای ۲ عضو است. ۲) $A - B$ دارای ۵ عضو است. ۳) $A \cup B$ دارای ۷ عضو است. ۴) $A \cap B$ دارای ۲ عضو است.

۱۴۴. اگر مجموعه‌های A ، B و $A \cap B$ به ترتیب دارای ۱۵، ۱۰ و ۷ عضو باشند، آن‌گاه مجموعه $(A - B) \cup (B - A)$ چند عضو دارد؟ (آزمون‌های گاج)

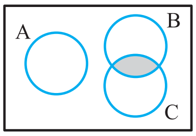
۱) ۲۵ ۲) ۱۴ ۳) ۱۱ ۴) ۳۲

۱۴۵. اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند و مجموعه A دارای x عضو و مجموعه B دارای $x + 3$ عضو و تعداد اعضای $A \cup B$ برابر ۲۷ باشد، مجموعه B چند زیرمجموعه بیش‌تر از مجموعه A دارد؟

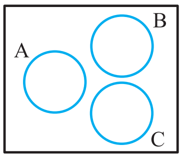
۱) 2^{11} ۲) $2^{12} \times 7$ ۳) $2^{10} \times 7$ ۴) 2^{12}

۲ پاسخ تست‌های جلسه دوم

۱۲۵-(۳) گزینه (۱): با توجه به نمودار ون مقابل، این گزینه نادرست است.



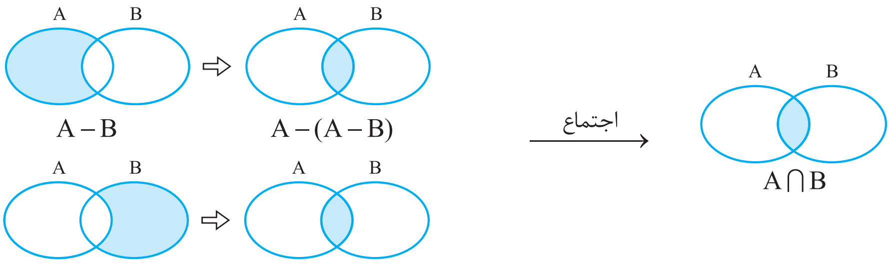
گزینه (۲): نادرست است. زیرا:



گزینه (۴): نادرست است. زیرا می‌دانیم که $(B-C)\subset B$، اگر از طرفین با A اشتراک بگیریم داریم:

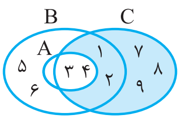
$$A\cap(B-C)\subset \underbrace{A\cap B}_{\text{طبق فرض: }\varnothing} \Rightarrow A\cap(B-C)=\varnothing$$

۱۲۶-(۲) ساده‌ترین روش برای حل این سؤال، این است که ناحیه مورد نظر را در نمودار ون داده شده، رنگ بزنیم:



با توجه به شکل بالا و شکل صورت سؤال، در ناحیه سایه‌زده شده فقط دو عضو قرار دارد.

۱۲۷-(۳) ابتدا در نمودار ون داده شده ناحیه خواسته شده را رنگ می‌زنیم:



توجه کنید که چون $A\subset B$ است، پس $A-B=\varnothing$ می‌باشد.

و با توجه به شکل ۵ عضو در ناحیه سایه‌زده شده قرار دارند.

