درسنامه ۲

دنباله‌ی حسابی

تعریف دنباله‌ی حسابی: دنباله‌ای است که هر جمله‌ی آن (غیر از جمله‌ی اول) از افزودن یک مقدار ثابت به جمله‌ی قبلی به‌دست می‌آید که به این مقدار ثابت **قدرنسبت** می‌گوییم.

اگر قدرنسبت مثبت باشد، جملات دنباله به اندازه‌ی ثابتی افزایش می‌یابند و اگر قدرنسبت منفی باشد، جملات دنباله به اندازه‌ی ثابتی کاهش می‌یابند.

اگر اولین جمله برابر a و قدرنسبت d باشد، جملات دنباله به شکل زیر خواهند بود:

$$a, a+d, a+۲d, a+۳d, \dots, a+(n-۱)d, \dots \Rightarrow a_n = a+(n-۱)d$$

فرض کنید در یک مغازه، قوطی‌های آب میوه به طریق زیر چیده شده‌اند:

«در بالاترین ردیف ۳ قوطی، زیر آن ۵ قوطی، بعد ۷ قوطی و...» اگر قوطی‌ها در ۱۰ ردیف چیده شده باشند، خواهیم داشت:

شماره‌ی ردیف	۱	۲	۳	۴	۵	...
تعداد قوطی	۳	۵	۷	۹	۱۱	...

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید تعداد قوطی‌های هر ردیف از ردیف قبلی ۲ واحد بیش‌تر است، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$a = ۳ \ , \ a_۲ = ۳+(۱)\times ۲ \ , \ a_۳ = ۳+(۲)\times ۲ \ , \ \dots \ , \ a_n = ۳+(n-۱)\times ۲ \Rightarrow a = ۳, d = ۲$$

نکته *قدرنسبت دنباله‌ی حسابی از تفاضل هر جمله از جمله‌ی بعدی‌اش به‌دست می‌آید:* $\boxed{d = a_{n+۱} - a_n}$

زیرا در یک دنباله‌ی حسابی به صورت $a_۱, a_۲, a_۳, \dots, a_n, \dots$ داریم:

$$a_۲ = a_۱ + d \Rightarrow a_۲ - a_۱ = d \quad , \quad a_۳ = a_۲ + d \Rightarrow a_۳ - a_۲ = d \quad , \dots$$

$$a_n = a_{n-۱} + d \Rightarrow a_n - a_{n-۱} = d \quad , \quad a_{n+۱} = a_n + d \Rightarrow a_{n+۱} - a_n = d \quad , \dots$$

به عبارتی برای آن که دنباله‌ی $a_۱, a_۲, a_۳, \dots, a_n, \dots$ حسابی باشد، باید $a_n - a_{n-۱}$ عدد ثابتی باشد که این مقدار ثابت برابر قدرنسبت دنباله است.

$$\begin{cases} a_n = a_۱ + (n-۱)d \\ a_{n-۱} = a_۱ + (n-۲)d \end{cases} \Rightarrow a_n - a_{n-۱} = a_۱ + (n-۱)d - a_۱ - (n-۲)d = nd - d - nd + ۲d = d$$

مثال ۳

کدام‌یک از دنباله‌های زیر، دنباله‌ی حسابی است؟ قدرنسبت و جمله‌ی عمومی آن‌را به‌دست آورید.

(مشابه تمرین کتاب درسی- سؤال ۱ صفحه‌ی ۹)

الف) $۱, \frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۳}, ۰, \dots$ ب) $۰, \sqrt{۳}, ۲\sqrt{۳}, ۴\sqrt{۳}, \dots$ ج) $-۲۰, -۱۸, -۱۶, -۱۴, \dots$

☑ **پاسخ:**

الف) $\underbrace{۱ \ , \ \frac{۲}{۳}}_{-\frac{۱}{۳}} \ , \ \underbrace{\frac{۲}{۳} \ , \ \frac{۱}{۳}}_{-\frac{۱}{۳}} \ , \ \underbrace{\frac{۱}{۳} \ , \ ۰}_{-\frac{۱}{۳}}, \dots \xrightarrow{\text{دنباله‌ی حسابی است.}} d = -\frac{۱}{۳} \ , \ a_n = ۱ + (n-۱)(-\frac{۱}{۳})$

ب) $۰ \ , \ \sqrt{۳} \ , \ ۲\sqrt{۳} \ , \ ۴\sqrt{۳}, \dots$ (اختلاف‌ها: $+\sqrt{۳}$ ، $+\sqrt{۳}$ ، $+۲\sqrt{۳}$) $\longrightarrow$ نمی‌تواند دنباله‌ی حسابی باشد.

ج) $-۲۰ \ , \ -۱۸ \ , \ -۱۶ \ , \ -۱۴, \dots$ (اختلاف‌ها: $+۲$ ، $+۲$ ، $+۲$) $\xrightarrow{\text{دنباله‌ی حسابی است.}} d = ۲ \ , \ a_n = -۲۰ + (n-۱)(۲)$

درسنامه

مثال ۴

علی ابتدای هر ماه ۷۰۰۰ تومان از پدر خود دریافت می‌کند. او هر روز ۲۰۰ تومان از پولش را خرج و در پایان ماه باقی‌مانده‌ی پولش را پس‌انداز می‌کند. در یک جدول، مقدار پول علی را در پایان روزهای مختلف ماه بنویسید، سپس مشخص کنید، دنباله‌ی به وجود آمده از مقدار پول علی در روزهای مختلف، دنباله‌ی حسابی می‌باشد یا نه؟ الگویی برای این دنباله بنویسید و مشخص کنید او در پایان یک ماه سی روزه چه‌قدر پس‌انداز دارد؟

☑ **پاسخ:** چون علی هر روز ۲۰۰ تومان خرج می‌کند، پس هر روز ۲۰۰ تومان از پس‌انداز او کم می‌شود:

عدد روزهای ماه	۱	۲	۳	۴	۵	...
باقی‌مانده‌ی پول علی در پایان روز	۶۸۰۰	۶۶۰۰	۶۴۰۰	۶۲۰۰	۶۰۰۰	...

همان‌طور که مشخص است این دنباله، یک دنباله‌ی حسابی است، چون در هر مرحله مقدار ثابت ۲۰۰ از جمله‌ی قبلی کم می‌شود، پس یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت (-۲۰۰) می‌باشد. بنابراین:

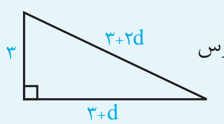
$a_n = a+(n-1)d \Rightarrow a_n = ۶۸۰۰+(n-1)(-۲۰۰)$

$\Rightarrow a_n = ۷۰۰۰-۲۰۰n \Rightarrow$ پس‌انداز علی در پایان ماه $: a_{۳۰} = ۷۰۰۰-۲۰۰(۳۰) = ۱۰۰۰$

مثال ۵

در یک مثلث قائم‌الزاویه اندازه‌ی کوچک‌ترین ضلع برابر ۳ است و اضلاع مثلث تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند. اندازه‌ی دو ضلع دیگر را به‌دست آورید. (مشابه تمرین کتاب درسی- سؤال ۱۰ صفحه‌ی ۱۰)

☑ **پاسخ:** چون سه ضلع مثلث تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند، می‌توانیم اندازه‌ی سه ضلع را به صورت $۳+۲d$ و $۳+d$ و ۳ در نظر بگیریم. پس داریم:



قضیه‌ی فیثاغورس: $۳^۲+(۳+d)^۲ = (۳+۲d)^۲ \Rightarrow \cancel{۹}+۹+۶d+d^۲ = \cancel{۹}+۱۲d+۴d^۲ \Rightarrow ۳d^۲+۶d-۹=۰$

$\Rightarrow d^۲+۲d-۳=۰ \Rightarrow (d+۳)(d-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} d=-۳ & \text{غ ق ق} \\ d=۱ \end{cases}$

اگر $d=-۳$، آن‌گاه اندازه‌ی یک ضلع مثلث صفر و اندازه‌ی یک ضلع دیگر آن منفی می‌شود، پس فقط $d=۱$ قابل قبول بوده و در نتیجه اندازه‌ی اضلاع مثلث ۳، ۴ و ۵ هستند.

مثال ۶

در دنباله‌های حسابی زیر، جمله‌ی عمومی را به‌دست آورید، سپس بگویید از مقایسه‌ی جملات دنباله‌های «ب» تا «هـ» با جملات دنباله‌ی «الف» چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

الف) $۱,۳,۵,۷,...$ **ب)** $۴,۶,۸,۱۰,...$ **ج)** $-۱,۱,۳,۵,...$

د) $۲,۶,۱۰,۱۴,...$ **هـ)** $\frac{۱}{۳},۱,\frac{۵}{۳},\frac{۷}{۳},...$

☑ **پاسخ:** **الف)** $\begin{cases} d=۲ \\ a=۱ \end{cases} \Rightarrow a_n = ۱+(n-1)(۲) \Rightarrow a_n = ۲n-۱$

ب) جملات این دنباله ۳ واحد بیش‌تر از جملات دنباله‌ی «الف» هستند: $\begin{cases} d=۲ \\ a=۴ \end{cases} \Rightarrow a_n = ۴+(n-1)(۲) \Rightarrow a_n = ۲n+۲$

ج) جملات این دنباله ۲ واحد کم‌تر از جملات دنباله‌ی «الف» هستند: $\begin{cases} d=۲ \\ a=-۱ \end{cases} \Rightarrow a_n = -۱+(n-1)(۲) \Rightarrow a_n = ۲n-۳$

د) جملات این دنباله ۲ برابر جملات دنباله‌ی «الف» هستند: $\begin{cases} d=۴ \\ a=۲ \end{cases} \Rightarrow a_n = ۲+(n-1)(۴) \Rightarrow a_n = ۴n-۲$

هـ) جملات این دنباله ثلث جملات دنباله‌ی «الف» هستند: $\begin{cases} d=\frac{۲}{۳} \\ a=\frac{۱}{۳} \end{cases} \Rightarrow a_n = \frac{۱}{۳}+(n-1)(\frac{۲}{۳}) \Rightarrow a_n = \frac{۲}{۳}n-\frac{۱}{۳}$

نتیجه‌ی به دست آمده در زیر بیان شده است.

