فصل ۱: بردارها

سال		۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱	۹۲
تعداد	داخل	۲	۱	۱	۲	۲	۱	۱	۱	۲	۲	۱	۱
	خارج	برگزار نمی‌شد			۲	۲	۱	۲	۱	۲	۲	۱	۱

تعداد دفعات تکرار مباحث این فصل از سال ۸۰ به بعد

- ضرب مختلط ← ۷ بار
- مساحت مثلث و متوازی‌الاضلاع ← ۵ بار
- قرینه‌ی بردار نسبت به بردار ← ۵ بار
- ضرب داخلی و اتحادها ← ۵ بار
- زاویه‌ی بین دو بردار ← ۳ بار
- ضرب خارجی ← ۲ بار
- ضرب مضاعف ← ۱ بار
- تصویر بردار بر یک بردار ← ۱ بار

طراحان در این فصل: به ضرب‌ها (داخلی، خارجی، مختلط و مضاعف) توجه ویژه‌ای دارند و غالباً تیپ سؤالات به‌گونه‌ای است که کاربرد این نوع ضرب‌ها را از شما می‌خواهند؛ مثلاً در ضرب داخلی تسلط بر اتحادها، پیدا کردن زاویه، تصویر بردار بر بردار و همچنین قرینه‌ی بردار نسبت به بردار متداول‌ترین نوع سؤالات مطرح شده است. در ضرب خارجی محاسبه‌ی مساحت مثلث و متوازی‌الاضلاع و تسلط بر خواص ضرب خارجی مهم‌ترین موضوعات مطرح شده است. در ضرب مختلط محاسبه‌ی حجم متوازی‌السطوح (حتی وقتی که صفر می‌شود و سه بردار هم‌صفحه می‌شوند) و یا ارتفاع آن از مهم‌ترین مسائل مطرح شده تاکنون بوده است. البته در چارچوب این سؤالات ویژگی‌های ابتدایی این نوع ضرب‌ها نظیر جابه‌جایی، پخشی، جابه‌جایی دوری و همچنین مفهوم صفر شدن هر کدام از این ضرب‌ها و ... مورد توجه اصلی طراحان بوده است که البته تمرین‌های کتاب درسی معیار اصلی طرح این‌گونه سؤالات است که ما در این کتاب تمام آن‌ها را مورد واکاوی قرار داده‌ایم.

پیشنهاد ما: فقط روی تست‌های سال‌های گذشته و تمرینات کتاب درسی تأکید کنید و نیازی به بررسی نکات عجیب و غریب نیست، تست‌های این فصل فوق‌العاده تکرارپذیرند.

حرف آخر: تعداد تست‌های این فصل در ۵ سال اخیر ۱ یا ۲ تست بوده است و جالب این‌که وقتی یک تست از بردار مطرح می‌شود از ضرب خارجی به بعد است که معمولاً خواص ساده و ابتدایی ضرب داخلی را نیز در آن دخالت می‌دهند و زمانی‌که دو تست از این فصل طراحی می‌شود یکی مربوط به کاربردهای ضرب داخلی و دیگری مربوط به کاربردهای ضرب خارجی است. شماره تست‌های مربوط به این فصل در دفترچه کنکور در مواردی که یک تست مطرح می‌شود ۱۳۳ و در مواردی که دو تست مطرح می‌شود ۱۳۳ و ۱۳۴ است.

۱ مقدمات بردار

❶ ***تصویر کردن:*** برای تصویر کردن هر بُردار [یا نقطه و ...] روی محورها و صفحات مختصات، کافی است هر مؤلفه‌ی **غیر هم‌نام** با اسم محور یا صفحه را در مؤلفه‌های بُردار، **صفر** کنیم.

مثلاً : $A(۱,۲,۳) \xrightarrow{\text{تصویر روی } oy} A'(۰,۲,۰)$

❷ ***قرینه کردن:*** برای قرینه کردن هر چیزی [نقطه، بردار، خط و ...] نسبت به محورها، صفحات یا مبدأ مختصات، کافی است هر مؤلفه‌ی **غیر هم‌نام** با اسم آن‌ها را در آن چیز **قرینه** کنیم.

