فصل ۳
تشابه

بخش اول: نسبت، تناسب، قضیه‌ی تالس

مفهوم نسبت و تناسب

اساس کار ما در بحث قضیه‌ی تالس و تشابه، نسبت‌های هندسی است. برای این منظور ابتدا با مفهوم نسبت و تناسب آشنا می‌شویم.

نسبت: کسر $\frac{a}{b}$ $(b \neq ۰)$ را نسبت a به b می‌گوییم. برای مثال نسبت پاره‌خط AB به پاره‌خط CD را به صورت $\frac{AB}{CD}$ نمایش می‌دهیم و حاصل $\frac{AB}{CD}$ را نسبت آن دو پاره‌خط می‌گوییم.

تناسب: تساوی دو نسبت را تناسب گوییم، مانند $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ که در این تناسب می‌گوییم a و b با c و d متناسب‌اند. برای مثال وقتی می‌گوییم پاره‌خط‌های AB و CD با پاره‌خط‌های $A'B'$ و $C'D'$ متناسب‌اند، یعنی بین آن‌ها رابطه‌ی $\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}$ برقرار است.

یادآوری: در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ (یا معادل آن $b^۲=ac$)، b میانگین هندسی (واسطه‌ی هندسی) a و c نامیده می‌شود.

مسئله ۱ **اگر طول پاره‌خط AB برابر ℓ باشد و نقطه‌ی C روی این پاره‌خط چنان واقع باشد که $\frac{CB}{CA}=k$، طول هر یک از پاره‌خط‌های CA و CB را برحسب ℓ و k محاسبه کنید.**

پاسخ اگر $AC=x$ با توجه به رابطه‌ی $\frac{CB}{CA}=k$ داریم: $CB=kx$

در نتیجه:

$$AC+CB=AB \Rightarrow x+kx=\ell \Rightarrow x(۱+k)=\ell \Rightarrow x=\frac{\ell}{k+۱}$$

پس $CA=\frac{\ell}{k+۱}$ و $CB=\frac{k\ell}{k+۱}$.

ویژگی‌های تناسب

۱ اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، آن‌گاه $ad=bc$ و برعکس اگر $ad=bc$، آن‌گاه:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

۲ در یک تناسب می‌توان جای جملات میانی را عوض کرد، یعنی:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \text{ یا } \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$$

۳ در یک تناسب می‌توان دو طرف تساوی را معکوس کرد، یعنی:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

۴ ترکیب در مخرج و ترکیب در صورت تناسب‌های جدیدی را تشکیل می‌دهند، یعنی:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}, \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}, \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$$

این ویژگی را به صورت کلی می‌توان برای هر ترکیب خطی صورت و مخرج بیان کرد، یعنی اگر m، n، r و s اعداد حقیقی و ثابت باشند، می‌توان نوشت:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ma+nb}{ra+sb}=\frac{mc+nd}{rc+sd}$$

۵ اگر چند نسبت با هم برابر باشند، نسبت جدیدی نیز که صورت آن مجموع صورت‌های قبلی و مخرج آن مجموع مخرج‌های آن‌هاست، با آن‌ها برابر است، یعنی:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots=k \Rightarrow \frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}=k$$

این ویژگی را به صورت کلی می‌توان برای ترکیب خطی اعداد نیز بیان کرد. یعنی برای اعداد حقیقی و ثابت m، n و r داریم:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k \Rightarrow \frac{ma+nc+re}{mb+nd+rf}=k$$

دقت کنید که ویژگی ۵ و تعمیم آن به تعداد نسبت‌ها بستگی ندارد.

اثبات ویژگی ۵: با توجه به فرض $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$ داریم:

$$a=bk\ ,\ c=dk\ ,\ e=fk\ \Rightarrow\ a+c+e=bk+dk+fk\ \Rightarrow\ a+c+e=k(b+d+f)\ \Rightarrow\ \frac{a+c+e}{b+d+f}=k$$

تست ۱: اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=۲$، آن‌گاه $\frac{۲a-b+۳c}{۲a'-b'+۳c'}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۴

پاسخ: بنا بر ویژگی ۵ تناسب و با توجه به این‌که $۲a-b+۳c$ یک ترکیب خطی از a، b و c است و $۲a'-b+۳c'$ همان ترکیب خطی از a'، b' و c' است، بنابراین: $\frac{۲a-b+۳c}{۲a'-b'+۳c'}=۲$

بنابراین ۱ درست است.

تست ۲: زاویه‌های مثلثی متناسب با اعداد ۸، ۵ و ۲ می‌باشند. اندازه‌ی کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی این مثلث چند درجه است؟

۱) ۷۲ ۲) ۸۲ ۳) ۸۴ ۴) ۹۶ *(سراسری تجربی ۸۰)*

پاسخ: اگر A، B و C را زوایای مثلث در نظر بگیریم، از فرض داریم: $\frac{\hat{A}}{۸}=\frac{\hat{B}}{۵}=\frac{\hat{C}}{۲}=k$ و با استفاده از ویژگی ۵ تناسب داریم:

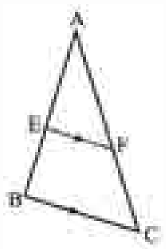
$$\frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}}{۸+۵+۲}=k\ \Rightarrow\ \frac{۱۸۰^\circ}{۱۵}=k\ \Rightarrow\ k=۱۲^\circ$$

بنابراین $\hat{A}=۹۶^\circ$، $\hat{B}=۶۰^\circ$ و $\hat{C}=۲۴^\circ$. می‌دانیم کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی مربوط به بزرگ‌ترین زاویه‌ی داخلی است، پس کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی مثلث ABC برابر است با: $۱۸۰^\circ-۹۶^\circ=۸۴^\circ$

بنابراین ۳ درست است.

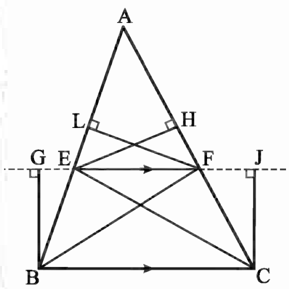
قضیه‌ی تالس

قضیه‌ی ۱



اگر خطی با یک ضلع مثلث موازی باشد و دو ضلع دیگر را قطع کند، نسبت پاره‌خط‌هایی که روی یک ضلع پدید می‌آورد، برابر است با نسبت پاره‌خط‌هایی که روی ضلع دیگر ایجاد می‌کند. یعنی اگر در مثلث ABC، EF موازی BC باشد، آن‌گاه: $\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$

اثبات: اثبات قضیه‌ی تالس دارای چهار مرحله است، که به ترتیب داریم:



مرحله‌ی ۱: مثلث‌های AEF و EFB را در نظر بگیرید. ارتفاع دو مثلث FL است، پس می‌توان گفت:

$$\frac{S_{AEF}}{S_{EFB}}=\frac{AE}{EB}$$

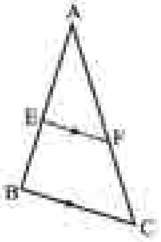
مرحله‌ی ۲: در مثلث‌های AEF و EFC، EH ارتفاع است، در نتیجه: $\frac{S_{AEF}}{S_{EFC}}=\frac{AF}{FC}$

مرحله‌ی ۳: مثلث‌های EFC و EBF هم‌مساحت‌اند، زیرا ارتفاع آن‌ها برابر است $(BG=CJ)$ و قاعده‌ی هر دوی این مثلث‌ها ضلع EF است، یعنی: $S_{EBF}=S_{EFC}$

مرحله‌ی ۴: از نتیجه‌ی به دست آمده در مرحله‌ی ۳ داریم:

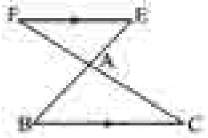
$$\frac{S_{AEF}}{S_{EFB}}=\frac{S_{AEF}}{S_{EFC}}\ \xrightarrow{\text{طبق مراحل (۱) و (۲)}}\ \frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$$

با استفاده از ویژگی‌های تناسب داریم: (هر کدام از این سه تناسب را داشته باشیم بقیه نیز نتیجه می‌شود.)



$$EF\parallel BC\ \Rightarrow\ \begin{cases} ۱)\ \frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}\ ,\ \frac{EB}{AE}=\frac{FC}{AF}\ \text{(جزء به جزء)} \\ ۲)\ \frac{AE}{AE+EB}=\frac{AF}{AF+FC}\ \Rightarrow\ \frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}\ \text{(جزء بالا به کل)} \\ ۳)\ \frac{AB-AE}{AB}=\frac{AC-AF}{AC}\ \Rightarrow\ \frac{EB}{AB}=\frac{FC}{AC}\ \text{(جزء پایین به کل)} \end{cases}$$

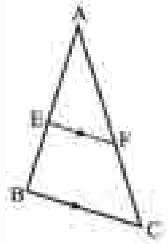
قضیه‌ی تالس برای حالتی که خط موازی ضلع مثلث، امتداد اضلاع را قطع می‌کند باز هم برقرار است. یعنی در شکل مقابل که FE موازی BC است، داریم:



$$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$$

البته معمولاً از این حالت مستقیماً استفاده نمی‌کنیم و بیشتر از تشابه برای رسیدن به این نتیجه کمک می‌گیریم.

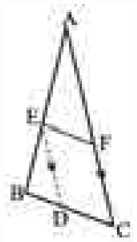
قضیه‌ی ۲



خطی که موازی یک ضلع مثلثی رسم شود، با دو ضلع دیگر (یا با امتدادهای آن‌ها) مثلثی پدید می‌آورد که ضلع‌های آن نظیربه‌نظیر با اضلاع مثلث اصلی متناسب‌اند.

$$\overset{\Delta}{ABC}: EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$$

فرق قضیه‌ی بالا با خود قضیه‌ی تالس این است که علاوه بر تساوی $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{BC}$ (قضیه‌ی تالس)، ثابت می‌شود که نسبت $\frac{EF}{BC}$ نیز با آن دو برابر است.



اثبات: از E خطی موازی AC رسم می‌کنیم تا BC را در D قطع کند با استفاده از قضیه‌ی تالس در مثلث ABC داریم:

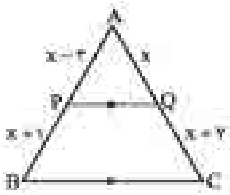
$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$$

$$ED \parallel AC \Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{DC}{BC}$$

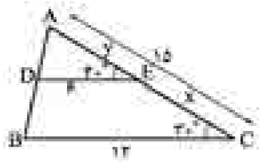
از طرفی چهارضلعی EFCD متوازی‌الاضلاع است، پس $EF = DC$. با جای‌گذاری این تساوی در نتایج بالا داریم:

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$$

مسئله ۲ **در اشکال زیر مقادیر مجهول را بیابید.**



(الف)



(ب)

پاسخ **الف)** در مثلث ABC می‌دانیم $PQ \parallel BC$، پس می‌توانیم از قضیه‌ی تالس استفاده کنیم:

$$\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC} \Rightarrow \frac{x-۳}{x+۱}=\frac{x}{x+۷} \Rightarrow \frac{x-۳}{x+۱-(x-۳)}=\frac{x}{x+۷-x} \Rightarrow \frac{x-۳}{۴}=\frac{x}{۷} \Rightarrow ۷x-۲۱=۴x \Rightarrow ۳x=۲۱ \Rightarrow x=۷$$

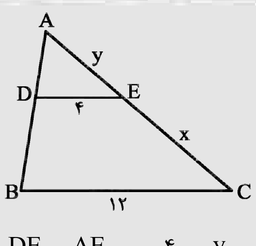
ب) چون $\hat{E}=\hat{C}=۳۰^\circ$، پس $DE \parallel BC$، بنابراین با استفاده از نتیجه‌ی قضیه‌ی تالس (قضیه‌ی ۲) داریم:

$$\frac{۶}{۱۲}=\frac{y}{y+x} \Rightarrow ۶y+۶x=۱۲y \Rightarrow ۶x=۶y \Rightarrow x=y$$

از طرفی چون $AC=۱۵$، داریم:

$$AC=x+y=۱۵ \Rightarrow ۲x=۱۵ \Rightarrow \begin{cases} x=۷/۵ \\ y=۷/۵ \end{cases}$$

تست ۳: در شکل روبه‌رو، اگر $DE \parallel BC$ و $AC=۱۵$، اندازه‌ی $x-y$ کدام است؟



۱) ۵

۲) ۸

۳) ۴

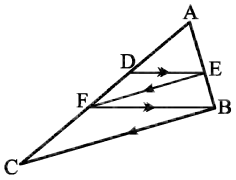
۴) ۶

پاسخ: چون $DE \parallel BC$، از قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{۴}{۱۲}=\frac{y}{۱۵} \Rightarrow y=۵ \Rightarrow x=۱۵-۵=۱۰ \Rightarrow x-y=۱۰-۵=۵$$

بنابراین ① درست است.

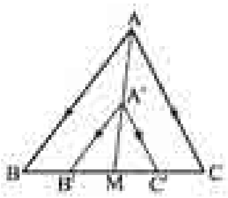
مسئله ۳ **در مثلث** ABC **،** DE **با** FB **و** EF **با** BC **موازی است. ثابت کنید:** $\frac{AD}{DF}=\frac{AF}{FC}$



پاسخ با استفاده از قضیه‌ی تالس، در مثلث‌های ABC و ABF داریم:

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ABC}: FE \parallel BC \Rightarrow \dfrac{AF}{FC}=\dfrac{AE}{EB} \\ \overset{\Delta}{ABF}: DE \parallel BF \Rightarrow \dfrac{AD}{DF}=\dfrac{AE}{EB} \end{cases} \Rightarrow \frac{AD}{DF}=\frac{AF}{FC}$$

مسئله ۴ **از نقطه‌ی** A' **روی میانه‌ی** AM **از مثلث** ABC **خطوطی موازی** AB **و** AC **رسم می‌کنیم تا ضلع** BC **را به ترتیب در** B' **و** C' **قطع کند. ثابت کنید** $A'M$ **میانه‌ی مثلث** $A'B'C'$ **است.**



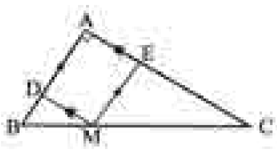
پاسخ می‌خواهیم ثابت کنیم $B'M=MC'$. با استفاده از قضیه‌ی تالس در مثلث‌های ABM و ACM و با توجه به این‌که $BM=MC$، داریم:

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ABM}: A'B' \parallel AB \Rightarrow \dfrac{MB'}{MB}=\dfrac{MA'}{MA} \\ \overset{\Delta}{ACM}: A'C' \parallel AC \Rightarrow \dfrac{MC'}{MC}=\dfrac{MA'}{MA} \end{cases} \Rightarrow \frac{MB'}{MB}=\frac{MC'}{MC} \xrightarrow{BM=MC} MB'=MC'$$

بنابراین $A'M$ میانه‌ی مثلث $A'B'C'$ است.