درسنامه

نتیجه اگر همه‌ی جملات دنباله‌ی حسابی را با عددی جمع (یا از آن کم) کنیم، در دنباله‌ی حاصل، قدرنسبت تغییر نمی‌کند، ولی اگر جملات را در عددی ضرب (یا بر آن تقسیم) کنیم، قدرنسبت دنباله‌ی حاصل هم در آن عدد ضرب (یا برآن تقسیم) می‌شود، **فقط یادمان باشد** در همه‌ی حالت‌های فوق دنباله‌ی جدید نیز یک دنباله‌ی حسابی خواهد بود. به طور مثال اگر همه‌ی جملات یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت d را در عددی مانند k ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$a_۱,a_۲,a_۳,...,a_n,... \xrightarrow{\times k} ka_۱,ka_۲,...,ka_n,... \Rightarrow ka_n - ka_{n-۱} = k(a_n - a_{n-۱}) = kd$$

پس دنباله‌ی حاصل، یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت kd است.

تذکر اگر همه‌ی جملات یک دنباله‌ی حسابی را به توان یک عدد ثابت برسانیم، دنباله‌ی حاصل می‌تواند دنباله‌ی حسابی باشد یا نباشد.

دو نکته‌ی مهم در دنباله‌ی حسابی

نکته ۱ *اگر سه عدد a، b و c تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند، در این صورت به عدد b واسطه‌ی حسابی (میانگین حسابی) دو عدد a و c می‌گوییم و داریم:*

$$\underbrace{a,b,c}_{\text{دنباله‌ی حسابی}} \Rightarrow ۲b = a+c \Rightarrow \boxed{b = \frac{a+c}{۲}}$$

زیرا اگر d قدرنسبت این دنباله‌ی حسابی باشد، داریم:

$$\begin{cases} b = a+d \\ b = c-d \end{cases} \Rightarrow ۲b = a+c \Rightarrow b = \frac{a+c}{۲}$$

نمونه‌ی ۱: $\frac{۴}{۳}, ①, \frac{۲}{۳}, ... \Rightarrow ۲(۱) = \frac{۴}{۳} + \frac{۲}{۳}$

نمونه‌ی ۲: $۲, ۴, ⑥, ۸, ۱۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲(۶) = ۴+۸ \\ ۲(۶) = ۲+۱۰ \end{cases}$

نکته ۲ *اگر در یک دنباله‌ی حسابی مقدار دو جمله‌ی متمایز، مثلاً جملات a_m و a_k را داشته باشیم، در این صورت قدرنسبت دنباله از رابطه‌ی $d = \frac{a_m - a_k}{m-k}$ به‌دست می‌آید.*

$$\begin{cases} a_k = a+(k-۱)d \\ a_m = a+(m-۱)d \end{cases} \Rightarrow a_m - a_k = \cancel{a} - \cancel{a} + (m-۱)d - (k-۱)d \Rightarrow a_m - a_k = d(m-۱-(k-۱))$$

$$\Rightarrow a_m - a_k = (m-k)d \Rightarrow \boxed{d = \frac{a_m - a_k}{m-k}}$$

مثال ۷

در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی پنجم برابر ۱۳ و قدرنسبت برابر ۴ است. جمله‌ی هشتم این دنباله را به‌دست آورید.

☑ **پاسخ:** با استفاده از نکته‌ی (۲) در بالا داریم:

$$a_m - a_k = (m-k)d \Rightarrow a_۸ - a_۵ = (۸-۵)\times ۴ \xrightarrow{a_۵=۱۳} a_۸ = ۱۲+۱۳ = ۲۵$$

۱۳- جمله‌ی عمومی سه دنباله داده شده است. کدام‌یک دنباله‌ی حسابی است؟ قدرنسبت آن را تعیین کنید.

الف) $a_n = ۲+n^۲$ ب) $a_n = ۳+\frac{n}{۲}$ ج) $a_n = \frac{۱}{n+۲}$

۱۴- یک میله‌ی آهنی در دمای صفر درجه، طولی برابر ۱ متر دارد. به ازای هر درجه که دمای آن بالا برود ۰/۰۰۰۰۱۲ متر به طول آن اضافه می‌شود. دنباله‌ای بنویسید که طول میله را به‌ازای n درجه افزایش دما نشان دهد. آیا این دنباله حسابی است؟

۱۵- جمله‌ی هفدهم دنباله‌ی حسابی $-۹,...,۶۸,۷۵,...$ را به‌دست آورید.

۱۶- دنباله‌ی حسابی $۳,۷,۱۱,۱۵,...$ را در نظر بگیرید:

الف) جمله‌ی بیست و سوم این دنباله را به‌دست آورید.

ب) جمله‌ی $(۲n-۱)$اُم این دنباله را به‌دست آورید.

ج) واسطه‌ی حسابی بین جملات هشتادویکم و نودوپنجم این دنباله را به‌دست آورید.

د) عدد ۵۱۱ چندمین جمله‌ی این دنباله است؟

۱۷- در دنباله‌ی حسابی $a_1, a_2, a_3, \cdots$، حاصل $\frac{a_{20}-a_6}{a_{12}-a_8}$ را به‌دست آورید. $(d \neq 0)$

۱۸- جمله‌ی هفدهم یک دنباله‌ی حسابی برابر ۶۰ و جمله‌ی بیست و سوم آن ۸۴ است. در این دنباله، حاصل $a_{40}-a_{22}$ را به‌دست آورید.
(مشابه تمرین کتاب درسی- سؤال ۶ صفحه‌ی ۹)

۱۹- در یک دنباله‌ی حسابی $a_1 = 2-\sqrt{3}$ و $a_2 = 6-\sqrt{3}$ می‌باشند. مجموع سه جمله‌ی پنجم چه‌قدر از مجموع سه جمله‌ی سوم بیش‌تر است؟

۲۰- بین دو عدد ۷ و ۳۲ چهار عدد درج می‌کنیم تا اعداد حاصل یک دنباله‌ی حسابی تشکیل دهند. قدرنسبت این دنباله چه عددی خواهد بود؟ $(d > 0)$

۲۱- اگر به قدرنسبت یک دنباله‌ی حسابی ۳ واحد اضافه کنیم، به جمله‌ی بیستم آن چند واحد اضافه می‌شود؟

۲۲- اگر اعداد $-2, a, 8, b, \ldots$ جملات متوالی از یک دنباله‌ی حسابی باشند، مقدار a و b را به‌دست آورید.

۲۳- واسطه‌ی حسابی بین دو عدد $1+\sqrt{3}$ و $\frac{2}{1-\sqrt{3}}$ را به‌دست آورید.

۲۴- اگر اعداد $3a+3$، $2a-4$ و $2a+1$ به ترتیب جملات اول، پنجم و نهم از یک دنباله‌ی حسابی باشند، مقدار a را به‌دست آورید.

۲۵- در یک دنباله‌ی حسابی مجموع جملات هفتم و یازدهم برابر ۳۰ می‌باشد؛
الف) جمله‌ی نهم را به‌دست آورید. ب) مجموع جملات چهارم و چهاردهم را به‌دست آورید.

۲۶- در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی هفتم، ۴ برابر جمله‌ی دوم است و مجموع جملات اول و سوم برابر ۱۰ می‌باشد. چند جمله‌ی اول این دنباله را مشخص کنید.

۲۷- مجموع سه جمله‌ی دوم یک دنباله‌ی حسابی، دو برابر مجموع سه جمله‌ی چهارم آن است. جمله‌ی هفدهم این دنباله را به‌دست آورید.

۲۸- اگر مجموع سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی برابر ۲۴ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۴۴۰ باشد، این دنباله را با شروع از این سه جمله مشخص کنید. مسأله چند جواب دارد؟

۲۹- مجموع ۷ جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی ۴۲ است. اگر $a_{10} = 18$ باشد، جمله‌ی هفتم دنباله را به‌دست آورید.

۳۰- دنباله‌ی حسابی $5, 12, 19, \ldots, 7k+12$ چند جمله دارد؟

۳۱- در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی اول ۱۵۸۱ و جمله‌ی سوم ۱۳۸۱ است. این دنباله چند جمله‌ی مثبت دارد؟

۳۲- چند عدد مضرب ۳ بین اعداد ۳۷ تا ۹۵ وجود دارد؟

۳۳- چند عدد ۳ رقمی وجود دارد که رقم یکانش برابر ۷ باشد؟

۳۴- ثابت کنید اگر a_1، b_1 و c_1 و نیز a_2، b_2 و c_2 سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، آن‌گاه اعداد a_1-a_2، b_1-b_2 و c_1-c_2 هم سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ای حسابی هستند.