مثلاً : $A(۱,۲,۳) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به } oz} A'(-۱,-۲,۳)$ و $A(۱,۲,۳) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ مختصات}} A'(-۱,-۲,-۳)$

❸ ***اندازه‌ی بُردار:*** بردار $\vec{V}=(a,b,c)$ مفروض است، در این‌صورت اندازه‌ی بُردار $\vec{V}$ به‌صورت مقابل به‌دست می‌آید:

$$|\vec{V}|=\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}$$

۱ **اندازه‌ی تصویر بردار $\vec{V}=(۳,۱,۲)$ بر صفحه‌ی xoy کدام است؟**

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۱۰}$ ۳) $\sqrt{۱۳}$ ۴) $\sqrt{۱۴}$

دهمی ۷۰ | پاسخ: ۲

ابتدا بُردار را روی صفحه‌ی xoy تصویر می‌کنیم، یعنی z را به صفر تبدیل کرده و سپس اندازه‌ی آن را پیدا می‌کنیم:

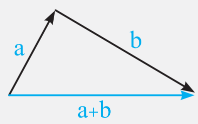
$$\vec{V'}=(۳,۱,۰) \Rightarrow |\vec{V'}|=\sqrt{۹+۱+۰}=\sqrt{۱۰}$$

۲ جمع و تفریق بردارها

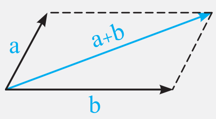
❶ ***جمع و تفریق بردارها:*** برای جمع و تفریق دو بردار، کافی است مؤلفه‌های نظیر در دو بُردار را با هم جمع و تفریق کنیم.

$$a \pm b=(x \pm x', y \pm y', z \pm z')$$

❷ ***تعبیر هندسی جمع:*** به شکل‌های زیر نگاه کنید، بارها آن‌ها را در فیزیک دیده‌اید:

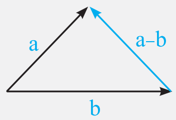


روش مثلث



روش متوازی‌الاضلاع

❸ ***تعبیر هندسی تفریق:*** به شکل مقابل خیره شوید؛ مات و مبهوت!!! دیدی؟!! جهت $a-b$ از b به سمت a است.



❹ ***بُردار $\overrightarrow{AB}$:*** اگر A و B دو نقطه در فضا باشند، آن‌گاه مؤلفه‌های بُردار هم‌ارز با پیکان $\overrightarrow{AB}$ به‌صورت مقابل به‌دست می‌آید:

$$\overrightarrow{AB}=B-A$$

❺ ***شرط موازی بودن دو بُردار:*** اگر $a=(x,y,z)$ و $b=(x',y',z')$ دو بُردار باشند، شرط موازی بودن آن‌ها این است که $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مضربی از هم باشند یا به عبارتی:

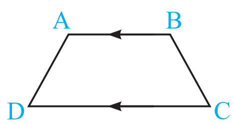
$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}$$

۲ **اگر چهار بُردار $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$، $\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{OD}$ در تساوی $\overrightarrow{OA}+K\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+K\overrightarrow{OD}$ صدق کنند، چهارضلعی ABCD همواره کدام است؟ $(K>۱)$**

۱) مستطیل ۲) ذوزنقه ۳) لوزی ۴) متوازی‌الاضلاع

دهمی ۷۰ | پاسخ: ۲

پیکان‌های داده شده را برحسب نقاط ابتدایی و انتهایی آن‌ها می‌نویسیم:



$$A-\cancel{O}+K(C-O)=B-\cancel{O}+K(D-O) \Rightarrow A+KC=B+KD$$

$$\Rightarrow A-B=KD-KC \Rightarrow \overrightarrow{BA}=K\overrightarrow{CD} \xrightarrow{k>۱} \overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{CD} \Rightarrow$$ دو بردار موازی و ناهم‌اندازه $\Rightarrow$ ذوزنقه