مسئله ۵ **از نقطه‌ی دلخواه** M **بر روی ضلع** BC **از مثلث** ABC**، خطوطی به موازات** AB **و** AC **رسم می‌کنیم تا به ترتیب آن‌ها را در** D **و** E **قطع کند. ثابت کنید:**

$$AD\times AE=BD\times CE$$



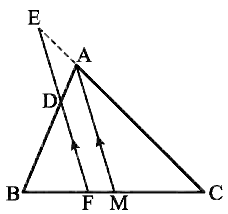
پاسخ شاید حکم مسئله کمی نامفهوم باشد و در نگاه اولیه هیچ ارتباطی با قضیه‌ی تالس نداشته باشد بنابراین برای این‌که بتوانیم با مسئله ارتباط برقرار کنیم حکم را به صورت دیگری نگاه می‌کنیم:

$$AD\times AE=BD\times CE \Rightarrow \frac{AD}{BD}=\frac{CE}{AE}$$

حال با استفاده از قضیه‌ی تالس در مثلث ABC شروع به حل مسئله می‌کنیم:

$$\begin{matrix} \overset{\Delta}{ABC}: DM \parallel AC \Rightarrow \dfrac{AD}{BD}=\dfrac{CM}{BM} \\ \overset{\Delta}{ABC}: ME \parallel AB \Rightarrow \dfrac{CM}{BM}=\dfrac{CE}{AE} \end{matrix} \Rightarrow \frac{AD}{BD}=\frac{CE}{AE} \Rightarrow AD\times AE=BD\times CE$$

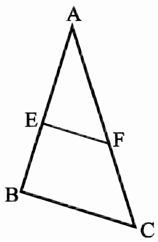
مسئله ۶ **در مثلث** ABC**، از نقطه‌ی** F **واقع بر ضلع** BC **خطی موازی میانه‌ی** AM **رسم می‌کنیم تا اضلاع** AB **و** AC **یا امتدادهای آن‌ها را به ترتیب در نقاط** D **و** E **قطع کند. ثابت کنید:** $\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}$

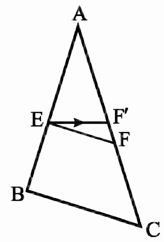


پاسخ با استفاده از قضیه‌ی تالس در مثلث‌های ABM و ECF و با توجه به این‌که $BM=MC$، داریم:

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ABM}: DF \parallel AM \Rightarrow \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{MF}{MB} \\ \overset{\Delta}{ECF}: AM \parallel EF \Rightarrow \dfrac{AE}{AC}=\dfrac{MF}{MC} \end{cases} \xrightarrow{MB=MC} \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}$$

قضیه‌ی ۳





عکس قضیه‌ی تالس: اگر در مثلث ABC نقطه‌های E و F طوری روی ضلع‌های AB و AC انتخاب شوند که $\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$، آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت پاره‌خط EF موازی ضلع BC است.

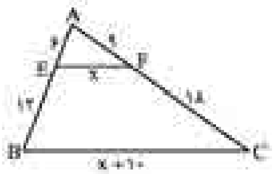
$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}\Rightarrow EF\parallel BC$$

اثبات: از E خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در F′ قطع کند. در نتیجه بنا بر قضیه‌ی تالس در مثلث ABC داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}:EF'\parallel BC\Rightarrow\frac{AE}{EB}=\frac{AF'}{F'C}\Rightarrow\frac{AE}{AB}=\frac{AF'}{AC}$$

و از طرفی با توجه به فرض داریم: $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$، در نتیجه $AF=AF'$، یعنی نقطه‌ی F و F′ بر هم منطبق‌اند، بنابراین: $EF\parallel BC$

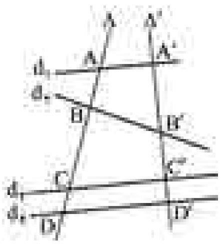
مسئله ۷ در شکل مقابل مقدار x را بیابید.



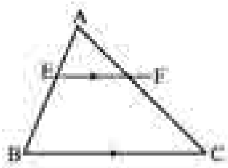
پاسخ با اندکی دقت در اندازه‌ی پاره‌خط‌ها مشاهده می‌شود که: $\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}=\frac{۱}{۲}$، در نتیجه بنا بر عکس قضیه‌ی تالس $EF\parallel BC$، بنابراین در مثلث ABC بنا بر قضیه‌ی ۲ داریم:

$$\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow\frac{۶}{۱۸}=\frac{x}{x+۱۰}\Rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{x}{x+۱۰}\Rightarrow x+۱۰=۳x\Rightarrow ۲x=۱۰\Rightarrow x=۵$$

قضیه‌ی تالس در حالت کلی



برای این‌که قضیه‌ی تالس را در حالت کلی بیان کنیم، باید ابتدا با مفهوم پاره‌خط‌های متناظر ایجادشده توسط چند مورب آشنا شویم. به شکل زیر دقت کنید. در این شکل مورب‌های Δ و Δ′ خطوط d_1، d_2، d_3 و d_4 و ... را به ترتیب در A و A′، B و B′، ... قطع کرده‌اند. به پاره‌خط‌های ایجادشده بر روی مورب‌ها و محصور بین دو خط، پاره‌خط‌های متناظر گفته می‌شود، یعنی AB و A′B′ متناظرند، BC و B′C′ نیز متناظرند و ...

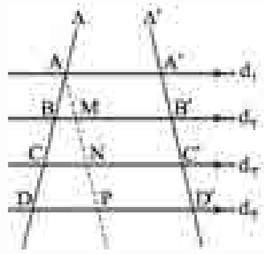


به عنوان مثال در قضیه‌ی تالس در مثلث ABC مورب‌های AC و AB دو خط EF و BC را قطع می‌کنند، پس AF و AE متناظر هم و FC و EB نیز با هم متناظرند. می‌توان قضیه‌ی تالس را در این مثلث این‌گونه بیان نمود که دو مورب AC و AB خط‌های موازی EF و BC را طوری قطع می‌کنند که پاره‌خط‌های متناظر، متناسب‌اند.

در واقع به جای تناسب $\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$ می‌توانیم تناسب $\frac{AE}{AF}=\frac{EB}{FC}$ را در نظر بگیریم.

با توجه به این بیان قضیه‌ی تالس می‌توان در حالت کلی قضیه‌ی زیر را برای هر تعداد خط موازی بیان کرد:

قضیه‌ی ۴



تعمیم قضیه‌ی تالس: اگر دو خط مورب چند خط موازی از یک صفحه را قطع کنند، پاره‌خط‌های متناظر متناسب‌اند.

$$d_1\parallel d_2\parallel d_3\parallel d_4\parallel\cdots\Leftrightarrow\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\cdots$$

اثبات: از A خطی موازی Δ′ رسم می‌کنیم تا d_2، d_3 و d_4 را به ترتیب در M، N و P قطع کند. در این صورت $A'B'=AM$، $B'C'=MN$ و $C'D'=NP$ (چهارضلعی‌های ایجادشده متوازی‌الاضلاع هستند.) با استفاده از قضیه‌ی تالس در مثلث ACN داریم:

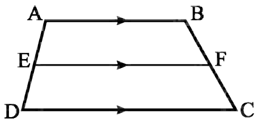
$$\overset{\Delta}{ACN}:BM\parallel CN\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{AM}{MN}\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}\Rightarrow\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$$

به همین ترتیب با رسم خطی موازی Δ′ از B ثابت می‌شود: $\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}$ و خواهیم داشت:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\cdots$$

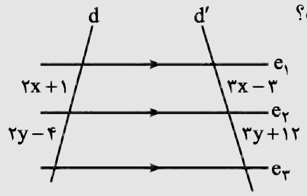
عکس این قضیه نیز همواره برقرار است، یعنی اگر $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}$، می‌توان نتیجه گرفت: $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4 \parallel \cdots$

یک حالت خاص از قضیه‌ی ۴ در ذوزنقه است:



$$EF \parallel AB \parallel DC \Leftrightarrow \frac{AE}{BF}=\frac{ED}{FC} \Leftrightarrow \frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$$

تست ۴: در شکل مقابل، دو خط d و d' را سه خط موازی e_1، e_2 و e_3 قطع کرده‌اند. نسبت $\frac{x}{y}$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{4}$　　۲) $\frac{1}{3}$

۳) $\frac{1}{2}$　　۴) $-\frac{1}{4}$

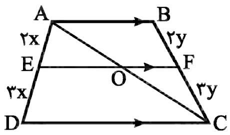
پاسخ: با استفاده از تعمیم قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{2x+1}{3x-3}=\frac{2y-4}{3y+12} \Rightarrow (2x+1)(3y+12)=(3x-3)(2y-4) \Rightarrow 6xy+24x+3y+12=6xy-12x-6y+12$$

$$\Rightarrow 36x=-9y \Rightarrow \frac{x}{y}=-\frac{9}{36}=-\frac{1}{4}$$

بنابراین ۴ درست است.

مسئله ۸ در ذوزنقه‌ی $ABCD$ نقاط E و F به ترتیب روی ساق‌های AD و BC چنان واقع‌اند که $\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}=\frac{2}{3}$. اگر بدانیم قاعده‌ی بزرگ دو برابر قاعده‌ی کوچک است، ثابت کنید:



$$EF=\frac{7}{5}AB$$

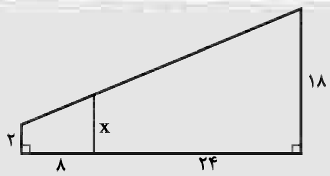
پاسخ به طور کلی در اغلب مسائل مربوط به ذوزنقه در بحث تالس و تشابه، اضافه‌کردن قطرها بسیار سودمند است. در این مسئله نیز قطر AC را به شکل اضافه می‌کنیم. از عکس تعمیم قضیه‌ی تالس می‌دانیم که $EF \parallel AB \parallel BC$، در نتیجه با استفاده از قضیه‌ی تالس در مثلث‌های ADC و ABC داریم:

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ADC}: EO \parallel DC \Rightarrow \frac{EO}{DC}=\frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{EO}{DC}=\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5} \Rightarrow EO=\frac{2}{5}DC \Rightarrow EO=\frac{2}{5}(2AB)=\frac{4}{5}AB \\ \overset{\Delta}{ABC}: FO \parallel AB \Rightarrow \frac{OF}{AB}=\frac{FC}{CB} \Rightarrow \frac{OF}{AB}=\frac{3y}{5y}=\frac{3}{5} \Rightarrow OF=\frac{3}{5}AB \end{cases}$$

بنابراین برای اندازه‌ی EF داریم:

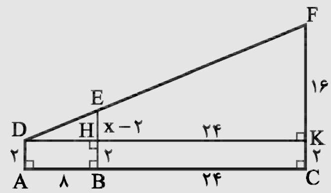
$$EF=EO+OF=\frac{4}{5}AB+\frac{3}{5}AB=\frac{7}{5}AB$$

تست ۵: در شکل مقابل، مقدار x کدام است؟



۱) ۶　　۲) ۸

۳) ۴　　۴) ۱۰

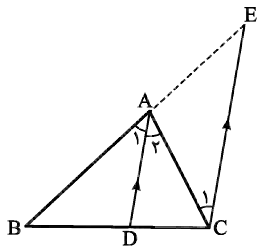


پاسخ: در این سؤال، چهارضلعی $ADFC$ ذوزنقه است، پس اگر قطر را رسم کنیم مسئله حل می‌شود. ولی این تست را با یک راه دیگر حل می‌کنیم تا با روش‌های دیگر نیز آشنا شویم:
از D بر EB عمود می‌کنیم. این خط بر FC نیز عمود است (چرا؟). چهارضلعی‌های $ADHB$ و $BHKC$ مستطیل‌اند و با استفاده از قضیه‌ی تالس در مثلث DFK داریم:

$$EH \parallel FK \Rightarrow \frac{EH}{FK}=\frac{DH}{HK} \Rightarrow \frac{x-2}{16}=\frac{8}{8+24} \Rightarrow \frac{x-2}{16}=\frac{1}{4} \Rightarrow 4x=24 \Rightarrow x=6$$

بنابراین ۱ درست است.

مسئله ۹ قضیه‌ی نیمساز را با استفاده از قضیه‌ی تالس ثابت کنید.



پاسخ باید در مثلث ABC با نیمساز AD ثابت کنیم: $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$

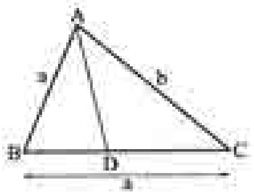
از C خطی موازی نیمساز AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در E قطع کند:

$$\begin{cases} AD \parallel CE\ ,\ AC \text{مورب} \Rightarrow \hat{A}_2=\hat{C}_1 \\ AD \parallel CE\ ,\ BE \text{مورب} \Rightarrow \hat{A}_1=\hat{E} \end{cases} \xrightarrow{\hat{A}_1=\hat{A}_2} \hat{C}_1=\hat{E} \Rightarrow AC=AE$$

از طرفی با استفاده از قضیه‌ی تالس در مثلث BCE داریم:

$$\overset{\Delta}{BCE}: AD \parallel CE \Rightarrow \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AE} \xrightarrow{AC=AE} \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

مسئله ۱۰ با استفاده از ویژگی‌های تناسب، اگر AD نیمساز زاویه‌ی A از مثلث ABC باشد، BD و DC را برحسب اضلاع مثلث به دست آورید.

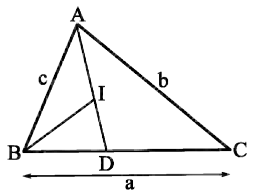


پاسخ با استفاده از قضیه‌ی نیمساز داریم:

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{BD+DC}=\frac{AB}{AB+AC} \Rightarrow \frac{BD}{a}=\frac{c}{b+c} \Rightarrow BD=\frac{ac}{b+c}$$

به همین ترتیب $CD=\frac{ab}{b+c}$.