۳۵- اگر زاویه‌های یک پنج ضلعی محدب تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند، آن‌گاه مجموع کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین زاویه‌ی آن را به‌دست آورید.
(مشابه تمرین کتاب درسی- سؤال ۹ صفحه‌ی ۱۰)

۳۶- در یک مثلث قائم‌الزاویه، اضلاع تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند. اگر محیط این مثلث ۲۴ باشد، اندازه‌ی اضلاع مثلث را به‌دست آورید.
(مشابه تمرین کتاب درسی- سؤال ۱۰ صفحه‌ی ۱۰)

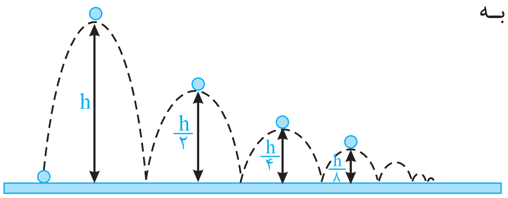
درسنامه ۳

دنباله‌ی هندسی

تعریف دنباله‌ی هندسی: دنباله‌ای است که هر جمله‌ی آن (غیر از جمله‌ی اول) از ضرب یک عدد ثابت در جمله‌ی قبلی به‌دست می‌آید. به این عدد ثابت **قدرنسبت** می‌گوییم.

اگر جمله‌ی اول a و قدرنسبت q باشد، جملات دنباله به‌صورت مقابل خواهند بود: $a, aq, aq^{۲}, aq^{۳}, \dots, aq^{n-۱}, \dots \Rightarrow a_n = aq^{n-۱}$

فرض کنید توپی را تا ارتفاع h به هوا پرتاب می‌کنیم. این توپ در بازگشت به پایین، هر بار که به زمین می‌خورد، نصف ارتفاع قبلی به بالا برمی‌گردد.



شماره‌ی مرحله	اول	دوم	سوم	چهارم	...
ارتفاع توپ	h	$\frac{h}{۲}$	$\frac{h}{۴}$	$\frac{h}{۸}$	...

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، ارتفاع هر مرحله، نصف ارتفاع مرحله‌ی قبل است، یعنی ارتفاع هر مرحله از ضرب شدن ارتفاع قبلی در عدد $\frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آید:

مرحله‌ی اول: $n = ۱ \Rightarrow$ ارتفاع $= h = \frac{h}{۲^{۰}}$

مرحله‌ی دوم: $n = ۲ \Rightarrow$ ارتفاع $= \frac{h}{۲} = \frac{h}{۲^{۱}}$

مرحله‌ی سوم: $n = ۳ \Rightarrow$ ارتفاع $= \frac{h}{۴} = \frac{h}{۲^{۲}}$

مرحله‌ی چهارم: $n = ۴ \Rightarrow$ ارتفاع $= \frac{h}{۸} = \frac{h}{۲^{۳}}$

$\Rightarrow$ ارتفاع در مرحله‌ی nاُم: $a_n = \frac{h}{۲^{n-۱}} = h(\frac{۱}{۲})^{n-۱} \Rightarrow a = h \ , \ q = \frac{۱}{۲}$

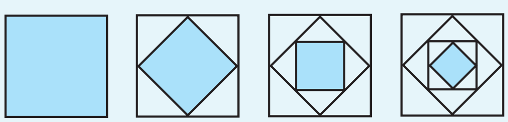
نکته قدرنسبت دنباله‌ی هندسی از تقسیم هر جمله بر جمله‌ی قبلی‌اش به‌دست می‌آید. $q = \frac{a_{n+۱}}{a_n}$

زیرا در دنباله‌ی هندسی $\dots, a_n, \dots, a_۲, a_۱$ با قدرنسبت q داریم:

$$a_۲ = a_۱q \Rightarrow q = \frac{a_۲}{a_۱} \ , \ a_۳ = a_۲q \Rightarrow q = \frac{a_۳}{a_۲} \ , \dots , \ a_n = a_{n-۱}q \Rightarrow q = \frac{a_n}{a_{n-۱}} \ , \ a_{n+۱} = a_nq \Rightarrow q = \frac{a_{n+۱}}{a_n}$$

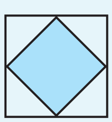
مثال ۸

وسط‌های اضلاع یک مربع با طول ضلع واحد را متوالیاً به هم وصل می‌کنیم (مطابق شکل زیر). در این حالت مربع‌های جدیدی به‌وجود می‌آیند.

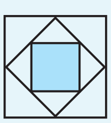


مساحت مربع‌های رنگ شده در هر مرحله را در یک جدول یادداشت کنید، سپس جمله‌ی عمومی دنباله‌ی ایجاد شده و قدرنسبت آن را به‌دست آورید.

☑ پاسخ:



اندازه‌ی هر ضلع مربع رنگ شده $= \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow$ مساحت مربع رنگ شده $= (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۲} = \frac{۱}{۲}$



اندازه‌ی هر ضلع مربع رنگ شده $= \frac{۱}{۲} \Rightarrow$ مساحت مربع رنگ شده $= (\frac{۱}{۲})^{۲} = \frac{۱}{۴}$

شماره‌ی مرحله	۱	۲	۳	۴	...
مساحت مربع رنگ شده	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$	...

مشخص است که هر بار، مساحت قسمت رنگی نصف می‌شود (در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌شود)، پس داریم:

دنباله‌ی مساحت مربع‌های رنگ شده: $۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۸}, \dots \to \frac{۱}{۲^{۰}}, \frac{۱}{۲^{۱}}, \frac{۱}{۲^{۲}}, \dots \Rightarrow a_n = \frac{۱}{۲^{n-۱}} = (\frac{۱}{۲})^{n-۱} \Rightarrow q = \frac{۱}{۲}$

درسنامه

نکته ۱ در یک دنباله‌ی هندسی اگر $a_1 > 0$ و $q > 1$ یا $a_1 < 0$ و $0 < q < 1$ باشد، آن‌گاه جملات دنباله افزایش می‌یابند.

نکته ۲ در یک دنباله‌ی هندسی اگر $a_1 < 0$ و $q > 1$ یا $a_1 > 0$ و $0 < q < 1$ باشد، آن‌گاه جملات دنباله کاهش می‌یابند.

نکته ۳ در یک دنباله‌ی هندسی اگر $q < 0$ و $a_1 \neq 0$ باشد، آن‌گاه جملات دنباله یک در میان، مثبت و منفی می‌شوند و بنابراین نه کاهش می‌یابند و نه افزایش.

مثال ۹

کدام‌یک از دنباله‌های زیر، دنباله‌ی هندسی است؟ قدرنسبت و جمله‌ی عمومی آن‌را به‌دست آورید. سپس مشخص کنید جملات دنباله کاهش می‌یابند یا افزایش یا هیچ‌کدام. (مشابه تمرین کتاب درسی- سؤال ۲ صفحه‌ی ۱۱)

الف) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots$ ب) $3, -6, 12, -24, \ldots$ ج) $\frac{2}{3}, \frac{8}{15}, \frac{32}{75}, \ldots$ د) $0/02, 0/002, 0/0002, \ldots$

☑ پاسخ:

الف) $1 \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \xrightarrow{\times\frac{2}{3}} \frac{1}{6}, \ldots \longrightarrow$ نمی‌تواند دنباله‌ی هندسی باشد.

ب) $3 \xrightarrow{\times(-2)} -6 \xrightarrow{\times(-2)} 12 \xrightarrow{\times(-2)} -24, \ldots \xrightarrow{\text{دنباله‌ی هندسی است.}} q = -2 \ , \ a_n = 3(-2)^{n-1}$

چون $a_1 \neq 0$ و $q < 0$، پس جملات دنباله نه افزایش می‌یابند و نه کاهش.

ج) $\frac{2}{3} \xrightarrow{\times\frac{4}{5}} \frac{8}{15} \xrightarrow{\times\frac{4}{5}} \frac{32}{75}, \ldots \xrightarrow{\text{دنباله‌ی هندسی است.}} q = \frac{4}{5} \ , \ a_n = \frac{2}{3}(\frac{4}{5})^{n-1}$

چون $a_1 > 0$ و $0 < q < 1$، پس جملات دنباله کاهش می‌یابند.

د) $\frac{2}{100} \xrightarrow{\times\frac{1}{10}} \frac{2}{1000} \xrightarrow{\times\frac{1}{10}} \frac{2}{10000}, \ldots \xrightarrow{\text{دنباله‌ی هندسی است.}} q = \frac{1}{10} \ , \ a_n = \frac{2}{100}(\frac{1}{10})^{n-1}$

چون $a_1 > 0$ و $0 < q < 1$، پس جملات دنباله کاهش می‌یابند.

مثال ۱۰

در یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول ۳- ، هر جمله‌ی دنباله دو برابر جمله‌ی قبلی است.

الف) جمله‌ی عمومی دنباله را بنویسید. **ب) جمله‌ی دهم را به‌دست آورید.**

☑ پاسخ: الف) $\begin{cases} q = 2 \\ a = -3 \end{cases} \Rightarrow a_n = aq^{n-1} = (-3)(2)^{n-1} = -3 \times 2^{n-1}$

ب) $a_{10} = aq^{10-1} \Rightarrow a_{10} = a \times q^9 = (-3)(2)^9 = -1536$

مثال ۱۱

دنباله‌ی هندسی $1, 3, 9, 27, \ldots$ را در نظر بگیرید:

الف) اگر به هر جمله دو واحد اضافه کنیم، آیا دنباله‌ی جدید، یک دنباله‌ی هندسی است؟

ب) اگر از هر جمله یک واحد کم کنیم، آیا دنباله‌ی جدید هندسی است؟

ج) اگر جمله‌ها را دو برابر کنیم، آیا دنباله‌ی جدید هندسی است؟

د) اگر جمله‌ها را تقسیم بر ۳ کنیم، آیا دنباله‌ی جدید هندسی است؟

هـ) اگر جمله‌ها را به توان ۲ برسانیم، آیا دنباله‌ی جدید هندسی است؟

☑ پاسخ: الف) جمله‌های جدید: $3, 5, 11, 29, \ldots \Rightarrow \frac{5}{3} \neq \frac{11}{5} \Rightarrow$ دنباله‌ی هندسی نیست.