۳ ضرب داخلی (درونی، نقطه‌ای، عددی)

۱ تعریف: اگر $a=(x,y,z)$ و $b=(x',y',z')$ باشد، آن‌گاه ضرب داخلی آن‌ها به‌صورت مقابل به‌دست می‌آید که حاصل آن همواره یک عدد است:

$$a.b=xx'+yy'+zz'$$

۲ قضیه: ضرب داخلی دو بردار a و b که زاویه‌ی بین آن‌ها θ باشد، از رابطه‌ی مقابل قابل محاسبه است:

$$a.b=|a||b|\cos\theta$$

۳ بردارهای $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$: این بُردارها، بُردارهای یکه‌ی محورهای مختصات نام دارند به‌طوری که $\vec{i}=(۱,۰,۰)$ و $\vec{j}=(۰,۱,۰)$ و $\vec{k}=(۰,۰,۱)$ می‌باشند و هر بردار دلخواهی را برحسب ترکیب خطی آن‌ها می‌توان نوشت یعنی:

$$V=(a,b,c)\Rightarrow V=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$$

۳ به‌ازای کدام مقدار a، حاصل‌ضرب داخلی دو بردار $a\vec{i}-۳\vec{j}$ و $-۲\vec{i}+۵\vec{j}$ برابر ۳- است؟

داخل تجربی ۸۶ | پاسخ: ۱

۱) ۶-　　۲) ۴-　　۳) $\frac{۳}{۵}$　　۴) ۳

$$\begin{cases}\vec{a}=(a,-۳,۰)\\ \vec{b}=(-۲,۵,۰)\end{cases}\Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=-۲a-۱۵+۰=-۳\Rightarrow ۲a=-۱۲\Rightarrow a=-۶$$

۴ حاصل‌ضرب داخلی دو بردار غیرصفر با اندازه‌های مساوی، برابر با مربع اندازه‌ی هریک از دو بردار است. زاویه‌ی بین دو بُردار چند درجه است؟

دهمی ۷۰ | پاسخ: ۱

۱) صفر　　۲) ۳۰°　　۳) ۴۵°　　۴) ۹۰°

$$a.b=|a|^۲\xrightarrow{|\vec{a}|=|\vec{b}|}|a||a|\cos\theta=|a|^۲\Rightarrow\cos\theta=۱\Rightarrow\theta=۰^\circ$$

۴ اتحادها و خواص

۱ ویژگی‌ها: ضرب داخلی دو بردار، دارای خاصیت‌های مهم زیر است:

جابه‌جایی ۲ $a.b=b.a$　　رفتار عددی ۱ $a.a=|a|^۲$

توزیع‌پذیری ۳ $a.(b\pm c)=a.b\pm a.c$

۲ اتحادها: تمام اتحادهای جبری که دارای توان ۲ هستند برای بُردارها برقرارند، با این تفاوت که ضرب‌ها به ضرب داخلی تبدیل می‌شوند و هرجا توان ۲ داریم به جای پرانتز، اندازه می‌گذاریم یعنی داریم:

۱ $|a\pm b|^۲=|a|^۲+|b|^۲\pm ۲a.b\Rightarrow|a\pm b|^۲=|a|^۲+|b|^۲\pm ۲|a||b|\cos\theta$

۲ $|a+b+c|^۲=|a|^۲+|b|^۲+|c|^۲+۲(a.b+a.c+b.c)$　　۳ $(a+b).(a-b)=|a|^۲-|b|^۲$

۵ اگر $|a|=۲\sqrt{۶}$، $|b|=۵$ و $|a.b|=۰$ باشد، اندازه‌ی بردار $a-b$ کدام است؟　*اثبات قضیه‌ی ۲ ص ۲۰ کتاب درسی*