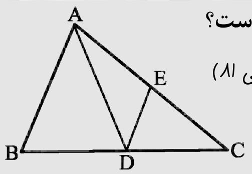
مسئله ۱۱ در مثلث ABC، I محل برخورد نیمسازهای مثلث است، ثابت کنید: $\frac{AI}{ID}=\frac{b+c}{a}$ (AD نیمساز زاویه‌ی A است.)



پاسخ در مثلث ABD، BI نیمساز است، بنابراین طبق قضیه‌ی نیمساز داریم:

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ABD}: \frac{AI}{ID}=\frac{AB}{BD} \\ \overset{\Delta}{ABC}: BD=\frac{ac}{b+c} \end{cases} \Rightarrow \frac{AI}{ID}=\frac{c}{\frac{ac}{b+c}}=\frac{b+c}{a}$$

تست ۶: در شکل مقابل، $5AB=3AC=60$ و AD نیمساز زاویه‌ی A است. اگر $DE \parallel AB$، اندازه‌ی EC کدام است؟



(سراسری ریاضی ۸۱)

۱) ۱۲ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۳/۵ ۴) ۱۵

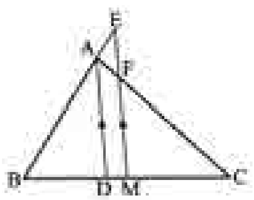
پاسخ: با استفاده از فرض $AB=12$ و $AC=20$ و با استفاده از قضیه‌های تالس و نیمساز داریم:

$$\begin{cases} AD\ \text{نیمساز} \Rightarrow \frac{CD}{BD}=\frac{AC}{AB} \\ DE \parallel AB \Rightarrow \frac{CD}{BD}=\frac{CE}{EA} \end{cases} \Rightarrow \frac{CE}{EA}=\frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{EC}{AC-EC}=\frac{20}{12} \Rightarrow \frac{EC}{20-EC}=\frac{5}{3} \Rightarrow 3EC=100-5EC$$

$$\Rightarrow 8EC=100 \Rightarrow EC=12/5$$

بنابراین ۲ درست است.

مسئله ۱۲ در مثلث ABC، از نقطه‌ی M وسط ضلع BC خطی موازی نیمساز داخلی A رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC یا امتدادهای آن‌ها را در نقاط E و F قطع کند. ثابت کنید: $BE=CF$

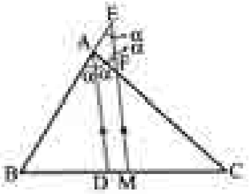


پاسخ AD نیمساز است، پس $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$ و M وسط BC است، یعنی $BM=MC$. با استفاده از قضیه‌ی تالس در مثلث‌های BEM و ADC داریم:

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{BEM}: AD \parallel ME \Rightarrow \frac{BD}{BM}=\frac{AB}{BE} \\ \overset{\Delta}{ADC}: MF \parallel AD \Rightarrow \frac{CM}{DC}=\frac{CF}{AC} \end{cases} \Rightarrow \frac{BD}{BM}\times\frac{CM}{DC}=\frac{AB}{BE}\times\frac{CF}{AC} \Rightarrow \frac{CM}{BM}\times\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}\times\frac{CF}{BE}$$

با توجه به آن‌که $\frac{CM}{BM}=1$ و $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$، از تساوی بالا نتیجه می‌گیریم:

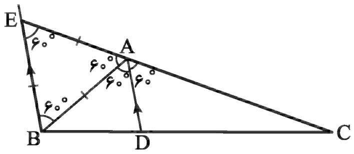
$$\frac{CF}{BE}=1 \Rightarrow CF=BE$$



این سؤال را می‌توانستیم با استفاده از قضیه‌ی خطوط موازی و مورب و قضیه‌ی تالس در مثلث‌های BEM و ADC حل کنیم:

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{BEM}: AD \parallel ME \Rightarrow \dfrac{DM}{BM}=\dfrac{AE}{BE} \\ \overset{\Delta}{ADC}: FM \parallel AD \Rightarrow \dfrac{DM}{MC}=\dfrac{AF}{CF} \end{cases} \xrightarrow[AE=AF]{BM=CM} BE=CF$$

مسئله ۱۳ **در مثلث ABC ، AD نیمساز زاویه‌ی A** $(\hat{A}=120^\circ)$ **است. ثابت کنید:** $\dfrac{1}{AD}=\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{AC}$



پاسخ از B خطی موازی نیمساز AD رسم می‌کنیم. در این صورت با توجه به قضیه‌ی خطوط موازی و مورب، مثلث ABE متساوی‌الاضلاع است. با استفاده از قضیه‌ی تالس در مثلث BEC داریم:

$$\overset{\Delta}{BEC}: AD \parallel EB \Rightarrow \frac{AD}{EB}=\frac{AC}{CE} \xrightarrow[CE=AC+EA]{BE=AB-EA} \frac{AD}{AB}=\frac{AC}{AB+AC}$$

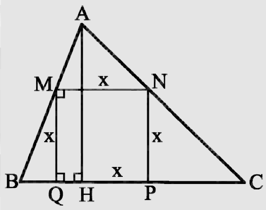
$$\Rightarrow AD=\frac{AB\times AC}{AB+AC} \Rightarrow \frac{1}{AD}=\frac{AB+AC}{AB\times AC}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$$

هرگاه با سؤالی برخورد کردیم که ربطی به نیمساز داشت و به سادگی حل نمی‌شد، یک ایده‌ی پرکاربرد، رسم خطی موازی نیمساز است. (اغلب از رأس مثلث)

تست ۷: بزرگ‌ترین مربعی که بتواند در مثلثی به مساحت یک محاط شود، چه مساحتی دارد؟ *(مرحله‌ی اول المپیاد ریاضی ایران ۱۳۸۱)*

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$ ۵) $\frac{3}{4}$

پاسخ: مربع MNPQ را مطابق شکل در مثلث ABC محاط می‌کنیم (که ارتفاع AH آن را نیز رسم کرده‌ایم). با استفاده از قضیه‌ی تالس در مثلث‌های AHC و ABC داریم:



$$\begin{cases} \overset{\Delta}{AHC}: NP \parallel AH \Rightarrow \dfrac{x}{AH}=\dfrac{CN}{AC} \\ \overset{\Delta}{ABC}: MN \parallel BC \Rightarrow \dfrac{x}{BC}=\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{AC-CN}{AC}=1-\dfrac{CN}{AC} \end{cases}$$

با توجه به فرض مسئله مساحت مثلث ABC برابر یک است، یعنی $S=\frac{1}{2}AH\times BC=1$. دو طرف تساوی‌های بالا را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\frac{x}{AH}\times\frac{x}{BC}=\frac{CN}{AC}\times(1-\frac{CN}{AC}) \Rightarrow \frac{x^2}{\underbrace{AH\times BC}_{2}}=\frac{CN}{AC}\times(1-\frac{CN}{AC})$$

می‌دانیم وقتی حاصل‌جمع دو مقدار مثبت، مقدار ثابتی است، حاصل‌ضرب آن‌ها زمانی ماکسیمم می‌شود که با هم برابر باشند، پس چون داریم: $\frac{CN}{AC}+(1-\frac{CN}{AC})=1$، بنابراین $\frac{CN}{AC}\times(1-\frac{CN}{AC})$ زمانی ماکسیمم می‌شود که داشته باشیم: $\frac{CN}{AC}=1-\frac{CN}{AC} \Rightarrow 2\frac{CN}{AC}=1 \Rightarrow \frac{CN}{AC}=\frac{1}{2}$

در نتیجه برای بیشترین مقدار مساحت مربع داریم: $\frac{x^2}{2}=\frac{CN}{AC}\times(1-\frac{CN}{AC})=\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{4} \Rightarrow$ مساحت مربع $=x^2=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

بنابراین ۳ درست است.

تمرین

۱- اگر طول پاره‌خط AB برابر ℓ باشد و نقطه‌ی D بر امتداد این پاره‌خط از طرف B چنان واقع باشد که $\frac{DB}{DA}=k$**، طول هر یک از پاره‌خط‌های DA و DB را برحسب k و ℓ محاسبه کنید.**

۲- اگر طول پاره‌خط AB برابر ℓ باشد و نقطه‌ی C روی آن و نقطه‌ی D بر امتداد آن چنان واقع باشند که $\frac{CB}{CA}=\frac{DB}{DA}=k$**، طول پاره‌خط CD را برحسب k و ℓ محاسبه کنید.**

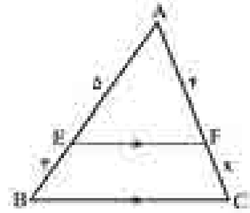
۳- با استفاده از ویژگی‌های تناسب، مقادیر مجهول را بیابید.

الف) $\frac{7-p}{p}=\frac{12}{20}$ **ب)** $\frac{x}{5}=\frac{20}{x}=y$

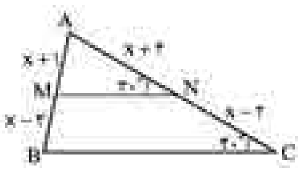
۴- اگر $\frac{a}{۲}=\frac{b}{۳}=\frac{c}{۴}=\frac{d}{۵}$، آن‌گاه حاصل $\frac{a+b+c+d}{a}$ را بیابید.

۵- a، b، c، d، e و f اعدادی حقیقی‌اند، به طوری که $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$. هم‌چنین p، q و r اعداد حقیقی‌اند که هم‌زمان صفر نیستند و n عدد طبیعی است. ثابت کنید: $(\frac{a}{b})^n=\frac{pa^n+qc^n+re^n}{pb^n+qd^n+rf^n}$ *(المپیاد ریاضی کانادا ۱۹۶۹)*

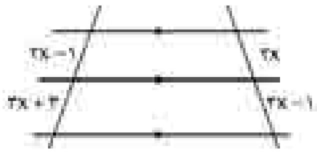
۶- در هر یک از شکل‌های زیر، مقادیر مجهول را بیابید.



الف)



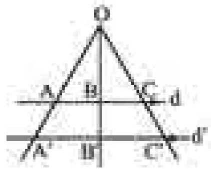
ب)



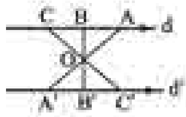
ج)

۷- ثابت کنید اگر چند خط موازی، یک خط را قطع کنند و بر آن پاره‌خط‌های مساوی پدید آورند، بر هر خط دیگری که آن‌ها را قطع کند، پاره‌خط‌های مساوی پدید می‌آورند.

۸- ثابت کنید پاره‌خط‌هایی که چند خط همرس بر دو خط موازی پدید می‌آورند، نظیربه‌نظیر متناسب‌اند. یعنی در شکل‌های زیر داریم:



الف)



ب)

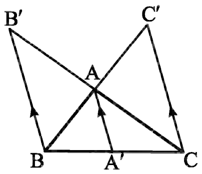
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{CB}{C'B'}$$

۹- ثابت کنید عکس سؤال قبل نیز درست است، یعنی اگر $d\,||\,d'$ و CC'، BB' و AA' موازی نباشند و $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$، آن‌گاه خطوط AA'، BB' و CC' همرس‌اند.

۱۰- نقاط M، N و P وسط‌های سه ضلع مثلث ABC را به هم وصل می‌کنیم. اگر محیط مثلث ABC برابر ۲p باشد، محیط مثلث MNP را به دست آورید.

۱۱- بر ضلع Ox از زاویه‌ی xOy دو نقطه‌ی A و B را انتخاب کرده و از این نقاط دو خط موازی رسم می‌کنیم تا ضلع Oy را به ترتیب در نقاط C و D قطع کنند. از نقطه‌ی D خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا ضلع Ox را در نقطه‌ی E قطع کند. ثابت کنید: $OB^۲=OA\cdot OE$

۱۲- از سه رأس مثلث ABC سه خط موازی AA'، BB' و CC' محدود به اضلاع مقابل رسم می‌کنیم. اگر A' بین B و C باشد، ثابت کنید: $\frac{۱}{AA'}=\frac{۱}{BB'}+\frac{۱}{CC'}$



۱۳- از نقاط دلخواه D و E واقع بر ضلع BC از مثلث ABC دو خط به موازات AB رسم می‌کنیم تا AC را به ترتیب در M و N قطع کنند. هم‌چنین از M و N دو خط به موازات BC رسم می‌کنیم تا AB را به ترتیب در نقاط P و Q قطع کنند. ثابت کنید: $\frac{MN}{QP}=\frac{AC}{AB}$

۱۴- در متوازی‌الاضلاع ABCD، از رأس C و در خارج متوازی‌الاضلاع خطی چنان مرور می‌دهیم که امتداد پاره‌خط‌های AB و AD را در نقاط E و F قطع کند. ثابت کنید: $\frac{AB}{AE}+\frac{AD}{AF}=۱$

۱۵- در ذوزنقه‌ی ABCD $(AB\,||\,CD)$، نقاط E و F بر روی ساق‌های AD و BC طوری قرار دارند که $\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}=۳$، $AB=۸$ و $CD=۱۲$. اندازه‌ی EF را بیابید.

۱۶- در ذوزنقه‌ی ABCD $(AB\,||\,CD)$، از O محل برخورد اقطار، خطی موازی قاعده‌ی AB رسم می‌کنیم تا دو ساق AD و BC را به ترتیب در E و F قطع کند. ثابت کنید:

الف) $OE=OF$

ب) $\frac{۲}{EF}=\frac{۱}{AB}+\frac{۱}{CD}$

۱۷- با استفاده از سؤال ۱۲، تمرین قبل را از روش دیگر حل کنید.