ب) جمله‌های جدید: $0, 2, 8, 26, \ldots \Rightarrow \frac{8}{2} \neq \frac{26}{8} \Rightarrow$ دنباله‌ی هندسی نیست.

درسنامه

ج) q تغییر نکرده است. ⇐ دنباله‌ی هندسی است. $\xrightarrow{q=۳}$ ۲,۶,۱۸,۵۴,... : جمله‌های جدید

د) q تغییر نکرده است. ⇐ دنباله‌ی هندسی است. $\xrightarrow{q=۳}$ $\frac{۱}{۳}$,۱,۳,۹,... : جمله‌های جدید

هـ) q به توان ۲ رسیده است. ⇐ دنباله‌ی هندسی است. $\xrightarrow{q=۹}$ ۱,۹,۸۱,۷۲۹,... : جمله‌های جدید

نتیجه۱ اگر همه‌ی جملات یک دنباله‌ی هندسی را در عددی ضرب (یا بر آن تقسیم) کنیم، دنباله‌ی حاصل، یک دنباله‌ی هندسی خواهد بود و قدرنسبت آن تغییری نمی‌کند. زیرا داریم:

دنباله‌ی حاصل یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت q است.

$$\underbrace{a_۱,a_۲}_{\times q},...,a_n,... \xrightarrow{\text{ضرب در عدد } b} a_۱b,a_۲b,...,a_nb,... \Rightarrow \frac{a_۲b}{a_۱b}=\frac{a_۲}{a_۱}=q \Rightarrow$$

نتیجه۲ اگر همه‌ی جملات را به توان عدد ثابت k برسانیم، قدرنسبت دنباله‌ی حاصل نیز به توان k خواهد رسید و دنباله‌ی حاصل هم هندسی خواهد بود. زیرا داریم:

دنباله‌ی حاصل یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت q^k است.

$$\underbrace{a_۱,a_۲}_{\times q},...,a_n,... \xrightarrow{\text{به توان } k} a_۱^k,a_۲^k,...,a_n^k,... \Rightarrow \frac{a_۲^k}{a_۱^k}=(\frac{a_۲}{a_۱})^k=q^k \Rightarrow$$

نکته *اگر همه‌ی جملات یک دنباله با هم برابر باشند، یعنی دنباله به صورت $a,a,a,...,a,...$ باشد، آن‌گاه این دنباله هم حسابی است و هم هندسی. چنین دنباله‌ای یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت $d=۰$ و یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت $q=۱$ می‌باشد.*

$$d=a_n-a_{n-۱}=a-a=۰ \quad , \quad q=\frac{a_n}{a_{n-۱}}=\frac{a}{a}=۱$$

دو نکته‌ی مهم در دنباله‌ی هندسی

نکته۱ *اگر سه عدد a، b و c سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی باشند، در این صورت به عدد b واسطه‌ی هندسی دو عدد a و c می‌گوییم و داریم:*

$$\underbrace{a,b,c}_{\text{دنباله‌ی هندسی}} \Rightarrow \boxed{b^۲=ac}$$

زیرا اگر q قدرنسبت این دنباله‌ی هندسی باشد، داریم:

$$\begin{cases} b=aq \\ c=bq \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{c}=\frac{aq}{bq} \Rightarrow \frac{b}{c}=\frac{a}{b} \Rightarrow b^۲=ac$$

نمونه‌ی ۱: $\frac{۲}{۳},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۶},... \Rightarrow (\frac{۱}{۳})^۲=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۶}$

نمونه‌ی ۲: $۲,۶,۱۸,۵۴,۱۶۲,... \Rightarrow (۱۸)^۲=۶\times۵۴ \ , \ (۱۸)^۲=۲\times۱۶۲$

نکته۲ *اگر در یک دنباله‌ی هندسی جمله‌ی mاُم و kاُم را داشته باشیم، در این صورت قدرنسبت از رابطه‌ی $q^{m-k}=\frac{a_m}{a_k}$ به‌دست می‌آید.*

$$\begin{cases} a_m=aq^{m-۱} \\ a_k=aq^{k-۱} \end{cases} \Rightarrow \frac{a_m}{a_k}=\frac{\cancel{a}q^{m-۱}}{\cancel{a}q^{k-۱}} \Rightarrow \boxed{\frac{a_m}{a_k}=q^{m-k}}$$

مثال ۱۲

در یک دنباله‌ی هندسی جمله‌ی سوم برابر ۷ و قدرنسبت برابر ۲ است. جمله‌ی پنجم را به‌دست آورید.

☑ **پاسخ:** با استفاده از نکته‌ی ۲ در بالا می‌توان نوشت:

$$a_m=q^{m-k}a_k \Rightarrow a_۵=۲^{۵-۳}\times۷=۴\times۷=۲۸$$

۳۷- ضخامت یک مقوا ۰/۱ سانتی‌متر است. آن‌را مرتباً از وسط تا می‌کنیم. بعد از هشت بار تا زدن، ضخامت مقوا چند سانتی‌متر می‌شود؟

۳۸- جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی هندسی $a_n=۶\times۲^{۳n-۱}$ است. قدرنسبت آن‌را پیدا کنید.

۳۹- دنباله‌ی هندسی $\frac{۱}{۲},۱,۲,...$ مفروض است:

الف) جمله‌ی دهم دنباله را به‌دست آورید. ب) جمله‌ی $(۳n+۱)$اُم دنباله را به‌دست آورید.

ج) اگر a_n جمله‌ی عمومی دنباله باشد، حاصل $\frac{a_{۱۷}}{a_{۱۳}}$ را به‌دست آورید. د) واسطه‌ی هندسی بین جملات چهارم و دهم این دنباله را به‌دست آورید.

هـ) عدد ۱۲۸ چندمین جمله‌ی این دنباله است؟

۴۰- واسطه‌ی هندسی بین دو عدد $\sqrt{۳}+\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۵}-\sqrt{۳}$ را به‌دست آورید.

۴۱- اگر سه عدد ۲^b، $۴\sqrt{۲}$ و ۲^a تشکیل دنباله‌ی هندسی دهند، واسطه‌ی حسابی بین دو عدد a و b را به‌دست آورید.

۴۲- جمله‌های پنجم و هشتم یک دنباله‌ی هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ هستند. جمله‌ی دهم این دنباله را به‌دست آورید.
(مشابه تمرین کتاب درسی- سؤال ۵ صفحه‌ی ۱۲)

۴۳- کدام‌یک از دنباله‌های زیر هندسی است؟ مشخص کنید که جملات دنباله افزایش می‌یابند یا کاهش؟

الف) $a_n=\frac{-۱}{۳}+(n-۱)(\frac{۱}{۴})$ ب) $a_n=\frac{۱}{۱۰}(\frac{-۱}{۵})^{n-۱}$ ج) $a_n=۲۰(\frac{۴}{۳})^{n-۱}$

۴۴- در یک دنباله‌ی هندسی، جمله‌ی بیست و هفتم، معکوس جمله‌ی پنجم است. جمله‌ی شانزدهم این دنباله را به‌دست آورید. (جمله‌های دنباله مثبت هستند.)

۴۵- جمله‌ی دهم یک دنباله‌ی هندسی ۴ برابر جمله‌ی هفتم است. جمله‌ی بیست و هفتم این دنباله چند برابر جمله‌ی بیست و یکم است؟

۴۶- جملات سوم، هفتم و یازدهم یک دنباله‌ی هندسی به ترتیب $x-۱$، x و $x+۱$ می‌باشند. مقدار x را به‌دست آورید.

۴۷- در یک دنباله‌ی هندسی $a_۱\times a_۲\times a_۳\times a_۴\times a_۵=۲۴۳$ است.

الف) مقدار $a_۳$ را به‌دست آورید. ب) مقدار $a_۱\times a_۵$ را به‌دست آورید.

۴۸- بین دو عدد ۶ و ۹۶ سه عدد درج کنید به‌طوری که پنج عدد حاصل، جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول ۶ باشند.

۴۹- در یک دنباله‌ی هندسی مجموع جملات اول و چهارم برابر ۲۸ و مجموع جملات دوم و سوم برابر ۱۲ است. قدرنسبت این دنباله چه عددی است؟

۵۰- جملات چهارم، ششم و دوازدهم از یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب ۳ جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی هستند. قدرنسبت دنباله‌ی هندسی را به‌دست آورید. (جملات متمایز هستند.)

۵۱- جملات یک دنباله‌ی هندسی همگی مثبت هستند. اگر از همه‌ی جملات جذر بگیریم، نشان دهید دنباله‌ی حاصل نیز یک دنباله‌ی هندسی است.
(مشابه تمرین کتاب درسی- سؤال ۹ صفحه‌ی ۱۳)

۵۲- ثابت کنید اگر در یک دنباله‌ی هندسی هر جمله را از جمله‌ی بعدی کم کنیم، اعداد حاصل تشکیل دنباله‌ی هندسی می‌دهند.