داخل ۸۳ | پاسخ: ۴

۱) ۳　　۲) ۴　　۳) ۶　　۴) ۷

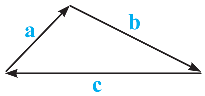
$$|a-b|^۲=|a|^۲+|b|^۲-۲a.b\Rightarrow|a-b|^۲=(۲\sqrt{۶})^۲+(۵)^۲-۲\times۰=۴۹\Rightarrow|a-b|=۷$$

۶ سه بُردار a و b و c با اندازه‌های ۳ و ۴ و ۷ واحد در رابطه‌ی $a+b+c=\overline{0}$ صدق می‌کنند. مقدار $a.b+a.c+b.c$ کدام است؟　*تمرین ۴ ص ۲۴ کتاب درسی*

خارج ۸۷ | پاسخ: ۱

۱) ۳۷-　　۲) ۱۹-　　۳) ۱۹　　۴) ۳۷

$$|a+b+c|^۲=|a|^۲+|b|^۲+|c|^۲+۲\underbrace{(a.b+a.c+b.c)}_{x}\Rightarrow ۰=۹+۱۶+۴۹+۲(x)\Rightarrow x=-۳۷$$



۷ در شکل روبه‌رو، اندازه‌های بُردارهای a و b و c به‌ترتیب ۳ و ۵ و ۶ است. حاصل‌ضرب داخلی دو بردار a و b کدام است؟

تمرین ۴ ص ۲۴ کتاب درسی

داخل ۸۰ | پاسخ: ۳

۱) ۲− ۲) ۱− ۳) ۱ ۴) ۲

از روی شکل می‌توان دریافت که $a+b+c=\overline{o}$ است پس:

$$a+b+c=\overline{o}\Rightarrow a+b=-c\Rightarrow |a+b|=|-c|\Rightarrow |a+b|^2=|c|^2$$

$$\Rightarrow |a|^2+|b|^2+2a.b=|c|^2\Rightarrow 9+25+2a.b=36\Rightarrow a.b=1$$

۵ اتحادهای فرعی

دو اتحاد فرعی زیر که یکی از آن‌ها در تمرینات کتاب درسی آمده است از اتحادهای اصلی به‌دست می‌آیند:

۱) $|a+b|^2+|a-b|^2=2(|a|^2+|b|^2)$ ۲) $|a+b|^2-|a-b|^2=4a.b$

۸ اگر $|a+b|=\sqrt{6}$ و $|a-b|=4$ و $|a|=\sqrt{3}$ باشد، اندازه‌ی بُردار b کدام است؟

تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۳

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{10}$

۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{7}$

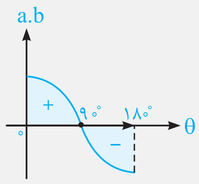
$$|a+b|^2+|a-b|^2=2(|a|^2+|b|^2)\Rightarrow 6+16=2(3+|b|^2)\Rightarrow 11=3+|b|^2\Rightarrow |b|=2\sqrt{2}$$

۶ شرط عمود بودن

با توجه به این‌که $a.b=|a||b|\cos\theta$ می‌باشد، اگر $\theta=90^\circ$ باشد، $a.b=0$ می‌شود، پس دو بردار a و b بر هم عمودند اگر و تنها اگر: $\boxed{a.b=0}$

توجه! رابطه‌ی $a.b=|a||b|\cos\theta$ همچنین نشان می‌دهد با افزایش زاویه‌ی دو بردار، ضرب داخلی مرتباً کاهش می‌یابد. به نمودار خیره شو!!!

در زاویه‌های حاده، ضرب داخلی مثبت و در زاویه‌های منفرجه، ضرب داخلی منفی است.