۱۸- امتداد ساق‌های AD و BC از ذوزنقه‌ی ABCD یکدیگر را در M قطع می‌کنند. از M خطی به موازات دو قاعده رسم می‌کنیم تا امتدادهای AC و BD را به ترتیب در E و F قطع کند. ثابت کنید: $ME = MF$

۱۹- در ذوزنقه‌ی ABCD نقطه‌ی E بر ساق AD چنان واقع است که $\frac{AE}{ED} = \frac{m}{n}$. **از E خطی موازی قاعده‌ها می‌کشیم تا ساق دیگر را در F قطع کند، ثابت کنید:** $EF = \frac{mDC + nAB}{m+n}$

۲۰- در مثلث $ABC(AC > AB)$، **از M وسط ضلع BC، خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا نیمساز رأس A را در N قطع کند. ثابت کنید:**

$$MN = \frac{AC - AB}{۲}$$

۲۱- به کمک قضیه‌ی تالس ثابت کنید اگر D' پای نیمساز خارجی زاویه‌ی A در مثلث ABC باشد، آن‌گاه:

الف) $\frac{BD'}{D'C} = \frac{AB}{AC}$ **ب)** $BD' = \frac{ac}{|b-c|}$ و $CD' = \frac{ab}{|b-c|}$

۲۲- در مثلث ABC میانه‌ی AM و نیمسازهای دو زاویه‌ی AMB و AMC را رسم می‌کنیم. این دو نیمساز اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط P و Q قطع می‌کنند. ثابت کنید: $PQ \parallel BC$

۲۳- در مثلث ABC نیمساز AD را رسم می‌کنیم و از D خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا AC را در E قطع کند. ثابت کنید: $AE = \frac{bc}{b+c}$

۲۴- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $ABC(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ **نیمساز AD را رسم می‌کنیم. ثابت کنید:** $\frac{\sqrt{۲}}{AD} = \frac{۱}{AC} + \frac{۱}{AB}$

۲۵- در مثلث ABC، مربع MNPQ به ضلع x را محاط کرده‌ایم. ثابت کنید: $x = \frac{a \cdot h_a}{a + h_a}$

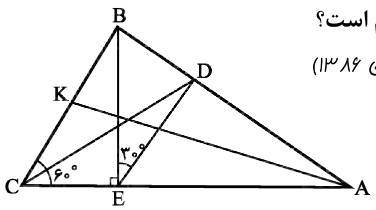
۲۶- در مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$، **نیمساز زاویه‌ی C مثلث ABC را به دو مثلث متساوی‌الساقین دیگر تقسیم کرده است. نسبت** $\frac{BC}{AB}$ **برابر با کدام‌یک از اعداد زیر است؟** *(مرحله‌ی اول المپیاد ریاضی ایران ۱۳۸۳)*

۱) $\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$

۴) $\frac{۱}{۲}$ ۵) $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$

۲۷- در شکل روبه‌رو BE بر AC عمود است. اگر $B\hat{E}D = ۳۰^\circ$ **و** $A\hat{C}B = ۶۰^\circ$، **نسبت BK به BC کدام است؟**

(مرحله‌ی اول المپیاد ریاضی ایران ۱۳۸۶)



۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$

۴) $\frac{۱}{۳}$ ۵) $\frac{۱}{۲}$

۲۸- در مثلث ABC، D نقطه‌ی وسط ضلع AB و E نقطه‌ای روی BC است به طوری که $BE = ۲EC$. **اگر** $A\hat{D}C = B\hat{A}E$، **آن‌گاه زاویه‌ی BAC چه‌قدر است؟** *(مرحله‌ی اول المپیاد ریاضی ایران ۱۳۷۷)*

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

بخش اول: نسبت، تناسب، قضیه‌ی تالس

۱- اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$، کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$ ۲) $\frac{a}{b}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$ ۳) $\frac{a}{a+b}=\frac{d}{c+d}$ ۴) $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$

۲- اگر $\frac{x}{y}=\frac{۳}{۴}$ و $\frac{x+۳}{y+۴}=a$، آن‌گاه a کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۲x}{۳y}$ ۴) $\frac{۲y}{۳x}$

۳- اگر $\frac{۱}{c}+\frac{۲}{b}=\frac{۳}{a}$، حاصل $\frac{a}{c}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳b-a}{۲b}$ ۲) $\frac{۲b-۳a}{b}$ ۳) $\frac{۳b-۲a}{b}$ ۴) $\frac{b-۳a}{۲b}$

۴- اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\lambda>۰$، آن‌گاه $\frac{۳\sqrt{b^۲+d^۲}}{\sqrt{a^۲+c^۲}}$ کدام است؟

۱) λ ۲) $\frac{۳}{\lambda}$ ۳) ۳λ ۴) $\frac{\lambda}{۳}$

۵- میانگین هندسی دو عدد ۱۶ است. حاصل‌ضرب آن دو عدد کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۱۲۸ ۳) ۲۵۶ ۴) ۱۹۶

۶- اگر b واسطه‌ی هندسی بین a و c باشد، کدام رابطه نادرست است؟

۱) $\frac{a+b}{b+c}=\frac{a}{b}$ ۲) $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{b}$ ۳) $\frac{b-c}{a-b}=\frac{b}{c}$ ۴) $\frac{b+c}{a+b}=\frac{c}{b}$

۷- اگر $\frac{a}{۲b-a}=-۳$ و $\frac{۲b-c}{۲b+c}=\frac{۱}{۳}$ باشد، محیط مثلثی به اضلاع a، b و c چند برابر b است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۸- اگر $\frac{a_۱}{۱}=\frac{a_۲}{۲}=\cdots=\frac{a_n}{n}$، آن‌گاه حاصل $a_۱+a_۲+\cdots+a_n$ چند برابر $a_۱$ است؟

۱) n ۲) $n(n+۱)$ ۳) $\frac{n(n+۱)}{۲}$ ۴) $۲n(n+۱)$

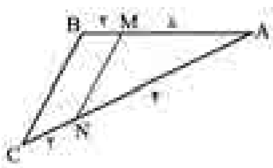
۹- روی پاره‌خط $AB=a$، دو نقطه‌ی M و N را به قسمی اختیار می‌کنیم که $\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{AN}=۲$. در این صورت طول پاره‌خط MN چه‌قدر است؟

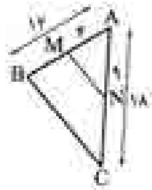
۱) $\frac{a}{۴}$ ۲) $\frac{a}{۲}$ ۳) $\frac{a}{۳}$ ۴) $\frac{۲a}{۳}$

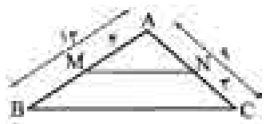
۱۰- بر روی پاره‌خط AB و امتداد آن دو نقطه‌ی M و N چنان اختیار شده‌اند که $\frac{MA}{MB}=\frac{NA}{NB}=k$. نسبت $\frac{AM}{AN}$ کدام است؟ $(k>۱)$

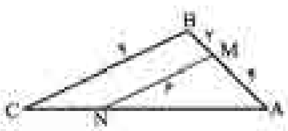
۱) $\frac{k}{k+۱}$ ۲) $\frac{k-۱}{k}$ ۳) $\frac{k-۱}{k+۱}$ ۴) $\frac{k}{k-۱}$

۱۱- در کدام‌یک از شکل‌های زیر، خط MN موازی BC است؟

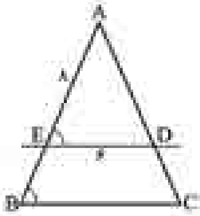
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۲- در شکل مقابل $\hat{B}=\hat{E}$ ، $AE=8$ ، $ED=6$ و $BC=9$. طول BE کدام است؟



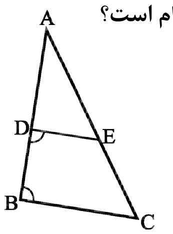
۱) ۴

۲) ۴/۲

۳) ۴/۴

۴) ۴/۶

۱۳- در شکل مقابل دو زاویه‌ی B و D از چهارضلعی BDEC مکمل هم هستند و $BC=\frac{4}{3}DE$ و $AB=20$. اندازه‌ی BD کدام است؟



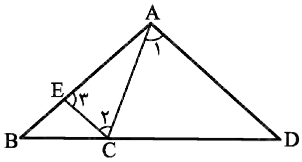
۱) ۲/۵

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

۱۴- در شکل مقابل داریم: $\hat{A}_1=\hat{E}_3=\hat{C}_2$. اگر $AB=15$ و $AC=6$ ، آن‌گاه $\frac{BD}{CD}$ چه‌قدر است؟



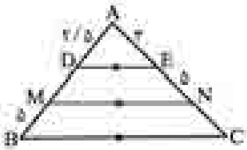
۱) $\frac{5}{3}$

۲) $\frac{5}{2}$

۳) ۲

۴) ۳

۱۵- در شکل مقابل طول پاره‌خط NC کدام است؟



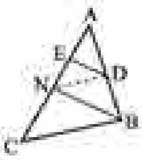
۱) ۵

۲) ۶

۳) ۸

۴) ۱۰

۱۶- در شکل مقابل $BN \parallel DE$ ، $DN \parallel BC$ ، $AE=4$ و $EN=6$. اندازه‌ی AC کدام است؟



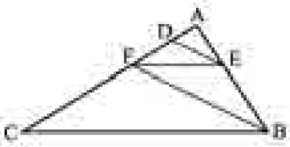
۱) ۱۸

۲) ۲۰

۳) ۲۴

۴) ۲۵

۱۷- در شکل مقابل $DE \parallel FB$ و $EF \parallel BC$. اگر $AD=3$ و $DF=6$ ، آن‌گاه BC چند برابر EF است؟ *(سراسری تجربی خارج ۸۴)*



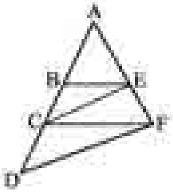
۱) ۲

۲) ۲/۵

۳) ۲/۷۵

۴) ۳

۱۸- در شکل مقابل $BE \parallel CF$ و $CE \parallel DF$. اگر $AB=5$ و $BC=3$ ، آن‌گاه اندازه‌ی CD کدام است؟ *(سراسری تجربی ۸۱)*



۱) ۴/۵

۲) ۴/۸

۳) ۵/۴

۴) ۵/۶

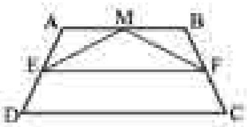
۱۹- در یک مربع به ضلع $4\sqrt{2}$ خط واصل از رأس به وسط ضلع آن، قطر مربع را در M قطع می‌کند. فاصله‌ی نقطه‌ی M از مرکز مربع کدام است؟

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) ۱

۲۰- مساحت ذوزنقه‌ای ۳۲ سانتی‌متر مربع است. اگر ارتفاع آن ۸ باشد، طول پاره‌خطی که وسط‌های ساق‌ها را به هم وصل می‌کند، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۲۱- در ذوزنقه‌ی ABCD ، نقطه‌ی M وسط AB ، F وسط BC و E وسط AD است. مساحت ذوزنقه چند برابر مساحت مثلث MEF است؟



۱) ۴

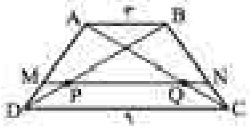
۲) ۲

۳) ۸

۴) ۶

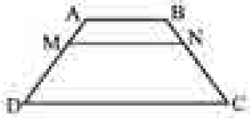
۲۲- در ذوزنقه‌ی ABCD وسط‌های اضلاع AB و CD را به هم وصل کرده‌ایم. اگر مساحت چهارضلعی MBCN دو برابر مساحت چهارضلعی AMND باشد، نسبت $\frac{BC}{AD}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۴



۲۳- در ذوزنقه‌ی شکل مقابل $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}=۲$، اندازه‌ی PQ کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۲}$ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) $\frac{۱۳}{۲}$



۲۴- در ذوزنقه‌ی ABCD، اگر $AB=۳$، $DC=۶$ و $\frac{AM}{AD}=\frac{BN}{BC}=\frac{۱}{۳}$، آن‌گاه MN کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۴}$ ۲) $\frac{۹}{۲}$ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۵- در ذوزنقه‌ی $ABCD(AB\parallel CD)$، نقطه‌ی M طوری روی AD قرار دارد که $\frac{AM}{MD}=\frac{۷}{۳}$. از نقطه‌ی M خطی موازی دو قاعده رسم می‌کنیم تا ساق دیگر را در N و قطرها را در P و Q قطع کند. نسبت $\frac{MP}{NQ}$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۶}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۷}{۳}$

۲۶- در ذوزنقه‌ی ABCD از نقطه‌ی O محل برخورد اقطار، خطی موازی قاعده رسم می‌کنیم تا ساق‌های مثلث را در M و N قطع کند. اگر برای قاعده‌های AB و CD در ذوزنقه داشته باشیم $\frac{۱}{AB}+\frac{۱}{CD}=a$، آن‌گاه MN کدام است؟

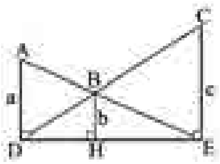
۱) $\frac{۲}{a}$ ۲) $\frac{۱}{a}$ ۳) a ۴) ۲a

۲۷- در ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقینی دو قطر بر هم عمودند. اگر طول پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق را به هم وصل می‌کند m باشد، مساحت ذوزنقه کدام است؟

۱) $m^{۲}$ ۲) ۲m ۳) $m^{۲}\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{m^{۲}-\sqrt{۲}}{۲}$

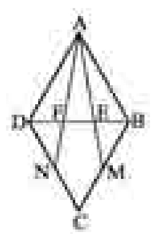
۲۸- در ذوزنقه‌ای قاعده‌ی بزرگ دو برابر قاعده‌ی کوچک است. خطی موازی قاعده‌ها رسم شده است. اگر بر اثر برخورد آن با قطرها و ساق‌های ذوزنقه، سه پاره‌خط مساوی روی آن ایجاد شده باشد، آن‌گاه این خط ساق‌های ذوزنقه را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) گزینه‌های (۱) و (۳) درست هستند.