۵۳- وقتی می‌گوییم نرخ رشد سالیانه‌ی جمعیت ۳ درصد است، یعنی جمعیت آن کشور در هر سال به میزان ۳ درصد جمعیت سال قبل، افزایش می‌یابد.
اگر یک کشور ۵۰ میلیون نفر جمعیت داشته باشد و نرخ رشد سالیانه‌ی جمعیت آن ۳ درصد باشد؛ (تمرین کتاب درسی- سؤال ۱ صفحه‌ی ۱۱)

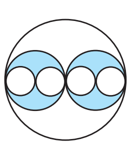
الف) جمعیت سال دوم چند برابر جمعیت سال اول است؟ جمعیت سال سوم چند برابر جمعیت سال دوم است؟

ب) این دنباله یک دنباله‌ی حسابی است یا یک دنباله‌ی هندسی؟

ج) جمعیت این کشور بعد از گذشت n سال چه‌قدر خواهد بود؟

۵۴- در یک کندوی زنبور عسل ۳۷۵۰ زنبور زندگی می‌کنند. اگر جمعیت این کندو هر سال به اندازه‌ی $\frac{۱}{۵}$ جمعیت سال قبل آن کاهش یابد، پس از ۴ سال چند زنبور در این کندو باقی خواهد ماند؟

۵۵- اگر مساحت یک دایره برابر $S_۱$ باشد و داخل آن دو دایره به شکل مقابل رسم کنیم و مجموع مساحت آن‌ها را $S_۲$ بنامیم، با تکرار این عملیات دنباله‌ی $S_۱,S_۲,...,S_n,...$ ساخته می‌شود. جمله‌ی عمومی این دنباله را به‌دست آورید و نشان دهید این یک دنباله‌ی هندسی است.
(تمرین کتاب درسی- سؤال ۷ صفحه‌ی ۱۲)



۱۱ الف) اگر تعداد اضلاع را n فرض کنیم، داریم:

سه ضلعی : $n=3 \longrightarrow$ مجموع زوایای داخلی $=180^\circ$ $+180^\circ$

چهارضلعی : $n=4 \longrightarrow$ مجموع زوایای داخلی $=360^\circ$ $+180^\circ$

پنج ضلعی : $n=5 \longrightarrow$ مجموع زوایای داخلی $=540^\circ$

پس به ازای اضافه شدن هر ضلع، 180° به مجموع زوایای داخلی اضافه می‌شود.

ب)

$$\left.\begin{array}{l} n=3 \longrightarrow \text{مجموع زوایای داخلی} =180^\circ \\ n=4 \longrightarrow \text{مجموع زوایای داخلی} =180^\circ+180^\circ=2(180^\circ)=360^\circ \\ n=5 \longrightarrow \text{مجموع زوایای داخلی} =180^\circ+180^\circ+180^\circ=3(180^\circ)=540^\circ \\ n=6 \longrightarrow \text{مجموع زوایای داخلی} =180^\circ+180^\circ+180^\circ+180^\circ=4(180^\circ)=720^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow a_n=(n-2)\times180^\circ \ ,\ (n\geq3)$$

---

۱۲ چون در اولین هفته پولی در صندوق نبوده، پس وقتی رضا ۱۶۰۰ تومان را در صندوق می‌گذارد و تا آخر هفته ۸۰۰ تومان آن را خرج می‌کند، در آخر هفته‌ی اول ۸۰۰ تومان پول در صندوق دارد. در هفته‌ی دوم دوباره ۱۶۰۰ تومان در صندوق می‌گذارد. پس موجودی صندوق او ۲۴۰۰ تومان می‌شود که تا آخر هفته ۱۲۰۰ تومان آن را خرج می‌کند. پس در پایان هفته دوم ۱۲۰۰ تومان پول دارد. در هفته‌ی سوم ۲۸۰۰ تومان پول در صندوق دارد که تا آخر هفته ۱۴۰۰ تومان را خرج کرده و ۱۴۰۰ تومان باقی می‌ماند. پس دنباله‌ی پول‌های باقی‌مانده در صندوق را می‌توان به صورت روبه‌رو نوشت:

$$800,1200,1400,\underset{\frac{1400+1600}{2}}{\underset{\downarrow}{1500}},\ldots$$

اگر در پایان هفته‌ی nاُم میزان موجودی رضا a_n باشد، در ابتدای هفته‌ی $(n+1)$اُم موجودی او a_n+1600 می‌شود که در آخر هفته $\frac{a_n+1600}{2}$ از آن باقی می‌ماند. پس بین جمله‌ی nاُم و جمله‌ی $(n+1)$اُم رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$a_{n+1}=\frac{a_n+1600}{2}=\frac{a_n}{2}+800$$

---

۱۳ **روش اول:** می‌دانیم دنباله‌ی حسابی دنباله‌ای است که هر جمله‌ی آن (غیر از جمله‌ی اول) از افزودن یک مقدار ثابت (قدرنسبت) به جمله‌ی قبلی به‌دست می‌آید. به کمک این تعریف و با نوشتن جملات دنباله، بررسی می‌کنیم که دنباله‌های داده شده حسابی هستند یا خیر.

الف) $a_n=2+n^2 \Rightarrow 3,6,11,18,\ldots \Rightarrow 6-3\neq11-6 \Rightarrow$ دنباله‌ی حسابی نیست.

ب) $a_n=3+\frac{n}{2} \Rightarrow \frac{7}{2},4,\frac{9}{2},5,\ldots \Rightarrow 4-\frac{7}{2}=\frac{9}{2}-4=5-\frac{9}{2}$

پس می‌توان گفت که دنباله‌ی داده شده یک دنباله‌ی حسابی است. برای اثبات این مطلب در حالت کلی کافی است درستی تساوی $a_n-a_{n-1}=d$ (d عددی ثابت است.) را بررسی کنیم:

$$\left\{\begin{array}{l} a_n=3+\frac{n}{2} \\ a_{n-1}=3+\frac{n-1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow a_n-a_{n-1}=3+\frac{n}{2}-(3+\frac{n-1}{2})=\frac{1}{2}= \text{یک عدد ثابت} =d \Rightarrow \text{دنباله‌ی حسابی است.}$$

ج) $a_n=\frac{1}{n+2} \Rightarrow \frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\ldots \Rightarrow \frac{1}{4}-\frac{1}{3}\neq\frac{1}{5}-\frac{1}{4} \Rightarrow$ دنباله‌ی حسابی نیست.

روش دوم: جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی به‌صورت $a_n=a+(n-1)d \Rightarrow a_n=dn+(a-d)$ است که یک چندجمله‌ای برحسب n و از درجه‌ی ۱ می‌باشد (ضریب n همان قدرنسبت دنباله است). بنابراین فقط دنباله‌ی داده شده در قست «ب» دنباله‌ای حسابی است.

$$a_n=3+\frac{n}{2} \Rightarrow a_1=\frac{7}{2},a_2=4,a_3=\frac{9}{2},\cdots \Rightarrow d=\frac{1}{2}: \text{ضریب } n$$

---

۱۴ طول اولیه‌ی میله برابر ۱ متر است، دنباله‌ی طول‌های مختلف میله به ازای هر ۱ درجه افزایش دما را تشکیل می‌دهیم:

$$\underbrace{1+0/000012}_{n=1},\underbrace{1+2(0/000012)}_{n=2},\underbrace{1+3(0/000012)}_{n=3},\ldots \Rightarrow a_n=1+0/000012n$$

این دنباله، یک دنباله‌ی حسابی است، زیرا در هر مرحله طول میله ۰/۰۰۰۰۱۲ متر از مرحله‌ی قبلی بیش‌تر است، پس دارای قدرنسبتی برابر ۰/۰۰۰۰۱۲ می‌باشد.

۱۵ در این دنباله‌ی حسابی $a=-۹$ و $d=۷۵-۶۸=۷$ است، پس:

$$a_{۱۷}=a+۱۶d=-۹+۱۶(۷)=۱۰۳$$

---

۱۶ الف)

$$a=۳\ ,\ d=۴\ ,\ a_{۲۳}=?\Rightarrow a_n=a+(n-۱)d\Rightarrow a_{۲۳}=۳+(۲۳-۱)(۴)\Rightarrow a_{۲۳}=۹۱$$

ب) برای یافتن جمله‌ی $(۲n-۱)$اُم باید به جای n عبارت $۲n-۱$ را قرار دهیم:

$$a_n=a+(n-۱)d\Rightarrow a_{۲n-۱}=۳+((۲n-۱)-۱)(۴)=۳+(۲n-۲)(۴)\Rightarrow a_{۲n-۱}=۸n-۵$$

ج) ابتدا $a_{۸۱}$ و $a_{۹۵}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l}a_{۸۱}=a+(۸۱-۱)d=۳+(۸۰\times ۴)=۳۲۳\\ a_{۹۵}=a+(۹۵-۱)d=۳+(۹۴\times ۴)=۳۷۹\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{واسطه‌ی حسابی}]{۳۲۳,b,۳۷۹}۲b=۳۲۳+۳۷۹\Rightarrow ۲b=۷۰۲\Rightarrow b=۳۵۱$$

د) باید $a_n=۵۱۱$ شود، پس:

$$a_n=a+(n-۱)d\Rightarrow ۵۱۱=۳+(n-۱)(۴)\Rightarrow ۵۰۸=۴(n-۱)\Rightarrow ۱۲۷=n-۱\Rightarrow n=۱۲۸$$

یعنی عدد ۵۱۱ جمله‌ی صد و بیست و هشتم این دنباله است.