۱۲۸-(۳) اگر $A\subset B$ باشد، آن‌گاه $A\cap B=A$ و $A\cup B=B$ خواهد بود، پس داریم:

$$\underbrace{(A\cap B)}_{A}\cup B=A\cup B=B\ ,\ \ \underbrace{(A\cap B)}_{A}\cup A=A\cup A=A\ ,\ \ \underbrace{(A\cup B)}_{B}\cap B=B\cap B=B$$

۱۲۹-(۱)

گزینه (۱): $A\cap B=\{۳\}\quad ,\quad B\cap D=\{۰,۱,۳\}\Rightarrow (A\cap B)\subset(B\cap D)$

گزینه (۲): $۱\notin C\Rightarrow \{۰,۱\}\not\subset C$

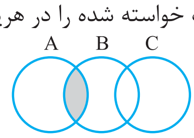
گزینه (۳): $D-B=\{۴,۷\}$

گزینه (۴): $C\cap D=\{۰\}\not\subset B=\{۰,۱,۳,۲,۷,-۴,-۲\}$

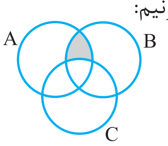
۱۳۰-(۲) $B-A=\{۰\}\Rightarrow$ ۲ زیرمجموعه دارد.

۱۳۱-(۲) حاصل عبارت خواسته شده را در هریک از گزینه‌ها سایه می‌زنیم:

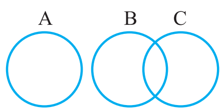
گزینه (۱):



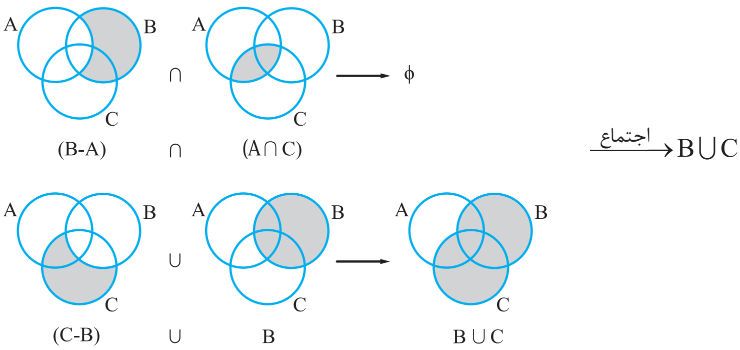
گزینه (۳):



گزینه (۴):

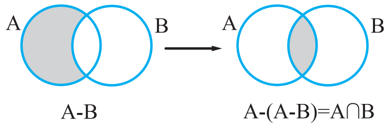


۱۳۲-(۳)

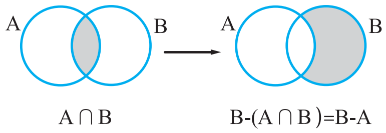


۱۳۳-(۳) $B-C$ فقط شامل دو عضو است، پس چون B چهارعضوی است، دو عضو از B با اعضای C مشترک‌اند، اما اعضای C عضو A نیز هستند، زیرا $C \subset A$، بنابراین این دو عضو با A نیز مشترک‌اند و تنها اعضای مشترک A و B برابر با ۱,۲ می‌باشند، پس می‌بایست C شامل ۱,۲ باشد، یعنی C یکی از مجموعه‌های مقابل است: $C=\{۱,۲\}$ یا $\{۱,۲,۳\}$ یا $\{۱,۲,۴\}$ یا $\{۱,۲,۳,۴\}$

۱۳۴-(۲) آ) درست است. زیرا:

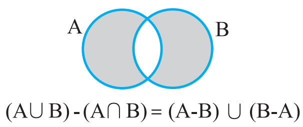


ب) درست است. زیرا:

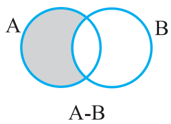


پ) نادرست است. زیرا ممکن است $A=B$ و $A \neq \varnothing$ باشد. در این صورت $A-B=\varnothing$ خواهد بود.

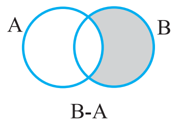
ت) درست است. زیرا:



ث) نادرست است. زیرا با توجه به نمودار داریم: $(A-B)\bigcap A = A-B$ که لزوماً برابر تهی نیست.