۲۹- در شکل مقابل، فاصله‌ی نقاط A، B و C را از خط DE، به ترتیب a، b و c نامیده‌ایم. $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{c}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{abc}$ ۳) $\frac{۱}{b}$ ۴) $\frac{b}{ac}$



۳۰- در لوزی شکل مقابل M و N به ترتیب وسط‌های BC و CD هستند. نسبت $\frac{EF}{BD}$ کدام است؟

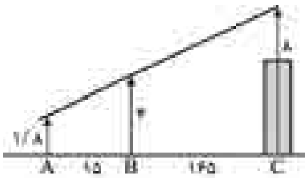
۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۳۱- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$، مربعی چنان محاط کرده‌ایم که یک رأس آن روی وتر مثلث و رأس دیگرش روی رأس قائمه‌ی مثلث قرار دارد. اگر ضلع مربع ۹ باشد، آن‌گاه مقدار $\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۳۲- در ذوزنقه‌ای به طول قاعده‌های ۶ و ۹ و ارتفاع ۲ واحد، امتداد دو ساق در نقطه‌ی M متقاطع‌اند. فاصله‌ی M از قاعده‌ی بزرگ‌تر، چه‌قدر است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸ *(سراسری تجربی ۸۷)*



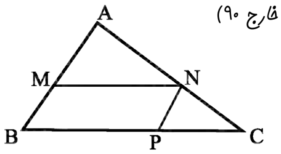
۳۳- در شکل مقابل دکلی به طول ۸ متر بر بالای برجی نصب شده است. دید چشم ناظر به ارتفاع ۱/۸ متر از ارتفاع دکل و تیرک ۴ متری در یک راستا است. بلندی برج چند متر است؟ *(سراسری ریاضی ۸۷)*

۱) ۱۹/۸ ۲) ۲۰/۲

۳) ۲۰/۸ ۴) ۲۱/۲

۳۴- در مثلث ABC، میانه‌ی AM و نیمسازهای دو زاویه‌ی AMB و AMC را رسم می‌کنیم تا دو ضلع AB و AC را به ترتیب در D و E قطع کنند. نسبت $\frac{DE}{BC}$ برابر کدام است؟ *(سراسری ریاضی ۸۹)*

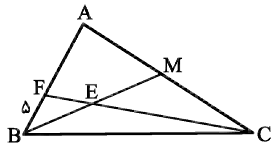
۱) $\frac{AD}{AB}$ ۲) $\frac{ME}{MC}$ ۳) $\frac{ME}{CE}$ ۴) $\frac{AM}{BC}$



۳۵- در شکل مقابل $\frac{MA}{MB}=\frac{۳}{۲}$. مساحت متوازی‌الاضلاع چند درصد مساحت مثلث ABC است؟ *(سراسری تجربی خارج ۹۰)*

۱) ۴۸ ۲) ۵۲

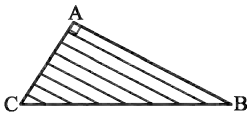
۳) ۵۴ ۴) ۵۶



۳۶- در شکل روبه‌رو BM میانه و BE = EM است. اگر BF = ۵ باشد، AB کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲

۳) ۱۵ ۴) ۲۰



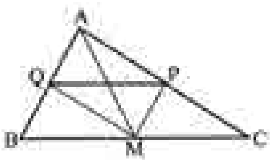
۳۷- ضلع AC از مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC به وسیله‌ی ۷ نقطه به ۸ قسمت مساوی تقسیم می‌شود. از این نقطه‌ها هفت پاره‌خط موازی AB رسم می‌شود. در صورتی که AB = ۱۰ باشد، مجموع طول‌های هفت پاره‌خط ایجادشده کدام است؟

۱) ۳۳ ۲) ۳۴

۳) ۳۵ ۴) ۴۵

۳۸- نقطه‌های P و Q روی پاره‌خط AB و در یک طرف وسط AB قرار دارند. نقطه‌ی P پاره‌خط AB را به نسبت $\frac{۲}{۳}$ و نقطه‌ی Q پاره‌خط AB را به نسبت $\frac{۳}{۴}$ تقسیم می‌کند. اگر PQ = ۲، آن‌گاه طول پاره‌خط AB برابر است با:

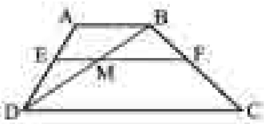
۱) ۱۲ ۲) ۲۸ ۳) ۷۰ ۴) ۷۵



۳۹- در شکل مقابل AM میانه، MP نیمساز زاویه‌ی AMC و PQ || BC، زاویه‌ی PMQ کدام است؟

۱) منفرجه ۲) قائمه

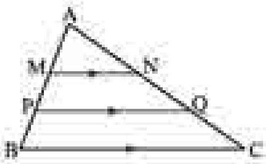
۳) $\hat{A}$ ۴) $۱۸۰^\circ-\hat{A}$



۴۰- در ذوزنقه‌ی ABCD مطابق شکل، کدام‌یک از روابط زیر درست است؟ (EF || AB)

۱) $\frac{MF}{CD}=\frac{ME}{AB}$ ۲) $\frac{BM}{BD}=\frac{AB+MF}{۲AB}$

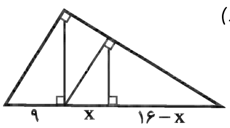
۳) $\frac{BM}{BD}=\frac{AB}{EM}$ ۴) $\frac{BM}{BD}=\frac{AB-ME}{AB}$



۴۱- با توجه به شکل روبه‌رو کدام‌یک از گزینه‌ها نادرست است؟

۱) $\frac{AM}{AP}=\frac{AN}{AQ}$ ۲) $\frac{AM}{PB}=\frac{AN}{QC}$

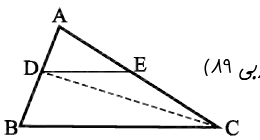
۳) $\frac{AM}{AN}=\frac{MB}{NC}$ ۴) $\frac{AM}{MP}=\frac{NQ}{QC}$



۴۲- در شکل مقابل، ارتفاع‌های هر سه مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. اندازه‌ی x کدام است؟ *(سراسری تجربی خارج ۸۶)*

۱) ۴/۵۴ ۲) ۵/۳۶

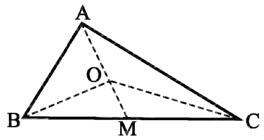
۳) ۵/۷۶ ۴) ۶/۷۵



۴۳- در شکل مقابل $\frac{AD}{AB}=\frac{۳}{۷}$ و DE || BC. مساحت مثلث ADE چند درصد مساحت مثلث DEC است؟ *(سراسری تجربی ۸۹)*

۱) ۷۰ ۲) ۷۵

۳) ۷۸ ۴) ۸۴

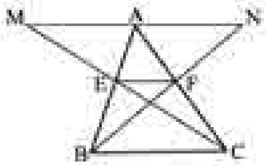


۴۴- در شکل مقابل، مساحت مثلث‌های ABC و OBC را به ترتیب S و S' می‌نامیم. نسبت $\frac{OM}{AM}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{S}{S'}$ ۲) $(\frac{S}{S'})^۲$ ۳) $\frac{S-S'}{S}$ ۴) $\frac{S'}{S}$

۴۵- در مثلث ABC به اضلاع $AB=۶$، $AC=۴$ و $BC=۳$ نقاط D، E و F را به ترتیب بر AB، BC و AC انتخاب کرده‌ایم. اگر چهارضلعی $ADEF$ لوزی باشد، آن‌گاه طول AD کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱۲}{۵}$



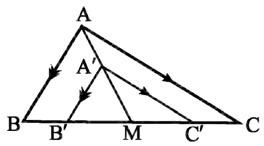
۴۶- در شکل مقابل $EF \parallel BC$، $AF=۳$، $CF=۵$ و $BC=۸$. از نقطه‌ی A خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا امتداد CE و BF را به ترتیب در نقاط M و N قطع کند. طول MN کدام است؟

۱) ۲/۴ ۲) ۳/۶ ۳) ۴/۸ ۴) ۹/۶

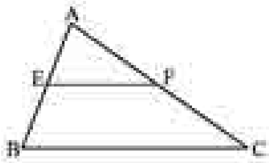
۴۷- در ذوزنقه‌ی $ABCD$ از نقطه‌ی O محل برخورد اقطار، خطی موازی قاعده رسم می‌کنیم تا ساق‌های مثلث را در E و F قطع کند. اگر $CD=۴AB$ و $BC=۲AD$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

۱) $OE=\frac{۱}{۳}OF$ ۲) $OE=\frac{۱}{۲}OF$ ۳) $OE=\frac{۲}{۳}OF$ ۴) $OE=OF$

۴۸- در شکل مقابل $A'C' \parallel AC$، $A'B' \parallel AB$ و AM میانه‌ی مثلث ABC می‌باشد. اگر $A'M$ میانه‌ی مثلث $A'B'C'$ باشد، کدام گزینه درست است؟



۱) $AA'=\frac{۱}{۲}AM$ ۲) $AA'=\frac{۲}{۳}AM$
۳) $AA'=\frac{۳}{۴}AM$ ۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد.

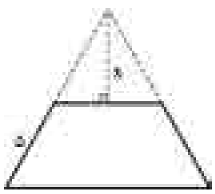


۴۹- در شکل مقابل خطوط EF و BC موازی‌اند. کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) $S_{BFC}=S_{BEC}$ ۲) $S_{CEF}=S_{BEF}$
۳) $S_{AEF}=S_{BEF}$ ۴) $S_{AEC}=S_{AFB}$

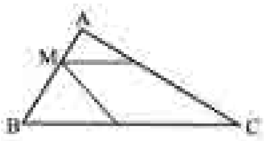
۵۰- در مستطیلی به ابعاد ۳ و ۴ واحد، نیمسازهای داخلی دو زاویه‌ی متقابل، قطر دیگر مستطیل را در N و M قطع می‌کنند. اندازه‌ی MN چه‌قدر است؟ *(سراسری ریاضی خارج ۸۷)*

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$



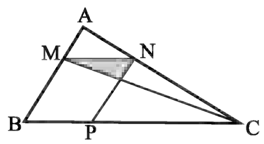
۵۱- در یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، طول قاعده‌ها ۱۵ و ۹ واحد و اندازه‌ی ساق‌ها ۵ واحد است. فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو ساق این ذوزنقه از قاعده‌ی کوچک‌تر چند واحد است؟ *(سراسری ریاضی خارج ۸۵)*

۱) ۵ ۲) ۶
۳) ۷ ۴) ۸



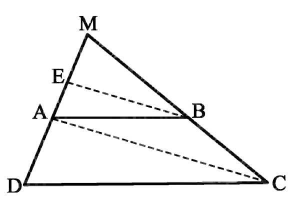
۵۲- در شکل زیر، $AM=\frac{۲}{۳}MB$ و چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند درصد مساحت مثلث ABC است؟ *(سراسری تجربی خارج ۸۹)*

۱) ۴۸ ۲) ۵۰
۳) ۵۴ ۴) ۶۰



۵۳- در شکل زیر $\frac{MA}{MB}=\frac{۲}{۳}$، مساحت مثلث سایه‌زده‌شده چند درصد مساحت متوازی‌الاضلاع است؟ *(سراسری ریاضی خارج ۹۰)*

۱) ۲۰ ۲) ۲۴
۳) ۲۵ ۴) ۳۰



۵۴- در ذوزنقه‌ی $ABCD$، پاره‌خط BE موازی قطر AC است. اگر $AD=۷$ و $AE=۳$ باشد، فاصله‌ی MD کدام است؟ *(سراسری ریاضی خارج ۹۳)*

۱) ۱۲ ۲) ۱۲/۲۵
۳) ۱۲/۵ ۴) ۱۲/۷۵

۱- گزینه‌ی ۳ در ③، شکل صحیح آن به صورت $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$ باشد که از ویژگی ترکیب در مخرج از تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ حاصل می‌شود. گزینه‌های دیگر به راحتی از ویژگی‌های تناسب به دست می‌آیند.

۲- گزینه‌ی ۱ با توجه به ویژگی پنجم تناسب داریم:

$$\frac{x}{y}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{x+۳}{y+۴}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

۳- گزینه‌ی ۳ با توجه به فرض مسئله داریم:

$$\frac{۳}{a}=\frac{۲}{b}+\frac{۱}{c}\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}}\frac{۳}{a}=\frac{۲c+b}{bc}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تساوی}\times(a)}۳=\frac{۲ac+ab}{bc}\xrightarrow{\text{تفکیک کسرها}}۳=\frac{۲a}{b}+\frac{a}{c}$$

$$\xrightarrow{\text{جداسازی کسر مطلوب}}\frac{a}{c}=۳-\frac{۲a}{b}\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}}\frac{a}{c}=\frac{۳b-۲a}{b}$$

۴- گزینه‌ی ۲ با استفاده از ویژگی‌های تناسب داریم:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\lambda\Rightarrow\frac{a^۲}{b^۲}=\frac{c^۲}{d^۲}=\lambda^۲\Rightarrow\frac{b^۲}{a^۲}=\frac{d^۲}{c^۲}=\frac{۱}{\lambda^۲}$$

$$\Rightarrow\frac{b^۲+d^۲}{a^۲+c^۲}=\frac{۱}{\lambda^۲}\Rightarrow\sqrt{\frac{b^۲+d^۲}{a^۲+c^۲}}=\frac{۱}{\lambda}\Rightarrow\frac{۳\sqrt{b^۲+d^۲}}{\sqrt{a^۲+c^۲}}=\frac{۳}{\lambda}$$

۵- گزینه‌ی ۴ اگر دو عدد را x و y بنامیم، خواهیم داشت:

$$\sqrt{xy}=۱۶\Rightarrow xy=۱۶^۲=۲۵۶$$

۶- گزینه‌ی ۳ چون b واسطه‌ی هندسی a و c است پس $b\times b=a\times c\Rightarrow b^۲=ac$ و در نتیجه داریم: $b^۲=ac$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{a\pm b}{b\pm c}\ (\text{ویژگی پنجم تناسب})\\ \frac{b}{a}=\frac{c}{b}\Rightarrow\frac{b+c}{a+b}=\frac{c}{b}\ (\text{ویژگی پنجم تناسب})\end{cases}$$

۷- گزینه‌ی ۴ هر کدام از نسبت‌ها را جداگانه نوشته، با طرفین ـ وسطین، اضلاع a و c را برحسب b به دست می‌آوریم و ...

$$\frac{a}{۲b-a}=-۳\Rightarrow a=-۶b+۳a\Rightarrow ۲a=۶b\Rightarrow a=۳b\quad(I)$$

$$\frac{۲b-c}{۲b+c}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۶b-۳c=۲b+c\Rightarrow ۴b=۴c\Rightarrow c=b\quad(II)$$

$$\frac{\text{محیط مثلث}}{\text{ضلع } b}=\frac{۲p}{b}=\frac{a+b+c}{b}$$

$$\xrightarrow{(I),(II)}=\frac{۳b+b+b}{b}=\frac{۵b}{b}=۵$$

۸- گزینه‌ی ۳ از درس ریاضی می‌دانیم که برای هر n طبیعی داریم: $۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$

با استفاده از ویژگی پنجم تناسب داریم:

$$\frac{a_۱}{۱}=\frac{a_۲}{۲}=\cdots=\frac{a_n}{n}\Rightarrow\frac{a_۱+a_۲+\cdots+a_n}{۱+۲+۳+\cdots+n}=\frac{a_۱}{۱}$$

$$\Rightarrow a_۱+a_۲+\cdots+a_n=(۱+۲+۳+\cdots+n)a_۱$$

$$\Rightarrow a_۱+a_۲+\cdots+a_n=\frac{n(n+۱)}{۲}a_۱$$

۹- گزینه‌ی ۳ به وضوح $AN=MB=\frac{a}{۳}$، پس داریم:

$$MN=a-(AN+MB)=a-(\frac{a}{۳}+\frac{a}{۳})=a-\frac{۲a}{۳}=\frac{a}{۳}$$

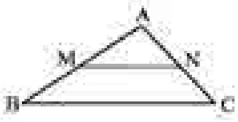
۱۰- گزینه‌ی ۳ چون $k>۱$، پس N به B نزدیک‌تر است.