۱۷

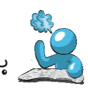
$$\frac{a_{۲۰}-a_۶}{a_{۱۲}-a_۸}=\frac{(\cancel{a_۱}+۱۹d)-(\cancel{a_۱}+۵d)}{(\cancel{a_۱}+۱۱d)-(\cancel{a_۱}+۷d)}=\frac{۱۴d}{۴d}=\frac{۱۴}{۴}=۳/۵$$

توجه به عنوان یک روش ساده‌تر می‌توانید از نکته‌ی (۲) درسنامه هم استفاده کنید، البته نه در امتحان، فقط در تست.

۱۸

$$\begin{cases}a_{۱۷}=۶۰\\ a_{۲۳}=۸۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+۱۶d=۶۰\\ a+۲۲d=۸۴\end{cases}\Rightarrow(۲۲-۱۶)d=۸۴-۶۰\Rightarrow d=\frac{۲۴}{۶}=۴$$

$$a_{۴۰}-a_{۲۲}=(a+۳۹d)-(a+۲۱d)=۱۸d\overset{d=۴}{=\!=}۷۲$$


ببخشید میشه از نکته‌ی (۲) که تو درسنامه گفتید، این سؤال رو حل کنیم؛ یعنی d رو از رابطه‌ی $d=\frac{a_{۲۳}-a_{۱۷}}{۲۳-۱۷}$ به‌دست بیاوریم و بعد $a_{۴۰}-a_{۲۲}$ رو از رابطه‌ی $d=\frac{a_{۴۰}-a_{۲۲}}{۴۰-۲۲}$؛

پاسخ: بله. این هم یه روش دیگه است، ولی تو امتحان باید همون روشی رو که ما حل کردیم، بنویسی.

---

۱۹ سه جمله‌ی پنجم $a_{۱۳},a_{۱۴},a_{۱۵}$ و سه جمله‌ی سوم $a_۷,a_۸,a_۹$ هستند. در نتیجه داریم:

$$(a_{۱۳}+a_{۱۴}+a_{۱۵})-(a_۷+a_۸+a_۹)=(a_{۱۳}-a_۷)+(a_{۱۴}-a_۸)+(a_{۱۵}-a_۹)$$

$$=۶d+۶d+۶d=۱۸d\overset{d=a_۲-a_۱}{=\!=\!=\!=}۱۸((۶-\sqrt{۳})-(۲-\sqrt{۳}))=۱۸\times ۴=۷۲$$

تذکر آخرین جمله‌ی k جمله‌ی nاُم، برابر nk می‌باشد. (مثلاً آخرین جمله‌ی ۳ جمله‌ی ۵اُم برابر $۱۵=۵\times ۳$ می‌باشد.)

---

۲۰ **روش اول:**

$$\underset{a_۱}{۷}\ ,\ \bigcirc\ ,\ \bigcirc\ ,\ \bigcirc\ ,\ \bigcirc\ ,\ \underset{a_۶}{۳۲}\Rightarrow a_۶=a_۱+(۶-۱)d\Rightarrow ۳۲=۷+۵d\Rightarrow d=\frac{۳۲-۷}{۵}=۵$$

روش دوم:

نکته *اگر بخواهیم بین دو عدد a و b، تعداد m عدد قرار دهیم، به طوری که اعداد حاصل با a و b تشکیل یک دنباله‌ی حسابی بدهند، می‌گوییم بین اعداد a و b، m واسطه‌ی حسابی درج کرده‌ایم. قدرنسبت این دنباله‌ی حسابی برابر است با* $d=\frac{b-a}{m+۱}$

در این سؤال $a=۷$، $b=۳۲$ و $m=۴$ است، بنابراین داریم:

$$d=\frac{۳۲-۷}{۴+۱}=\frac{۲۵}{۵}=۵$$

---

۲۱ ابتدا فرمول جمله‌ی بیستم را می‌نویسیم:

$$a_{۲۰}=a+(۲۰-۱)d=a+۱۹d$$

حال به قدرنسبت ۳ واحد اضافه می‌کنیم:

$$a_{۲۰}\text{جدید}=a+۱۹(d+۳)=\underbrace{a+۱۹d}_{a_{۲۰}\text{قدیم}}+۵۷\Rightarrow$$ ۵۷ واحد اضافه می‌شود.

---

۲۲ در دنباله‌ی $-۲,a,۸,b,\cdots$ داریم:

$$\text{شرط دنباله‌ی حسابی}\Rightarrow ۲(a)=-۲+۸\Rightarrow ۲a=۶\Rightarrow a=۳$$

$$\text{شرط دنباله‌ی حسابی}\Rightarrow ۲(۸)=a+b\Rightarrow ۱۶=۳+b\Rightarrow b=۱۳$$

۲۳ باید عددی بین $1+\sqrt{3}$, $\frac{2}{1-\sqrt{3}}$ پیدا کنیم که سه عدد حاصل، تشکیل یک دنباله‌ی حسابی دهند:

$$\frac{2}{1-\sqrt{3}}, x, 1+\sqrt{3} \Rightarrow 2x=(1+\sqrt{3})+\frac{2}{1-\sqrt{3}} \Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{1-\sqrt{3}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}=0 \Rightarrow$$ واسطه‌ی حسابی $=0$

اگر $\frac{1}{1-\sqrt{3}}$ را گویا کنیم، به عدد $-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ می‌رسیم.

---

۲۴ جملات اول، پنجم و نهم یک دنباله‌ی حسابی، چون فاصله‌های مساوی از هم دارند، خود تشکیل یک دنباله‌ی حسابی می‌دهند، یعنی جمله‌ی پنجم واسطه‌ی حسابی جملات اول و نهم است. پس:

$$\underbrace{a_1, a_5, a_9}_{\text{دنباله‌ی حسابی}} \Rightarrow 2a_5=a_1+a_9 \Rightarrow 2(2a-4)=(3a+3)+(2a+1) \Rightarrow 4a-8=5a+4 \Rightarrow a=-12$$

---

۲۵ **الف) روش اول:** $a_7+a_{11}=30 \Rightarrow (a+6d)+(a+10d)=30 \Rightarrow 2a+16d=30 \Rightarrow a+8d=15 \Rightarrow a_9=15$

روش دوم: می‌دانیم جمله‌ی نهم وسط جمله‌ی هفتم و یازدهم است، پس:

$$\underbrace{a_7, a_9, a_{11}}_{\text{دنباله‌ی حسابی}} \Rightarrow 2a_9=a_7+a_{11} \Rightarrow 2a_9=30 \Rightarrow a_9=15$$

ب) روش اول: $a_4+a_{14}=(a+3d)+(a+13d)=2a+16d=2(a+8d)=2a_9 \xlongequal{\text{طبق قسمت الف}} 30$

روش دوم:

نکته: اگر در یک دنباله‌ی حسابی m، n، p و q چهار عدد متمایز باشند به‌طوری که $m+n=p+q$، در این صورت $a_m+a_n=a_p+a_q$.

در این سؤال چون $4+14=7+11$، پس $a_4+a_{14}=a_7+a_{11}$. در نتیجه $a_4+a_{14}=30$ است.

۲۶
$$\begin{cases} a_7=4a_2 \Rightarrow a+6d=4(a+d) \Rightarrow 3a-2d=0 \\ a_1+a_3=10 \Rightarrow a+(a+2d)=10 \Rightarrow 2a+2d=10 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} a=2 \\ d=3 \end{cases} \xrightarrow{\text{دنباله}} 2, 5, 8, 11, \dots$$

---

۲۷ **روش اول:** $a_4+a_5+a_6=2(a_{10}+a_{11}+a_{12}) \Rightarrow a+3d+a+4d+a+5d=2(a+9d+a+10d+a+11d)$

$$\Rightarrow 3a+12d=2(3a+30d) \Rightarrow 3a+48d=0 \Rightarrow 3\underbrace{(a+16d)}_{a_{17}}=0 \Rightarrow a_{17}=0$$

روش دوم: *نکته: اگر در یک دنباله‌ی حسابی m، n و p سه عدد طبیعی متمایز باشند، به‌طوری که $m+n=2p$، آن‌گاه $a_m+a_n=2a_p$.*

$a_4+a_5+a_6=2(a_{10}+a_{11}+a_{12})$, $a_{17}=?$

$$\begin{cases} 4+6=2\times5 \Rightarrow a_4+a_6=2a_5 \Rightarrow a_4+a_5+a_6=3a_5 \\ 10+12=2\times11 \Rightarrow a_{10}+a_{12}=2a_{11} \Rightarrow a_{10}+a_{11}+a_{12}=3a_{11} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3a_5=2(3a_{11}) \xrightarrow{\div3} a_5=2a_{11} \Rightarrow a_1+4d=2(a_1+10d) \Rightarrow a_1+16d=0 \xrightarrow{a_{17}=a_1+16d} a_{17}=0$$

---

۲۸ سه جمله‌ی این دنباله‌ی حسابی را به‌صورت $x-d, x, x+d$ در نظر می‌گیریم: $(x-\cancel{d})+x+(x+\cancel{d})=24 \Rightarrow 3x=24 \Rightarrow x=8$

بنابراین جمله‌ی وسط برابر ۸ است، حال ضرب آن‌ها را برابر ۴۴۰ قرار دهیم:

$$(x-d)(x)(x+d)=440 \xrightarrow{x=8} (8-d)(8)(8+d)=440 \Rightarrow (8-d)(8+d)=55$$

$$\Rightarrow 64-d^2=55 \Rightarrow d^2=9 \Rightarrow d=\pm3$$

این مسأله ۲ جواب دارد، چون: $d=3 \Rightarrow$ دنباله: $5, 8, 11, \cdots$ و $d=-3 \Rightarrow$ دنباله: $11, 8, 5, \cdots$

---

۲۹ چون $1+7=2+6=3+5=2\times4$، پس داریم:

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=42 \Rightarrow 2a_4+2a_4+2a_4+a_4=42 \Rightarrow 7a_4=42 \Rightarrow a_4=6$$

از طرفی جملات چهارم، هفتم و دهم این دنباله‌ی حسابی فاصله‌های مساوی از هم دارند، پس خود تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند.