۹ در کدام حالت حاصل‌ضرب عددی بُردار غیرصفر a در مجموع دو بردار غیرصفر X و Y صفر نمی‌باشد؟

مثال ۲ ص ۲۴ کتاب درسی

داخل ۸۶ | پاسخ: ۲

۱) بردار X قرینه‌ی بردار Y
۲) بردار a فقط بر یکی از دو بردار X یا Y عمود
۳) سه بردار دو به دو عمود بر هم
۴) بردار a بر صفحه‌ی دو بردار X و Y عمود

$$a.(X+Y)=a.X+a.Y$$

واضح است اگر بردار a فقط بر یکی از دو بردار X یا Y عمود باشد یکی از دو عبارت a.X یا a.Y صفر می‌شود و دیگری غیرصفر، بنابراین جمع آن‌ها هیچگاه صفر نخواهد شد امّا اگر بردار a بر هر دو بردار X و Y عمود باشد یا X قرینه‌ی Y باشد، حاصل صفر می‌شود. درباره‌ی گزینه‌ی (۴) باید بدانیم که اگر خطی بر یک صفحه عمود باشد بر تمام خط‌های آن صفحه عمود است یعنی چون a بر صفحه‌ی دو بردار X و Y عمود است پس بر X و Y نیز عمود است.

۱۰ دو بردار با تصویرهای $a=(1,\alpha+1,2\alpha)$ و $b=(2,0,0,-1)$ مفروض‌اند. به‌ازای کدام مقدار α بردارهای a+b و a−b بر هم عمودند؟

تمرین ۱۳ ص ۲۵ کتاب درسی

داخل ۸۹ | پاسخ: ۲

۱) ۱٫۰/۴− ۲) ۱٫۰/۶− ۳) ۱٫۰/۴ ۴) ۱٫۰/۶

$$a+b\perp a-b\Rightarrow (a+b).(a-b)=0\Rightarrow |a|^2-|b|^2=0\Rightarrow |a|^2=|b|^2$$

$$\Rightarrow 1+(\alpha+1)^2+(2\alpha)^2=4+0+1\Rightarrow (\alpha+1)^2+(2\alpha)^2=4\xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}}\alpha=-1\,,\,0/6$$

۱۱ اگر بردار $a=(m,2,-1)$ و $|b|=\sqrt{41}$ و دو بردار $a+b$ و $a-b$ عمود بر هم باشند، مقدار مثبت m کدام است؟

داخل ۸۵ | پاسخ: ۴

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶ — تمرین ۱۳ ص ۲۵ کتاب درسی

$$a+b\perp a-b\Rightarrow (a-b).(a+b)=0\Rightarrow |a|^2-|b|^2=0\Rightarrow |a|^2=|b|^2\Rightarrow m^2+4+1=41\Rightarrow m=\pm 6$$

جمع‌بندی: *بعد از تحقیقات زیاد معلوم شده که طراحان کنکور تا این‌جای فصل، از اتحادها خیلی خوششان می‌آید، پس حتماً آن‌ها را مطالعه کنید.*

۷ در جریان باشید ...

۱ طرفین هر تساوی برداری را می‌توان در یک بردار دلخواه ضرب داخلی کرد: $a=b\Rightarrow a.c=b.c$

۲ در ضرب داخلی بردارها، قانون حذف همواره برقرار نیست: $a.c=b.c \not\Rightarrow a=b$

تذکر! از $a.c=b.c$ می‌توان سه نتیجه گرفت که یکی از آن‌ها $a=b$ است و کلاً به شرح زیر است:

$$a.c=b.c\Rightarrow a.c-b.c=0\Rightarrow (a-b).c=0\Rightarrow\begin{cases}a-b=\overline{0}\Rightarrow a=b\\(a-b)\perp c\\c=\overline{0}\end{cases}$$

۱۲ اگر a و b و c سه بردار غیرصفر باشند و زاویه‌ی بین b و c برابر 30° باشد، از تساوی $a.b=a.c$ کدام نتیجه حاصل می‌شود؟

تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۳

۱) $b=c$ ۲) $a\parallel b-c$ ۳) $a\perp(b-c)$ ۴) $a=b-c$

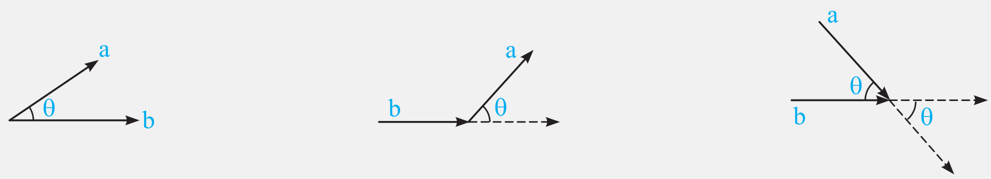
a، b و c که غیرصفرند و چون زاویه‌ی بین b و c برابر 30° است، پس $b\neq c$، بنابراین طبق درسنامه می‌توان گفت: $a\perp(b-c)$.

۸ زاویه‌ی دو بردار

اگر a و b دو بردار باشند و زاویه‌ی بین آن‌ها θ باشد، آن‌گاه همیشه θ زاویه‌ای است در بازه‌ی $[0,\pi]$، که از رابطه‌ی مقابل به‌دست می‌آید:

$$\boxed{\cos\theta=\frac{a.b}{|a||b|}}$$

توجه! زاویه‌ی بین دو بردار، زاویه‌ای است که دو بردار هم ابتدا با هم می‌سازند، به این شکل‌ها یه ذره خیره شو و خوب نگاه کن ...



۱۳ اگر $a=2i+3j+k$ و $b=i-j+k$ باشد، آن‌گاه کسینوس زاویه‌ی بین دو بردار $a-b$ و b کدام است؟

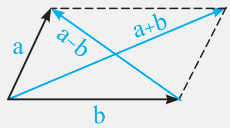
داخل ۸۱ | پاسخ: ۱

۱) $-\sqrt{\frac{3}{17}}$ ۲) $-\sqrt{\frac{5}{17}}$ ۳) $\sqrt{\frac{3}{17}}$ ۴) $\sqrt{\frac{5}{17}}$ — مثال ۳ ص ۱۰ و مثال ۶ ص ۲۳ کتاب درسی

$$\begin{cases}a-b=i+4j=(1,4,0)\\b=i-j+k=(1,-1,1)\end{cases}\Rightarrow\cos\theta=\frac{1\times1+4\times(-1)+0\times1}{\sqrt{1^2+4^2+0^2}\times\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{-3}{\sqrt{17}\times\sqrt{3}}=-\sqrt{\frac{3}{17}}$$

۹ در جریان باش ...

اگر a و b دو ضلع مجاور یک متوازی‌الاضلاع باشند، بردارهای $a+b$ و $a-b$ قطرهای این متوازی‌الاضلاع هستند.



دو نتیجه!

۱) اگر $a+b$ و $a-b$ بر هم عمود باشند، آن‌گاه متوازی‌الاضلاع تبدیل به لوزی می‌شود، پس $|a|=|b|$.

۲) اگر $|a+b|=|a-b|$ آن‌گاه متوازی‌الاضلاع تبدیل به مستطیل می‌شود، پس $a\perp b$.

۱۴ بر روی دو بردار $a=3i+3j$ و $b=i-j-2k$ متوازی‌الاضلاعی ساخته شده است. کسینوس زاویه‌ی بین دو قطر این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

خارج ۹۲ | پاسخ: ۳

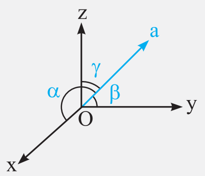
شکل ۹ ص ۱۰ و شکل ۱۱ ص ۱۱ و مثال ۵ ص ۲۱ کتاب درسی

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

$$\begin{cases} a+b=(4,2,-2) \\ a-b=(2,4,2) \end{cases} \Rightarrow \cos\theta=\frac{(a+b).(a-b)}{|a+b||a-b|}=\frac{4\times2+2\times4-2\times2}{\sqrt{16+4+4}\times\sqrt{4+16+4}}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$$

۱۰ زاویه‌ی بردار با محورهای مختصات

اگر بُردار $a=(x,y,z)$ با محورهای مختصات زاویه‌های α و β و γ بسازد، آن‌گاه داریم:



$$\cos\alpha=\frac{x}{|a|} \qquad \cos\beta=\frac{y}{|a|} \qquad \cos\gamma=\frac{z}{|a|}$$

این کسینوس‌ها را کسینوس‌های هادی بُردار a می‌نامند.