با توجه به فرض مسئله و ویژگی‌های تناسب داریم:

$$\begin{cases}\frac{MA}{MB}=k=\frac{k}{۱}\Rightarrow\frac{MA}{MA+MB}=\frac{k}{k+۱}\Rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{k}{k+۱}\\ \frac{NA}{NB}=k=\frac{k}{۱}\Rightarrow\frac{NA}{NA-NB}=\frac{k}{k-۱}\Rightarrow\frac{NA}{AB}=\frac{k}{k-۱}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{AM}{AN}=\frac{k-۱}{k+۱}$$

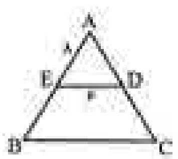
۱۱- گزینه‌ی ۴ این تست، یک مثال بسیار ساده برای تفهیم عکس قضیه‌ی تالس می‌باشد و اما یادآوری قضیه‌ی تالس: اگر در مثلثی نسبت‌های روبه‌رو برقرار باشد، می‌توان نتیجه گرفت که MN با BC موازی است.



$$\begin{cases}(۱)\ \frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\\ (۲)\ \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}\end{cases}\Rightarrow MN\parallel BC$$

با بررسی گزینه‌ها متوجه می‌شویم که فقط ④ این ویژگی را دارد.

۱۲- گزینه‌ی ۱ چون $\hat{B}=\hat{E}$، پس $ED\parallel BC$. در نتیجه با استفاده از قضیه‌ی تالس در مثلث ABC داریم:



$$\frac{AE}{AB}=\frac{ED}{BC}\Rightarrow\frac{۸}{۸+BE}=\frac{۶}{۹}$$

$$\Rightarrow ۷۲=۴۸+۶BE$$

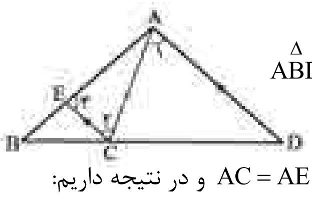
$$\Rightarrow ۶BE=۲۴\Rightarrow BE=۴$$

۱۳- گزینه‌ی ۴ چون زوایای B و D مکمل هستند، بنابراین $DE\parallel BC$. با استفاده از نتیجه‌ی قضیه‌ی تالس داریم:

$$DE\parallel BC\Rightarrow\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{AD}{۲۰}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow AD=۱۵$$

در نتیجه: $BD=AB-AD=۲۰-۱۵=۵$

۱۴- گزینه‌ی ۲ از تساوی $\hat{A}_۱=\hat{C}_۲$، نتیجه می‌شود که EC موازی AD است. بنابراین در مثلث ABD طبق نتیجه‌ی قضیه‌ی تالس داریم:



$$\overset{\Delta}{ABD}:EC\parallel AD\Rightarrow\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AE}$$

از طرفی چون $\hat{C}_۲=\hat{E}_۳$، پس $AC=AE=۶$ و در نتیجه داریم:

$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AE}=\frac{AB}{AC}=\frac{۱۵}{۶}=\frac{۵}{۲}$$

۱۵- (گزینه‌ی ۲) با تعمیم قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{AD}{AE}=\frac{MB}{NC} \Rightarrow \frac{AD}{MB}=\frac{AE}{NC} \Rightarrow \frac{۲/۵}{۵}=\frac{۳}{NC}$$

$$\Rightarrow NC=\frac{۳\times ۵}{۲/۵}=۶$$

۱۶- (گزینه‌ی ۴) با استفاده از قضیه‌ی تالس در مثلث‌های ANB و ABC داریم:

$$\begin{cases}\overset{\Delta}{ANB}: DE \parallel BN \Rightarrow \dfrac{AE}{AN}=\dfrac{AD}{AB} \\ \overset{\Delta}{ABC}: DN \parallel BC \Rightarrow \dfrac{AN}{AC}=\dfrac{AD}{AB}\end{cases} \Rightarrow \frac{AE}{AN}=\frac{AN}{AC}$$

$$\Rightarrow AN^۲=AE\times AC \xrightarrow[AN=AE+EN]{AE=۴,\ EN=۶} ۱۰^۲=۴\times AC$$

$$\Rightarrow AC=\frac{۱۰۰}{۴}=۲۵$$

۱۷- (گزینه‌ی ۴) می‌دانیم که در مثلث ABC رابطه‌ی $AF^۲=AD\cdot AC$ برقرار است.

می‌دانیم:

$$AF=AD+DF=۳+۶=۹$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: AF^۲=AD\cdot AC$$

$$\xrightarrow[AF=AD+DF]{AD=۳,\ DF=۶} ۹^۲=۳\times AC \Rightarrow AC=۲۷$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: EF \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{۹}{۲۷}=\frac{EF}{BC}$$

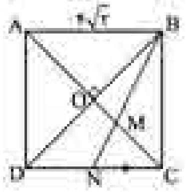
$$\Rightarrow \frac{EF}{BC}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow BC=۳EF$$

۱۸- (گزینه‌ی ۲) با توجه به رابطه‌ی به دست آمده در تست قبل داریم:

$$AC^۲=AB\times AD \Rightarrow (۵+۳)^۲=۵\times AD \Rightarrow AD=\frac{۶۴}{۵}=۱۲/۸$$

در نتیجه داریم: $CD=AD-AC=۱۲/۸-۸=۴/۸$

۱۹- (گزینه‌ی ۲) مثلث AMB را در نظر بگیرید. ضلع DC امتداد اضلاع AM و MB از این مثلث را به ترتیب در C و N قطع کرده است، پس با توجه به تذکری که در زیر قضیه‌ی تالس آمد، چون $AB \parallel NC$، داریم:



$$\frac{MC}{AM}=\frac{NC}{AB} \Rightarrow \frac{MC}{AM}=\frac{NC}{۲NC}=\frac{۱}{۲}$$

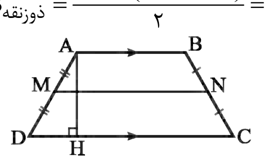
$$\Rightarrow \begin{cases} MC=\dfrac{۱}{۳}AC \\ AM=\dfrac{۲}{۳}AC \end{cases}$$

از طرفی چون AC قطر مربع است، پس $AC=\sqrt{۲}\times ۴\sqrt{۲}=۸$، در نتیجه $AO=OC=۴$ و در انتها داریم:

$$MO=OC-MC=۴-\frac{۸}{۳}=\frac{۴}{۳}$$

۲۰- (گزینه‌ی ۲) می‌دانیم که $MN=\frac{AB+DC}{۲}$. از طرفی داریم:

$$S_{\text{ذوزنقه}}=\frac{AH\times(AB+DC)}{۲}=AH\times MN$$



$$\Rightarrow S=۸\times MN \xrightarrow{S=۳۲} MN=۴$$

۲۱- (گزینه‌ی ۱) با توجه به شکل، ارتفاع مثلث نصف ارتفاع ذوزنقه است، یعنی $MH=۲MH'$. حال داریم:

$$\frac{S_{\text{ذوزنقه}}}{S_{\text{مثلث}}}=\frac{\frac{MH\times(AB+DC)}{۲}}{\frac{MH'\times EF}{۲}}=\frac{\frac{MH\times EF}{۲}}{\frac{MH'\times EF}{۲}}=\frac{\frac{۲MH'\times EF}{۲}}{\frac{MH'\times EF}{۲}}=۴$$

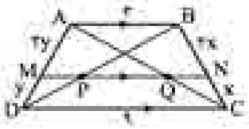
۲۲- (گزینه‌ی ۳) ارتفاع ذوزنقه‌های MBCN و AMND برابر است، پس نسبت مساحت‌ها برابر نسبت مجموع قاعده‌ی هر مثلث است.

$$\frac{S_{MBCN}}{S_{AMND}}=\frac{\frac{MN+BC}{۲}}{\frac{AD+MN}{۲}}=\frac{\frac{AD+BC}{۲}+BC}{\frac{AD+BC}{۲}+AD}=\frac{AD+۳BC}{BC+۳AD}$$

$$\xrightarrow{\text{فرض}} \frac{AD+۳BC}{BC+۳AD}=۲$$

$$\Rightarrow AD+۳BC=۲BC+۶AD \Rightarrow BC=۵AD \Rightarrow \frac{BC}{AD}=۵$$

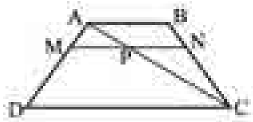
۲۳- (گزینه‌ی ۲) با توجه به فرض سؤال نتیجه می‌گیریم $MN \parallel AB \parallel DC$، حال داریم:



$$\begin{cases}\overset{\Delta}{BDC}: PN \parallel DC \Rightarrow \dfrac{PN}{DC}=\dfrac{BN}{BC}=\dfrac{۲}{۳} \Rightarrow \dfrac{PN}{۹}=\dfrac{۲}{۳} \Rightarrow PN=۶ \\ \overset{\Delta}{ABC}: QN \parallel AB \Rightarrow \dfrac{QN}{AB}=\dfrac{NC}{BC}=\dfrac{۱}{۳} \Rightarrow \dfrac{QN}{۳}=\dfrac{۱}{۳} \Rightarrow QN=۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow PQ=PN-QN=۵$$

۲۴- (گزینه‌ی ۳) از A به C وصل می‌کنیم تا MN را در P قطع کند. حال داریم:

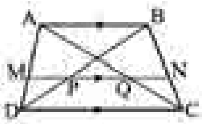


$$\begin{cases}\overset{\Delta}{ACD}: MP \parallel DC \Rightarrow \dfrac{MP}{DC}=\dfrac{AM}{AD}=\dfrac{۱}{۳} \Rightarrow MP=\dfrac{DC}{۳}=۲ \\ \overset{\Delta}{ABC}: PN \parallel AB \Rightarrow \dfrac{PN}{AB}=\dfrac{NC}{BC}=\dfrac{۲}{۳} \Rightarrow PN=\dfrac{۲}{۳}AB=۲\end{cases}$$

به این ترتیب: $MN=MP+PN=۴$

۲۵- (گزینه‌ی ۳) با توجه به تعمیم قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}=\frac{۷}{۳} \Rightarrow \frac{MD}{AD}=\frac{NC}{BC}$$

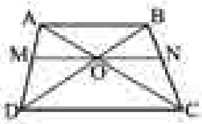


$$\begin{cases}\overset{\Delta}{ABC}: NQ \parallel AB \Rightarrow \dfrac{QN}{AB}=\dfrac{CN}{CB} \\ \overset{\Delta}{ADB}: MP \parallel AB \Rightarrow \dfrac{MP}{AB}=\dfrac{MD}{DA}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{NQ}{AB}=\frac{MP}{AB} \Rightarrow NQ=MP$$

در ذوزنقه‌ی ABCD (شکل بالا)، با فرض $MN \parallel AB \parallel DC$، بدون توجه به جایگاه M و N همواره داریم: $MP=NQ$

۲۶- (گزینه‌ی ۱) در ذوزنقه‌ی ABCD رابطه‌ی $\frac{۲}{MN}=\frac{۱}{AB}+\frac{۱}{DC}$ (به تمارین مراجعه کنید) برقرار است، بنابراین:



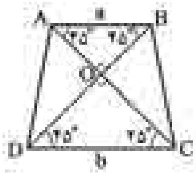
$$\frac{۲}{MN}=\frac{۱}{AB}+\frac{۱}{DC} \Rightarrow \frac{۲}{MN}=a$$

$$\Rightarrow MN=\frac{۲}{a}$$

۲۷- گزینه ۱ می‌دانیم خطی که وسط‌های دو ساق را به هم وصل می‌کند، نصف مجموع دو قاعده است، پس:

$$m=\frac{a+b}{۲} \Rightarrow a+b=۲m$$

چون ذوزنقه متساوی‌الساقین است پس $OA=OB$ و $OD=OC$، بنابراین مثلث‌های AOB و DOC قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین‌اند. در نتیجه:



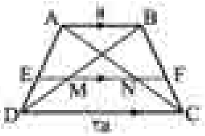
$$\begin{cases} OA=OB=\frac{\sqrt{۲}}{۲}a \\ OD=OC=\frac{\sqrt{۲}}{۲}b \end{cases}$$

$$\Rightarrow AC=BD=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(a+b)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۲m)=m\sqrt{۲}$$

از طرفی چون قطرهای ذوزنقه بر هم عمودند مساحت آن برابر نصف حاصل‌ضرب اقطارش است:

$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}AC\times BD=\frac{۱}{۲}\times m\sqrt{۲}\times m\sqrt{۲}=m^۲$$

۲۸- گزینه ۴ فرض کنیم EF موازی دو قاعده باشد و $EM=MN=NF$. برابری $EM=NF$ همیشه برقرار است (تست ۲۵ را نگاه کنید.)، پس باید ببینیم که $EM=MN$ چه زمانی رخ می‌دهد.

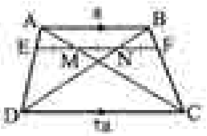


فرض کنید $\frac{AE}{ED}=k$، در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ADC}: EN \parallel DC \Rightarrow \frac{EN}{DC}=\frac{AE}{AD}=\frac{k}{k+۱} \Rightarrow EN=\frac{k}{k+۱}\times ۲a \\ \overset{\Delta}{ABD}: EM \parallel AB \Rightarrow \frac{EM}{AB}=\frac{ED}{AD}=\frac{۱}{k+۱} \Rightarrow EM=\frac{۱}{k+۱}\times a \end{cases}$$

$$\xrightarrow{EN=۲EM} \Rightarrow \frac{k}{k+۱}\times ۲a=۲\times\frac{۱}{k+۱}\times a \Rightarrow k=۱$$

یعنی $\frac{AE}{ED}=۱$ و پاره‌خط EF ساق‌ها را به نسبت $\frac{۱}{۱}$ قطع می‌کند. اما این پایان کار نیست، زیرا حالت دیگری نیز وجود دارد که در شکل زیر می‌بینید. با فرض $\frac{AE}{ED}=k$ و با راهی دقیقاً مشابه حالت قبل داریم:



$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ADC}: EM \parallel DC \Rightarrow \frac{EM}{DC}=\frac{AE}{AD}=\frac{k}{k+۱} \Rightarrow EM=\frac{k}{k+۱}\times ۲a \\ \overset{\Delta}{ADB}: EN \parallel AB \Rightarrow \frac{EN}{AB}=\frac{ED}{AD}=\frac{۱}{k+۱} \Rightarrow EN=\frac{۱}{k+۱}\times a \end{cases}$$

$$\xrightarrow{EN=۲EM} \frac{۱}{k+۱}\times a=۲\times\frac{k}{k+۱}\times ۲a \Rightarrow k=\frac{۱}{۴}$$

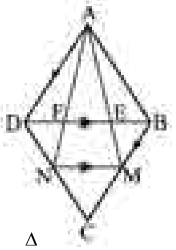
بنابراین در این حالت، پاره‌خط EF ساق‌ها را به نسبت $\frac{۱}{۴}$ قطع می‌کند.