در نتیجه: $\underbrace{a_4, a_7, a_{10}}_{\text{دنباله‌ی حسابی}} \Rightarrow 2a_7=a_4+a_{10} \Rightarrow a_7=\frac{6+18}{2}=12$

۳۰ در این دنباله $a=۵$ ، $d=۷$ و $a_n=۷k+۱۲$ است، پس:

$$a_n=۷k+۱۲ \Rightarrow a+(n-۱)d=۷k+۱۲ \Rightarrow ۵+(n-۱)(۷)=۷k+۱۲ \Rightarrow ۷n-۲=۷k+۱۲ \Rightarrow ۷n=۷k+۱۴ \Rightarrow n=k+۲$$

بنابراین این دنباله دارای $k+۲$ جمله است.

---

۳۱ ابتدا قدرنسبت را می‌یابیم:

$$\begin{cases} a_۱=۱۵۸۱ \\ a_۳=۱۳۸۱ \end{cases} \Rightarrow d=\frac{۱۳۸۱-۱۵۸۱}{۳-۱}=\frac{-۲۰۰}{۲}=-۱۰۰ \quad \text{یا} \quad \left(a_۳=a_۱+۲d \Rightarrow ۱۳۸۱=۱۵۸۱+۲d \Rightarrow d=\frac{۱۳۸۱-۱۵۸۱}{۲}=-۱۰۰\right)$$

حال جمله‌های دنباله را بازنویسی می‌کنیم:

$$۱۵۸۱ \overset{-۱۰۰}{,} ۱۴۸۱ \overset{-۱۰۰}{,} ۱۳۸۱ , \ldots$$

این دنباله تا وقتی که به عدد ۸۱ برسد جملاتش مثبت است، پس باید تعداد جملات دنباله‌ی $۱۵۸۱,۱۴۸۱,\ldots,۸۱$ را بیابیم:

$$\begin{cases} a_۱=۱۵۸۱ \\ d=-۱۰۰ \\ a_n=۸۱ \end{cases} \Rightarrow ۸۱=۱۵۸۱+(n-۱)(-۱۰۰) \Rightarrow -۱۵۰۰=(-۱۰۰)(n-۱) \Rightarrow ۱۵=n-۱ \Rightarrow n=۱۶ \Rightarrow$$ ۱۶ جمله‌ی مثبت دارد.

بدون پیدا کردن آخرین جمله‌ی مثبت هم می‌تونیم مقدار n رو پیدا کنیم؟

پاسخ: بله. کافیه در جمله‌ی عمومی دنباله، $a_n>۰$ قرار داده و n رو پیدا کنیم. به‌طور مثال در این سؤال داریم:

$$a_n=۱۵۸۱+(n-۱)(-۱۰۰)>۰ \Rightarrow ۱۶۸۱>۱۰۰n \Rightarrow n<۱۶/۸۱ \Rightarrow n=۱,۲,۳,\ldots,۱۶ \Rightarrow$$ ۱۶ جمله‌ی مثبت دارد.

---

۳۲ اعداد مضرب ۳ بین ۳۷ تا ۹۵ را مشخص می‌کنیم:

$$۳۹,۴۲,۴۵,\ldots,۹۳ \Rightarrow a=۳۹ , d=۳ , a_n=۹۳$$

$$a_n=a+(n-۱)d \Rightarrow ۹۳=۳۹+(n-۱)(۳) \Rightarrow ۵۴=۳(n-۱) \Rightarrow ۱۸=n-۱ \Rightarrow n=۱۹ \Rightarrow$$ ۱۹ عدد مضرب ۳ وجود دارد.

---

۳۳ دنباله‌ی اعداد ۳ رقمی که یکان ۷ دارند را می‌نویسیم:

$$۱۰۷,۱۱۷,۱۲۷,\ldots,۹۹۷$$

در این دنباله $a=۱۰۷$ و $d=۱۰$ است، پس خواهیم داشت:

$$a_n=۹۹۷ \Rightarrow a+(n-۱)d=۹۹۷ \Rightarrow ۱۰۷+(n-۱)(۱۰)=۹۹۷ \Rightarrow ۱۰(n-۱)=۸۹۰ \Rightarrow n-۱=۸۹ \Rightarrow n=۹۰$$

۳۴

$$\begin{cases} \underbrace{a_۱,b_۱,c_۱}_{\text{دنباله‌ی حسابی}} \Rightarrow ۲b_۱=a_۱+c_۱ \\ \underbrace{a_۲,b_۲,c_۲}_{\text{دنباله‌ی حسابی}} \Rightarrow ۲b_۲=a_۲+c_۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} ۲(b_۱-b_۲)=(a_۱-a_۲)+(c_۱-c_۲) \Rightarrow$$ دنباله‌ی حسابی هستند.

---

۳۵ زوایای پنج‌ضلعی محدب را $x-۲d,x-d,x,x+d,x+۲d$ می‌نامیم. از آن‌جایی که یک پنج‌ضلعی از ۳ مثلث تشکیل شده است، پس مجموع زوایای داخلی آن $۳\times۱۸۰^\circ$ یعنی برابر ۵۴۰° است، بنابراین:

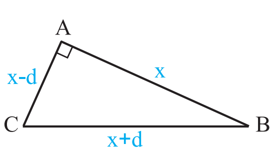
$$(x-\cancel{۲d})+(x-\cancel{d})+x+(x+\cancel{d})+(x+\cancel{۲d})=۵۴۰^\circ \Rightarrow ۵x=۵۴۰^\circ \Rightarrow x=۱۰۸^\circ \Rightarrow$$ زاویه‌ی وسط برابر ۱۰۸° است.

حال مجموع کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین زاویه را به‌دست می‌آوریم:

$$(x-\cancel{۲d})+(x+\cancel{۲d})=۲x=۲۱۶^\circ$$

---

۳۶ اضلاع مثلث را به‌صورت روبه‌رو نام‌گذاری می‌کنیم:



$$\text{محیط}=۲۴ \Rightarrow (x-\cancel{d})+x+(x+\cancel{d})=۲۴ \Rightarrow ۳x=۲۴ \Rightarrow x=۸$$

$$\text{قضیه‌ی فیثاغورس}: (۸-d)^۲+۸^۲=(۸+d)^۲ \Rightarrow ۶۴-۱۶d+\cancel{d^۲}+\cancel{۶۴}=\cancel{۶۴}+۱۶d+\cancel{d^۲}$$

$$\Rightarrow ۳۲d=۶۴ \Rightarrow d=۲ \xrightarrow{\text{اضلاع مثلث}} ۶,۸,۱۰$$

---

۳۷ در این سؤال با دنباله‌ی زیر مواجه هستیم:

$$۰/۱,۲(۰/۱),۴(۰/۱),۸(۰/۱),\ldots \xrightarrow{\text{دنباله‌ی هندسی است.}} \text{ضخامت در مرتبه‌ی هشتم}=۲^۸(۰/۱)=۲۵۶(۰/۱)$$

$$\Rightarrow \text{ضخامت در مرتبه‌ی هشتم}=۲۵/۶$$

۳۸

$$q=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{6\times 2^{3n+2}}{6\times 2^{3n-1}}=\frac{2^{3n}\times 2^2}{2^{3n}\times 2^{-1}}=2^{2+1}=2^3=8$$

۳۹

الف) در این دنباله $a=\frac{1}{2}$ و $q=2$ است:

$$a_{10}=aq^{10-1}=aq^9=\frac{1}{2}(2)^9=2^8=256$$

ب) برای یافتن جمله‌ی $(3n+1)$اُم دنباله به جای n در جمله‌ی عمومی مقدار $3n+1$ را قرار می‌دهیم:

$$a_{3n+1}=aq^{(3n+1)-1}=\frac{1}{2}\times 2^{3n}=2^{3n-1}$$

ج)

$$\frac{a_{17}}{a_{13}}=\frac{\cancel{a}q^{16}}{\cancel{a}q^{12}}=q^4\xrightarrow{q=2}2^4=16$$

د)

$$\begin{cases}a_4=aq^3=\frac{1}{2}\times 2^3=4\\ a_{10}=\frac{1}{2}(2^9)=2^8=256\end{cases}\Rightarrow 4,b,256\Rightarrow b^2=4\times 256\Rightarrow b=2\times 16=32$$

هـ) باید $a_n=128$ باشد:

$$aq^{n-1}=128\Rightarrow \frac{1}{2}\times 2^{n-1}=128\Rightarrow 2^{n-1}=256=2^8\Rightarrow n-1=8\Rightarrow n=9$$

پس عدد ۱۲۸ نهمین جمله‌ی این دنباله است.