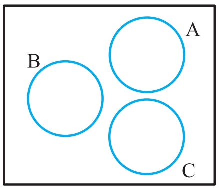


ج) درست است. زیرا A و B ناتهی هستند و طبق نمودار، اشتراک A و $B-A$ تهی است:



۱۳۵-(۲) با توجه به نمودار ون روبه‌رو ممکن است $B\bigcap C=\varnothing$ باشد. در این صورت نمی‌توان گفت که A و $B\bigcap C$ مجزا هستند.

دقت کنید که چون مجموعه‌های A، B و C متمایز و ناتهی فرض شده‌اند، $B-C$، $A-B$ و $B\bigcup C$ ناتهی هستند و مجزا بودن مجموعه‌ها در سایر گزینه‌ها را می‌توانید به کمک نمودار ون بررسی کنید.

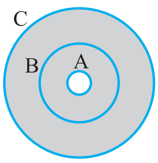


۱۳۶-(۳) گزینه (۱): اما A لزوماً زیرمجموعه B نیست. $A\bigcap C \overset{A\subset C}{=\!=\!=} A \Rightarrow$

گزینه (۲): همواره داریم $(A\bigcap B)\subset A$، اما رابطه $A\subset A\bigcap B$ لزوماً درست نیست.

گزینه (۳): همواره داریم $(A-B)\subset A$ و از طرفی طبق فرض $A\subset C$ است، در نتیجه $A-B\subset C$ می‌باشد.

گزینه (۴): با توجه به شکل روبه‌رو این گزینه هم نادرست است:

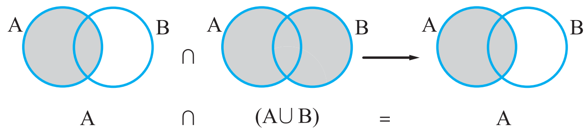


$\Rightarrow B \not\subset (C-A)$

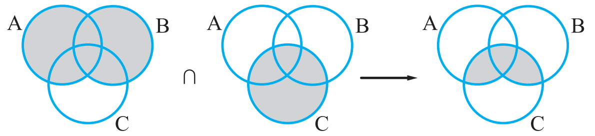
۱۳۷-(۳) می‌دانیم که اگر $X\bigcup Y=Y$، آن‌گاه $X\subset Y$. بنابراین از $(B-A)\bigcup A=A$ نتیجه می‌شود که $(B-A)\subset A \quad (*)$. اما هیچ یک از اعضای $(B-A)$ نمی‌توانند در A باشند و برای آن‌که رابطه $(*)$ درست باشد، باید $B-A=\varnothing$ شود.

۱۳۸-(۳) به کمک نمودار ون می‌توان درستی هریک از گزینه‌ها را بررسی کرد:

گزینه (۱): درست است:

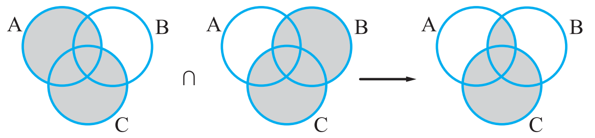


گزینه (۳):



$(A \cup B) \quad \cap \quad C$

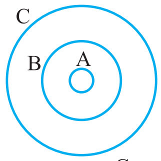
$\Rightarrow$ تساوی نادرست است.



$(A \cup C) \quad \cap \quad (B \cup C)$

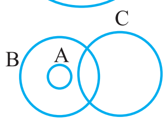
بررسی درستی گزینه‌های (۲) و (۴) به عهده خودتان.