۲۹- گزینه ۳ BH، AD و CE هر سه بر DE عمودند، پس با هم موازی‌اند. در نتیجه:

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ADE}: BH \parallel AD \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{HE}{DE} \\ \overset{\Delta}{DCE}: BH \parallel CE \Rightarrow \frac{b}{c}=\frac{DH}{DE} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a}+\frac{b}{c}=\frac{HE+DH}{DE}=\frac{DE}{DE}=۱ \Rightarrow \frac{۱}{a}+\frac{۱}{c}=\frac{۱}{b}$$

۳۰- گزینه ۲



M را به N وصل کنید. طبق عکس قضیه‌ی تالس در مثلث BDC، MN موازی DB است. از طرفی دقت کنید که BM موازی AD، امتداد دو ضلع AE و ED از مثلث ADE را قطع کرده است، پس داریم:

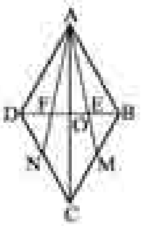
$$\overset{\Delta}{ADE}: BM \parallel AD \Rightarrow \frac{AE}{EM}=\frac{AD}{BM}=۲ \Rightarrow \frac{AE}{AM}=\frac{۲}{۳}$$

$$\overset{\Delta}{AMN}: EF \parallel MN \Rightarrow \frac{EF}{MN}=\frac{AE}{AM}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow EF=\frac{۲}{۳}MN$$

$$\overset{\Delta}{DBC}: MN \parallel BD \Rightarrow \frac{MN}{BD}=\frac{CM}{CB}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow MN=\frac{BD}{۲}$$

که از نتایج به دست آمده داریم:

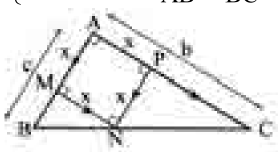
$$EF=\frac{۲}{۳}MN=\frac{۲}{۳}\left(\frac{BD}{۲}\right)=\frac{BD}{۳} \Rightarrow \frac{EF}{BD}=\frac{۱}{۳}$$



A را به C وصل می‌کنیم و محل برخورد آن با BD را O می‌نامیم. F محل برخورد میانه‌های مثلث ADC است، پس $OF=\frac{۱}{۳}DO$ و به همین ترتیب در مثلث ABC داریم: $OE=\frac{۱}{۳}BO$ که با جمع این دو رابطه داریم: $EF=\frac{BD}{۳} \Rightarrow \frac{EF}{BD}=\frac{۱}{۳}$

۳۱- گزینه ۲ چون $APNM$ مربع است پس $PN \parallel AB$ و $MN \parallel AC$. اگر ضلع مربع را x در نظر بگیریم، داریم:

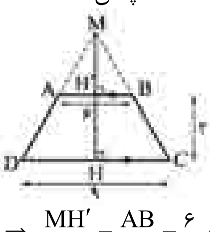
$$\begin{cases} MN \parallel AC \Rightarrow \frac{MN}{AC}=\frac{BN}{BC} \Rightarrow \frac{x}{b}=\frac{BN}{BC} \\ PN \parallel AB \Rightarrow \frac{PN}{AB}=\frac{CN}{BC} \Rightarrow \frac{x}{c}=\frac{CN}{BC} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \frac{x}{b}+\frac{x}{c}=\frac{BN+CN}{BC}=\frac{BC}{BC}=۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=\frac{۱}{x}=\frac{۱}{۹}$$

۳۲- گزینه ۲ HH' ارتفاع ذوزنقه است پس $HH'=۲$. حال از $AB \parallel DC$ استفاده می‌کنیم:

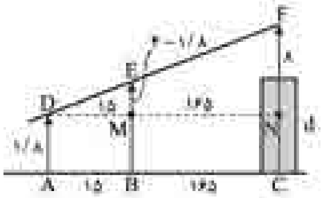


$$\begin{cases} \overset{\Delta}{MDH}: AH' \parallel DH \Rightarrow \frac{MH'}{MH}=\frac{MA}{MD} \\ \overset{\Delta}{MDC}: AB \parallel DC \Rightarrow \frac{AB}{DC}=\frac{MA}{MD} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{MH'}{MH}=\frac{AB}{DC}=\frac{۶}{۹} \Rightarrow \frac{MH-HH'}{MH}=\frac{۶}{۹}$$

$$\Rightarrow \frac{MH-۲}{MH}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow ۳MH-۶=۲MH \Rightarrow MH=۶$$

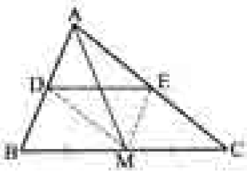
۳۳- گزینه‌ی ۲ از نقطه‌ی D موازی AC، خطی رسم می‌کنیم تا FC را در N و BE را در M قطع کند. به وضوح $AD = MB = NC = ۱/۸$. حال اگر طول برج d باشد، داریم:



$$\overset{\Delta}{DNF}: ME \parallel NF \Rightarrow \frac{DM}{DN}=\frac{ME}{NF} \Rightarrow \frac{۱۵}{۱۸۰}=\frac{۴-۱/۸}{۸+d-۱/۸}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۱۲}=\frac{۲/۲}{۶/۲+d} \Rightarrow ۶/۲+d=۲۶/۴ \Rightarrow d=۲۰/۲$$

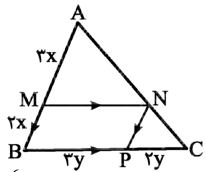
۳۴- گزینه‌ی ۱ از قضیه‌ی نیمساز در مثلث‌های AMB و AMC نتیجه می‌گیریم:



$$\begin{cases} \text{نیمساز } ME \Rightarrow \dfrac{AE}{EC}=\dfrac{AM}{MC} \\ \text{نیمساز } MD \Rightarrow \dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AM}{MB} \end{cases} \xrightarrow{MB=MC} \frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}$$

بنا بر عکس قضیه‌ی تالس می‌توان نتیجه گرفت: $DE \parallel BC$. در نتیجه: $DE \parallel BC \Rightarrow \frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}$

۳۵- گزینه‌ی ۱ چون چهارضلعی MNPB متوازی‌الاضلاع است پس $MN \parallel BC$ و $NP \parallel AB$. طبق قضیه‌ی تالس در مثلث ABC داریم:



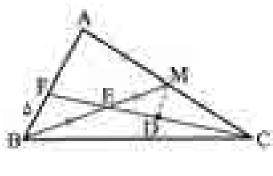
$$\begin{cases} MN \parallel BC \Rightarrow \dfrac{AM}{MB}=\dfrac{AN}{NC}=\dfrac{۳}{۲} \Rightarrow \dfrac{NC}{AN}=\dfrac{۲}{۳} \\ NP \parallel AB \Rightarrow \dfrac{CP}{PB}=\dfrac{NC}{AN}=\dfrac{۲}{۳} \Rightarrow CP=۲y\ ,\ PB=۳y \end{cases}$$

از فصل مساحت به یاد داریم که:

$$\frac{S_{MNPB}}{S_{ABC}}=\frac{BM\times BP\times \sin\hat{B}}{\frac{۱}{۲}BA\times BC\times \sin\hat{B}}=\frac{۲x\times ۳y\times \sin\hat{B}}{\frac{۱}{۲}(۵x)\times(۵y)\times \sin\hat{B}}$$

$$=\frac{۶xy}{\frac{۲۵}{۲}xy}=\frac{۱۲}{۲۵}=\frac{۴۸}{۱۰۰} \Rightarrow S_{MNPB}=\frac{۴۸}{۱۰۰}S_{ABC}$$

۳۶- گزینه‌ی ۳ سؤال قشنگی است و نیاز به خط اضافه دارد تا بتوان از فرض‌های مسئله استفاده کرد. نقطه‌ی D را روی EC طوری انتخاب می‌کنیم که $FE = ED$ شود و از M به آن وصل می‌کنیم. حال ادعا می‌کنیم که چهارضلعی BFMD متوازی‌الاضلاع است (چرا؟) و داریم:



$$\begin{cases} MD = BF = ۵ \\ MD \parallel BF \Rightarrow MD \parallel AB \end{cases}$$

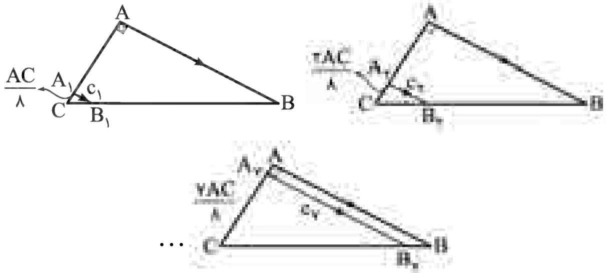
$$\Rightarrow \overset{\Delta}{ACF}: MD \parallel AF \Rightarrow \frac{CM}{AC}=\frac{MD}{AF}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{۵}{AF} \Rightarrow AF=۱۰ \quad , \quad AB=BF+AF=۵+۱۰=۱۵$$

چهارضلعی که قطرهایش منصف یکدیگر باشند، متوازی‌الاضلاع است.

۳۷- گزینه‌ی ۳ با در نظر گرفتن هر یک از هفت پاره‌خط موازی AB، یک رابطه‌ی تالس می‌نویسیم:

دقت کنید AC به ۸ قسمت مساوی تقسیم شده است:



$$\overset{\Delta}{ABC}: A_1B_1 \parallel AB \Rightarrow \frac{c_1}{AB}=\frac{\frac{AC}{۸}}{AC}=\frac{۱}{۸} \Rightarrow c_1=\frac{AB}{۸}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: A_2B_2 \parallel AB \Rightarrow \frac{c_2}{AB}=\frac{\frac{۲AC}{۸}}{AC}=\frac{۲}{۸} \Rightarrow c_2=\frac{۲AB}{۸}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

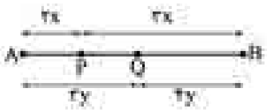
$$\overset{\Delta}{ABC}: A_7B_7 \parallel AB \Rightarrow \frac{c_7}{AB}=\frac{\frac{۷AC}{۸}}{AC}=\frac{۷}{۸} \Rightarrow c_7=\frac{۷AB}{۸}$$

$$\Rightarrow c_1+c_2+c_3+\cdots+c_7=\frac{AB}{۸}(۱+۲+۳+\cdots+۷)$$

$$=\frac{۱۰}{۸}\times\frac{۷\times۸}{۲}=۳۵$$

۳۸- گزینه‌ی ۳ کافی است به فرض مسئله که نقاط P و Q در یک طرف وسط AB هستند توجه کنید و از نسبت‌های داده‌شده استفاده کنید. بنابراین:

$$\left.\begin{aligned} AP=\frac{۲}{۵}AB \\ AQ=\frac{۳}{۷}AB \end{aligned}\right\} \Rightarrow PQ=AQ-AP=\frac{۳}{۷}AB-\frac{۲}{۵}AB=\frac{AB}{۳۵}$$



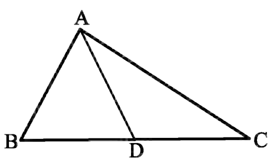
$$\Rightarrow PQ=\frac{AB}{۳۵} \xrightarrow[PQ=۲]{\text{طبق فرض مسئله}} ۲=\frac{AB}{۳۵}$$

$$\Rightarrow AB=۷۰$$

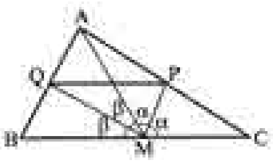
۳۹- گزینه‌ی ۲

(از فصل ۲): اگر AD نیمساز زاویه‌ی A از مثلث ABC باشد، طبق قضیه‌ی نیمسازها داریم: $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$

(عکس این قضیه نیز صادق است.)



در این سؤال از دو قضیه‌ی مهم تالس و نیمساز استفاده می‌کنیم:



۱) قضیه‌ی تالس در مثلث ABC:

۲) قضیه‌ی نیمسازها در مثلث AMC:

$$\overset{\Delta}{ABC}: PQ \parallel BC \Rightarrow \frac{AP}{PC}=\frac{AQ}{QB}$$
$$\overset{\Delta}{AMC}: \text{نیمساز } MP \Rightarrow \frac{AP}{PC}=\frac{AM}{MC}$$
$$\Rightarrow \frac{AQ}{QB}=\frac{AM}{MC} \xrightarrow{MB=MC} \frac{AQ}{QB}=\frac{AM}{MB}$$

نسبت $\frac{AQ}{QB}=\frac{AM}{MB}$ در مثلث AMB برقرار است، پس طبق عکس قضیه‌ی نیمسازها می‌توان نتیجه گرفت که MQ نیمساز زاویه‌ی AMB است. بنابراین:

$$۲\alpha+۲\beta=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha+\beta=۹۰^\circ \Rightarrow P\hat{M}Q=۹۰^\circ$$

۴۰- (گزینه ۴) مثلث ABD را در نظر بگیرید و رابطه‌ی تالس را برای این مثلث بنویسید:

$$\overset{\Delta}{ABD}: ME \parallel AB \Rightarrow \frac{MD}{BD}=\frac{ME}{AB}$$
$$\xrightarrow{\text{تفضیل درصورت}} \frac{BD-MD}{BD}=\frac{AB-ME}{AB}$$
$$\Rightarrow \frac{BM}{BD}=\frac{AB-ME}{AB}$$

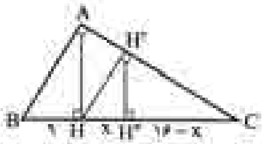
پس (۴) درست است.