۴۰

$$\underbrace{\sqrt{5}-\sqrt{3},x,\sqrt{5}+\sqrt{3}}\Rightarrow x^2=(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})\Rightarrow x^2=5-3=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

پس واسطه‌ی هندسی دو عدد داده شده، اعداد $\pm\sqrt{2}$ می‌باشند.

۴۱

$$2^a,4\sqrt{2},2^b\xrightarrow{\text{دنباله‌ی هندسی}}(4\sqrt{2})^2=2^a\times 2^b\Rightarrow 32=2^{a+b}\Rightarrow a+b=5$$

$$a,x,b\xrightarrow{\text{x واسطه‌ی حسابی}}2x=a+b\Rightarrow x=\frac{a+b}{2}\Rightarrow x=\frac{5}{2}=2/5$$

۴۲

$$\begin{cases}a_5=12\\ a_8=96\end{cases}\Rightarrow q^{8-5}=\frac{96}{12}\Rightarrow q^3=8\Rightarrow q=2$$

$$a_8=96\xrightarrow{\times 2}a_9=192\xrightarrow{\times 2}a_{10}=384$$

۴۳

الف) $a_n=-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}n-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}n-\frac{7}{12}\Rightarrow$ دنباله‌ی حسابی است.

ب) این یک دنباله‌ی هندسی است که در آن $a_1=\frac{1}{10}$ و $q=\frac{-1}{5}<0$ است، پس این دنباله نه کاهشی است و نه افزایشی. (زیرا جملات دنباله یکی در میان مثبت و منفی هستند.)

ج) $a_1=20>0\,,\,q=\frac{4}{3}>1\Rightarrow$ دنباله‌ی هندسی افزایشی است.

۴۴

$$a_{27}=\frac{1}{a_5}\Rightarrow aq^{26}=\frac{1}{aq^4}\Rightarrow a^2q^{30}=1\xrightarrow{\text{جذر از طرفین}}aq^{15}=\pm 1\xrightarrow[a_{16}>0]{a_{16}=aq^{15}}a_{16}=1$$

۴۵

$$a_{10}=4a_7\Rightarrow \cancel{a}q^9=4\cancel{a}q^6\Rightarrow q^3=4\ ,\ \frac{a_{27}}{a_{21}}=\frac{\cancel{a}q^{26}}{\cancel{a}q^{20}}=q^6=(q^3)^2=4^2=16$$

۴۶

جملات سوم، هفتم و یازدهم دارای فاصله‌های مساوی از هم هستند، چون جمله‌ی هفتم دقیقاً وسط دو جمله‌ی دیگر است، پس شرط $b^2=ac$ برقرار است:

$$x^2=(1+x)(1-x)\Rightarrow x^2=1-x^2\Rightarrow x^2=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۴۷

الف)

$$a_1\times a_2\times a_3\times a_4\times a_5=243\Rightarrow a\times aq\times aq^2\times aq^3\times aq^4=243\Rightarrow a^5q^{10}=3^5\Rightarrow aq^2=3\xrightarrow{a_3=aq^2}a_3=3$$

ب)

$$a_1\times a_5=a\times aq^4=a^2q^4=(aq^2)^2=3^2=9$$

۴۸ **روش اول:**

$$a_۵ = a_۱q^۴ \Rightarrow q^۴ = \frac{a_۵}{a_۱} \Rightarrow q^۴ = \frac{۹۶}{۶} = ۱۶ \Rightarrow q = \pm ۲$$

$$\underset{a_۱}{۶}, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \underset{a_۵}{۹۶}$$

این مسأله دو جواب دارد:

$$q = ۲ \Rightarrow ۶,۱۲,۲۴,۴۸,۹۶ \quad , \quad q = -۲ \Rightarrow ۶,-۱۲,۲۴,-۴۸,۹۶$$

روش دوم: نکته *اگر بخواهیم بین دو عدد a و b، تعداد n عدد قرار دهیم، به‌طوری که اعداد حاصل با a و b تشکیل یک دنباله‌ی هندسی دهند، می‌گوییم بین اعداد a و b، n واسطه‌ی هندسی درج کرده‌ایم. قدرنسبت این دنباله‌ی هندسی برابر است با:* $q^{n+۱} = \frac{b}{a}$

(دقت کنید که اگر n فرد باشد، باید a و b هم‌علامت باشند.)

در این مسأله $a = ۶$، $b = ۹۶$ و $n = ۳$. بنابراین داریم:

$$q^{۳+۱} = \frac{۹۶}{۶} = ۱۶ \Rightarrow q^۴ = ۱۶ \Rightarrow q = \pm ۲$$

۴۹

$$\begin{cases} a_۱ + a_۴ = ۲۸ \Rightarrow a + aq^۳ = ۲۸ \\ a_۲ + a_۳ = ۱۲ \Rightarrow aq + aq^۲ = ۱۲ \end{cases} \Rightarrow \frac{a + aq^۳}{aq + aq^۲} = \frac{۲۸}{۱۲} \Rightarrow \frac{\cancel{a}(۱+q^۳)}{\cancel{a}q(۱+q)} = \frac{۷}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{(۱+q)}(۱-q+q^۲)}{q\cancel{(۱+q)}} = \frac{۷}{۳} \Rightarrow ۳ - ۳q + ۳q^۲ = ۷q \Rightarrow ۳q^۲ - ۱۰q + ۳ = ۰ \Rightarrow (۳q-۱)(q-۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{۱}{۳} \\ q = ۳ \end{cases}$$

---

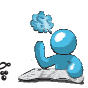
۵۰ جملات چهارم، ششم و دوازدهم دنباله‌ی حسابی $a+۳d$، $a+۵d$ و $a+۱۱d$ هستند:

$$a+۳d, a+۵d, a+۱۱d \xrightarrow{\text{دنباله‌ی هندسی}} (a+۵d)^۲ = (a+۳d)(a+۱۱d)$$

$$\Rightarrow \cancel{a^۲} + ۲۵d^۲ + ۱۰ad = \cancel{a^۲} + ۱۴ad + ۳۳d^۲ \Rightarrow ۸d^۲ + ۴ad = ۰ \Rightarrow ۴d(۲d+a) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} d = ۰ \quad \text{غ ق ق} \\ a = -۲d \end{cases}$$

حال در جملات دنباله‌ی هندسی به جای a مقدار $-۲d$ را قرار می‌دهیم:

$$a+۳d, a+۵d, a+۱۱d \xrightarrow{a=-۲d} d, ۳d, ۹d \Rightarrow q = ۳$$



چرا $d = ۰$ غیرقابل قبوله؟

پاسخ: چون در صورت سؤال قید شده که جملات متمایز هستند. اگه این شرط بیان نشده بود، $d = ۰$ هم قابل قبول بود.

---

۵۱ فرض کنیم جملات دنباله $a, aq, aq^۲, \ldots$ باشند، در این صورت:

جملات دنباله‌ی جدید $\Rightarrow \sqrt{a}, \sqrt{aq}, \sqrt{aq^۲}, \ldots$

شرط $b^۲ = ac$ را بررسی می‌کنیم:

$$(\sqrt{aq})^۲ = \sqrt{a} \times \sqrt{aq^۲} \Rightarrow (\sqrt{aq})^۲ = \sqrt{a^۲q^۲} \Rightarrow aq = \pm aq \xrightarrow[\text{مثبت هستند.}]{\text{جملات}} aq = aq$$

پس جذر جملات یک دنباله‌ی هندسی (با جملات مثبت)، باز هم دنباله‌ی هندسی خواهد بود.

---

۵۲ جملات دنباله را به‌صورت $a, aq, aq^۲, aq^۳, aq^۴, \ldots$ در نظر می‌گیریم:

تفاضل جملات متوالی: $aq - a, aq^۲ - aq, aq^۳ - aq^۲, aq^۴ - aq^۳, \ldots$

$\Rightarrow a(q-۱), aq(q-۱), aq^۲(q-۱), aq^۳(q-۱), \ldots \Rightarrow$ دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت q است.

---

۵۳ الف) میزان رشد جمعیت در سال دوم: $(۵۰ \text{ میلیون}) \times \frac{۳}{۱۰۰} = \frac{۱۵۰}{۱۰۰} = ۱/۵$ میلیون نفر

$\Rightarrow$ جمعیت در سال دوم: $۵۰ + ۱/۵ = ۵۱/۵$ میلیون نفر $\Rightarrow \frac{\text{جمعیت سال دوم}}{\text{جمعیت سال اول}} = \frac{۵۱/۵}{۵۰} = ۱/۰۳$

میزان رشد جمعیت در سال سوم: $(۵۱/۵ \text{ میلیون}) \times \frac{۳}{۱۰۰} = \frac{۱۵۴/۵}{۱۰۰} = ۱/۵۴۵$ میلیون نفر

جمعیت در سال سوم: $۵۱/۵ + ۱/۵۴۵ = ۵۳/۰۴۵$ میلیون نفر $\Rightarrow \frac{\text{جمعیت سال سوم}}{\text{جمعیت سال دوم}} = \frac{۵۳/۰۴۵}{۵۱/۵} = ۱/۰۳$ میلیون نفر

ب) این دنباله یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت ۱/۰۳ می‌باشد. دنباله‌ی جمعیت (برحسب میلیون نفر): $۵۰, ۵۱/۵, ۵۳/۰۴۵, \ldots$

ج) $a_n = a_۱q^n \xrightarrow[q=۱/۰۳]{a_۱=۵۰} a_n = ۵۰(۱/۰۳)^n$