۱۳۹–(۲) گزینه (۱): نادرست است. چون $A \subset B$، پس $A \bigcup B = B$ می‌باشد، اما لزومی ندارد که $(A \bigcup C) \subset B$ باشد. به نمودار زیر دقت کنید:



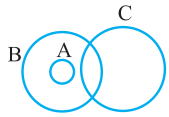
$$A \subset B, (A \bigcup C) = C \not\subset B$$

گزینه (۳): با توجه به نمودار زیر این گزینه هم رد می‌شود:



$$A \bigcap C = \varnothing \quad , \quad (B \bigcap C) \not\subset \underbrace{(A \bigcap C)}_{\varnothing}$$

گزینه (۴):



$$\Rightarrow C \not\subset (B - A)$$

۱۴۰–(۱) A و $B \Rightarrow A \bigcap B = \varnothing$ مجزا هستند.

$$\Rightarrow C \bigcup [A \bigcap (B \bigcap C)] = C \bigcup [(\underbrace{A \bigcap B}_{\varnothing}) \bigcap C] = C \bigcup \varnothing = C$$

۱۴۱–(۱)

$$\begin{cases} (B \bigcup C) \subset B \ , \quad (\text{همواره}) B \subset (B \bigcup C) \Rightarrow B = B \bigcup C \Rightarrow C \subset B \\ B \subset (A \bigcap B) \ , \quad (\text{همواره}) (A \bigcap B) \subset B \Rightarrow A \bigcap B = B \Rightarrow B \subset A \end{cases} \Rightarrow C \subset B \subset A \Rightarrow C \subset A$$

بنابراین:

$$(A \bigcup B) \bigcup (A \bigcap C) \overset{B \subset A, C \subset A}{=\!=\!=} A \bigcup C \overset{C \subset A}{=\!=} A$$

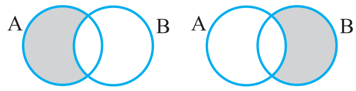
۱۴۲–(۴) **نکته:** اجتماع دو مجموعه زمانی برابر تهی است که هر دو مجموعه تهی باشند. پس:

$$(B - A) \bigcup (A - B) = \varnothing \Rightarrow \begin{cases} B - A = \varnothing \Rightarrow B = \varnothing \ \overset{\text{یا}}{} \ B \subset A \\ A - B = \varnothing \Rightarrow A = \varnothing \ \text{یا} \ A \subset B \end{cases} \Rightarrow A = B$$

۱۴۳–(۴) $|B - A| = |B| - |A \bigcap B| \Rightarrow ۳ = ۵ - |A \bigcap B| \Rightarrow |A \bigcap B| = ۲$

۱۴۴–(۳) $|A - B| = |A| - |A \bigcap B| = ۱۵ - ۷ = ۸ \quad , \quad |B - A| = |B| - |A \bigcap B| = ۱۰ - ۷ = ۳$

از طرفی دو مجموعه $B - A$ و $A - B$ با توجه به نمودار ون زیر جدا از هم هستند (با نمودار ون بررسی کنید.)، پس اشتراک آن‌ها صفر عضوی است. حال داریم:



A-B B-A

$$|(A - B) \bigcup (B - A)| = |A - B| + |B - A| - |(A - B) \bigcap (B - A)| = ۸ + ۳ - ۰ = ۱۱$$

۱۴۵–(۲) چون A و B جدا از هم هستند، پس $A \bigcap B = \varnothing$ یعنی تعداد اعضای $A \bigcap B$ برابر صفر است و داریم:

$$|A \bigcup B| = |A| + |B| - |A \bigcap B| \Rightarrow ۲۷ = x + x + ۳ - ۰ \Rightarrow ۲x = ۲۴ \Rightarrow x = ۱۲$$

پس مجموعه A دارای ۱۲ عضو و مجموعه B دارای $۱۵ = ۳ + ۱۲$ عضو می‌باشند. بنابراین:

$$\begin{cases} A \ \text{تعداد زیرمجموعه‌های} = ۲^{۱۲} \\ B \ \text{تعداد زیرمجموعه‌های} = ۲^{۱۵} \end{cases} \Rightarrow ۲^{۱۵} - ۲^{۱۲} = ۲^{۱۲}(۲^{۳} - ۱) = ۲^{۱۲}(۸ - ۱) = ۲^{۱۲} \times ۷$$

پس مجموعه B، $۲^{۱۲} \times ۷$ زیرمجموعه بیش‌تر از A دارد.