۴۱- (گزینه ۴) کافی است یک‌بار قضیه‌ی ۴ در درس‌نامه را مطالعه کنید. طبق این قضیه خواهیم داشت:

$$\overset{\Delta}{ABC}: MN \parallel PQ \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AM}{AN}=\frac{MP}{NQ}=\frac{BP}{QC}$$

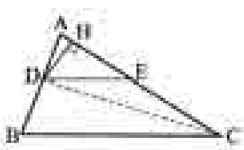
۴۲- (گزینه ۳) با توجه به روابط موجود در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}: \begin{cases} AC^۲=CH\times BC \Rightarrow AC^۲=۱۶\times ۲۵ \Rightarrow AC=۲۰ \\ AH^۲=BH\times CH \Rightarrow AH^۲=۹\times ۱۶ \Rightarrow AH=۱۲ \end{cases}$$



$$S_{ACH}=\frac{HH'\times AC}{۲}=\frac{AH\times CH}{۲}$$
$$\Rightarrow HH'=\frac{AH\times CH}{AC}=\frac{۱۲\times ۱۶}{۲۰}=\frac{۴۸}{۵}$$
$$\overset{\Delta}{HH'C}: HH'^۲=HH''\times HC \Rightarrow (\frac{۴۸}{۵})^۲=x\times ۱۶$$
$$\Rightarrow x=\frac{۴۸\times ۴۸}{۲۵\times ۱۶}=۵/۷۶$$

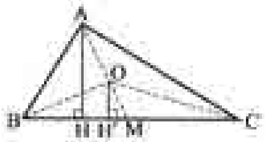
۴۳- (گزینه ۲) اگر دقت کنید عمود وارد بر ضلع AC از نقطه‌ی D، ارتفاع مشترک دو مثلث ADE و DEC می‌باشد.



بنابراین:

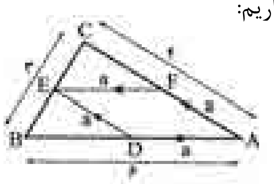
$$\overset{\Delta}{ABC}: DE \parallel BC$$
$$\Rightarrow \frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{۳}{۷} \quad (I)$$
$$\frac{S_{DEC}}{S_{ADE}}=\frac{\frac{۱}{۲}DH\times EC}{\frac{۱}{۲}DH\times AE}=\frac{EC}{AE}=\frac{AC-AE}{AE}=\frac{AC}{AE}-۱$$
$$\xrightarrow{(I)} \frac{۷}{۳}-۱=\frac{۴}{۳}$$
$$\frac{S_{DEC}}{S_{ADE}}=\frac{۴}{۳} \Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{DEC}}=\frac{۳}{۴}=٪۷۵$$

۴۴- (گزینه ۴) از نقاط O و A به ضلع BC عمودهای CH' و AH را وارد کرده و از قضیه‌ی تالس استفاده می‌کنیم:



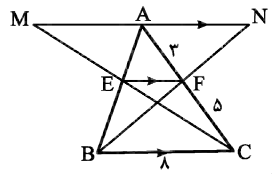
$$\overset{\Delta}{AMH}: OH' \parallel AH \Rightarrow \frac{OM}{AM}=\frac{OH'}{AH} \quad (I)$$
$$\frac{S'}{S}=\frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{۱}{۲}OH'\times BC}{\frac{۱}{۲}AH\times BC}=\frac{OH'}{AH} \quad (II)$$
$$(I),(II) \Rightarrow \frac{OM}{AM}=\frac{OH'}{AH}=\frac{S'}{S}$$

۴۵- (گزینه ۴) طبق فرض مسئله چهارضلعی ADEF لوزی است پس اضلاع آن با هم برابر است و اضلاع روبه‌رو با هم موازی‌اند. با استفاده از قضیه‌ی تالس داریم:



$$\overset{\Delta}{ABC}: DE \parallel AC \Rightarrow \frac{BD}{AB}=\frac{DE}{AC}$$
$$\Rightarrow \frac{۶-a}{۶}=\frac{a}{۴} \Rightarrow ۲۴-۴a=۶a$$
$$\Rightarrow ۱۰a=۲۴ \Rightarrow a=۲/۴=AD \Rightarrow AD=\frac{۱۲}{۵}$$

۴۶- (گزینه ۴) این تست از تمرین ۱۸ بخش ۱ گرفته شده است. ابتدا سراغ مثلث ABC رفته و طول EF را به دست می‌آوریم:



$$\overset{\Delta}{ABC}: EF \parallel BC \Rightarrow \frac{EF}{BC}=\frac{AF}{AC}$$
$$\Rightarrow \frac{EF}{۸}=\frac{۳}{۸} \Rightarrow EF=۳$$

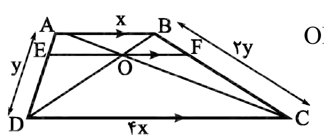
حال برای مثلث AMC رابطه‌ی تالس را می‌نویسیم:

$$\overset{\Delta}{AMC}: EF \parallel AM \Rightarrow \frac{EF}{AM}=\frac{FC}{AC} \Rightarrow \frac{۳}{AM}=\frac{۵}{۸}$$
$$\Rightarrow AM=\frac{۲۴}{۵}=۴/۸$$

می‌دانیم AM = AN ((چرا؟) خب به تمرین ۱۸ مراجعه کنید) بنابراین:

$$MN=AM+AN=۲AM=۹/۶$$

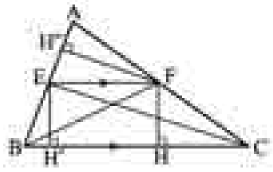
۴۷- (گزینه ۴) از تمرین ۱۶ آخر بخش ۱ داریم که اگر در هر ذوزنقه‌ای از محل برخورد اقطار خطوطی موازی قاعده‌ها رسم کنیم، همواره دو پاره‌خط ایجادشده با هم برابر است.



$$OE=OF$$

۴۸- (گزینه ۴) با توجه به مسئله‌ی ۴ درس‌نامه، می‌دانیم که از هر نقطه‌ی دلخواه بر روی میانه مانند A'، اگر خطوطی موازی اضلاع رسم کنیم، همواره $A'M$ میانه‌ی مثلث $A'B'C'$ خواهد بود. پس در مورد AA' نمی‌توان اظهار نظر کرد و هر اندازه‌ای می‌تواند به خود اختصاص دهد.

۴۹- گزینه‌ی ۳ با توجه به اثبات قضیه‌ی تالس که در درس‌نامه اشاره شده، می‌دانیم که فاصله‌ی بین دو خط موازی همیشه ثابت است و طبق آن مساحت مثلث‌های زیر نیز با هم برابر می‌باشند.



$$۱)\ \frac{EH'\times BC}{۲}=\frac{FH\times BC}{۲}\Rightarrow S_{BFC}=S_{BEC}$$

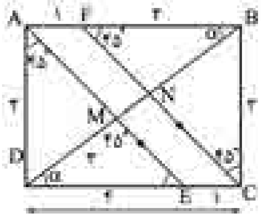
$$۲)\ \frac{HF\times EF}{۲}=\frac{H'E\times EF}{۲}\Rightarrow S_{CEF}=S_{BEF}$$

$$۴)\ S_{AEC}=S_{AFB}\Rightarrow S_{AEF}+S_{CEF}=S_{AEF}+S_{BEF}$$

پس ۳ نادرست است زیرا:

$$\begin{cases} S_{AEF}=\frac{FH''\times AE}{۲} \\ S_{BEF}=\frac{FH''\times BE}{۲} \end{cases}\Rightarrow AE\neq BE\Rightarrow S_{AEF}\neq S_{BEF}$$

۵۰- گزینه‌ی ۲ پاره‌خط‌های CF و AE نیمساز هستند پس مثلث‌های BCF و ADE قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین شوند. بنابراین:



$$\overset{\Delta}{BCF}:BC=BF=۳$$

$$\overset{\Delta}{ADE}:AD=DE=۳$$

از همنهشت‌بودن دو مثلث DME و FNB (بنا بر حالت «ز ض ز») می‌توان نتیجه گرفت: DM = BN

از قضیه‌ی تالس در مثلث CDN استفاده می‌کنیم:

$$\overset{\Delta}{CDN}:ME\parallel NC:\frac{DM}{DN}=\frac{DE}{DC}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب درمخرج}}\frac{DM}{DM+DN}=\frac{DE}{DE+DC}$$

$$\xrightarrow{DM=BN}\frac{DM}{BD}=\frac{۳}{۷}$$

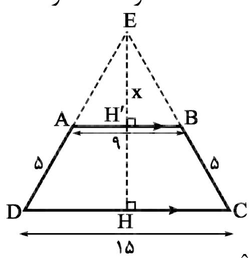
با توجه به قضیه‌ی فیثاغورس:

$$\overset{\Delta}{BCD}:BD^{۲}=BC^{۲}+CD^{۲}\Rightarrow BD^{۲}=۳^{۲}+۴^{۲}=۲۵\Rightarrow BD=۵$$

$$\frac{DM}{BD}=\frac{۳}{۷}\xrightarrow{BD=۵}\frac{DM}{۵}=\frac{۳}{۷}$$

$$\Rightarrow DM=\frac{۱۵}{۷}\quad,\quad MN=BD-۲DM=۵-\frac{۳۰}{۷}=\frac{۵}{۷}$$

۵۱- گزینه‌ی ۲ ابتدا ذوزنقه و نقاط را نام‌گذاری می‌کنیم تا بتوانیم راحت‌تر صحبت کنیم. در مثلث ECD خطوط AB و CD موازی‌اند پس داریم:



$$\overset{\Delta}{ECD}:AB\parallel CD\Rightarrow\frac{AE}{DE}=\frac{AB}{CD}$$

$$\Rightarrow\frac{AE}{AE+۵}=\frac{۹}{۱۵}\Rightarrow ۶AE=۴۵$$

$$\Rightarrow AE=۷/۵$$

مثلث EAB متساوی‌الساقین است ($\hat{A}=\hat{B}$) بنابراین ارتفاع وارد بر قاعده‌ی AB حکم میانه را نیز دارد. پس: $AH'=\frac{AB}{۲}=\frac{۹}{۲}=۴/۵$

حال طبق قضیه‌ی فیثاغورس داریم:

$$\overset{\Delta}{EAH'}:AE^{۲}=EH'^{۲}+AH'^{۲}\Rightarrow (۷/۵)^{۲}=x^{۲}+(۴/۵)^{۲}$$

$$\Rightarrow ۵۶/۲۵=x^{۲}+۲۰/۲۵\Rightarrow x^{۲}=۳۶\Rightarrow x=۶$$

۵۲- گزینه‌ی ۱ ابتدا از قضیه‌ی تالس در مثلث ABC استفاده کرده و نسبت‌های اضلاع را مشخص می‌کنیم:

$$\overset{\Delta}{ABC}:MN\parallel BC\Rightarrow\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{NC}{AN}=\frac{۳}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب‌درمخرج}}\frac{NC}{AN+NC}=\frac{۳}{۳+۲}\Rightarrow\frac{NC}{AC}=\frac{۳}{۵}\quad (I)$$

$$\overset{\Delta}{ABC}:MP\parallel AC\Rightarrow\frac{BM}{AM}=\frac{BP}{PC}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{PC}{BP}=\frac{۲}{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب‌درمخرج}}\frac{PC}{PC+BP}=\frac{۲}{۳+۲}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow\frac{PC}{BC}=\frac{۲}{۵}\quad (II)$$

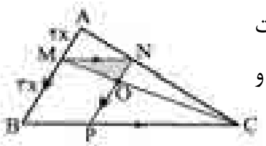
حال با استفاده از روابط محاسبه‌ی مساحت مثلث و متوازی‌الاضلاع به روش مثلثاتی داریم:

$$\frac{S_{MNCP}}{S_{ABC}}=\frac{NC\times PC\times\sin\hat{C}}{\frac{۱}{۲}AC\times BC\times\sin\hat{C}}=۲\times(\frac{NC}{AC})\times(\frac{PC}{BC})$$

$$=۲\times\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۵}=\frac{۱۲}{۲۵}\Rightarrow S_{MNCP}=\frac{۱۲}{۲۵}S_{ABC}=\frac{۴۸}{۱۰۰}S_{ABC}$$

$$\Rightarrow\frac{S_{MNCP}}{S_{ABC}}=\%۴۸$$

۵۳- گزینه‌ی ۱ ابتدا باید مشخص کرد برای به دست آوردن نسبت این دو مساحت از کجا شروع کرد و دنبال چه نسبت‌هایی بود، بنابراین:



$$\frac{S_{MNO}}{S_{MNPB}}=\frac{\frac{۱}{۲}MN\times NO\times\sin\hat{N}}{MN\times NP\times\sin\hat{N}}=\frac{۱}{۲}\frac{NO}{NP}\quad (I)$$

پس اگر نسبت $\frac{NO}{NP}$ مشخص شود، حل مسئله کاری ندارد. حال از رابطه‌ی تالس در مثلث‌های ABC و AMC استفاده می‌کنیم:

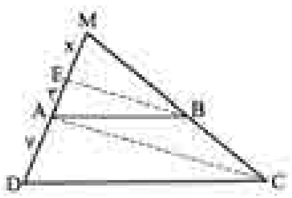
$$\overset{\Delta}{ABC}:NP\parallel AB\Rightarrow\frac{NP}{AB}=\frac{CN}{AC}$$

$$\overset{\Delta}{AMC}:NO\parallel AM\Rightarrow\frac{NO}{AM}=\frac{CN}{AC}$$

$$\Rightarrow\frac{NP}{AB}=\frac{NO}{AM}\Rightarrow\frac{NO}{NP}=\frac{AM}{AB}=\frac{۲}{۵}$$

$$\xrightarrow{(I)}\frac{S_{MNO}}{S_{MNPB}}=\frac{۱}{۲}\frac{NO}{NP}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۵}=\frac{۱}{۵}=\%۲۰$$

۵۴- گزینه‌ی ۲ با توجه به این‌که $AB\parallel CD$ و $BE\parallel AC$ داریم:



$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{AMC}: BE \parallel AC \Rightarrow \dfrac{ME}{AE} = \dfrac{MB}{BC} \\ \overset{\Delta}{MDC}: AB \parallel CD \Rightarrow \dfrac{MA}{AD} = \dfrac{MB}{BC}\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{ME}{AE} = \dfrac{MA}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{x+۳}{۷} \Rightarrow ۷x = ۳x + ۹ \Rightarrow ۴x = ۹ \Rightarrow x = ۲/۲۵$$

$$MD = ME + AE + AD = ۲/۲۵ + ۳ + ۷ = ۱۲/۲۵$$

-۵۵