۱۵ اگر بُردار $a=(1,-1,m)$ با محور z ها زاویه‌ی 45° بسازد، کسینوس زاویه‌ی این بُردار با محور x ها کدام است؟

خارج ۸۵ | پاسخ: ۳

مثال ۶ ص ۲۳ کتاب درسی

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|a|}\Rightarrow\cos45^\circ=\frac{m}{\sqrt{1+1+m^2}}\Rightarrow\frac{m}{\sqrt{m^2+2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow m=\sqrt{2}$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{|a|}=\frac{1}{\sqrt{1+1+2}}=\frac{1}{2}$$

۱۱ رابطه‌ی بین کسینوس‌های هادی

اگر زاویه‌ی بُردار a با محورهای مختصات α و β و γ باشد، آن‌گاه رابطه‌ی زیر بین کسینوس‌های آن‌ها برقرار است:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

۱۶ چند بُردار وجود دارد که با محورهای مختصات زوایای $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{3}$ بسازد؟

تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۴

۱) یک ۲) دو

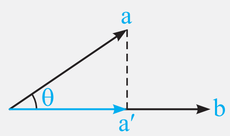
۳) بی‌شمار ۴) وجود ندارد

$$\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{3\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\neq1\Rightarrow$$ چنین برداری وجود ندارد.

۱۲ تصویر قائم بردار a بر بردار b

اگر a' تصویر قائم بردار a بر بردار b باشد آن‌گاه a' همیشه مضربی از b به شکل زیر است:

$$a'=\left(\frac{a.b}{|b|^2}\right)b$$



۱۷ تصویر قائم بردار $\vec{a}=(۰،-۳،۶)$ روی امتداد بردار $\vec{b}=(۲،-۱،-۲)$ کدام است؟ تمرین ۳ ص ۲۴ کتاب درسی

داخل ۸۲ | پاسخ: ۲

۱) $(۲،-۱،-۲)$ ۲) $(-۲،۱،۲)$ ۳) $(۴،-۲،۴)$ ۴) $(۲،۳،-۱)$

$$a'=\left(\frac{a.b}{|b|^۲}\right)b=\left(\frac{۰+۳-۱۲}{۴+۱+۴}\right)b=-b\Rightarrow$$ گزینه‌ی (۲)

۱۸ اگر $a=(۱،-۳،۴)$، $b=(۳،-۴،۲)$ و $c=(-۱،۱،۴)$ سه بردار باشند، تصویر قائم a بر امتداد $b+c$ کدام است؟

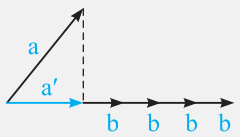
تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۲

۱) $۵(۲،-۳،۶)$ ۲) $\frac{۵}{۷}(۲،-۳،۶)$ ۳) $۷(۲،-۳،۶)$ ۴) $\frac{۱}{۷}(۲،-۳،۶)$

$$\begin{cases}a=(۱،-۳،۴)\\ x=b+c=(۲،-۳،۶)\end{cases}\Rightarrow a'=\left(\frac{a.x}{|x|^۲}\right)x=\left(\frac{۲+۹+۲۴}{۴+۹+۳۶}\right)x=\frac{۳۵}{۴۹}x=\frac{۵}{۷}x\Rightarrow$$ گزینه‌ی (۲)

۱۳ قد دراز الکی...

این بردار b رو می‌گیم دیلاق!!! نیگاش کن ... وقتی بردار a را روی بردار b تصویر می‌کنیم اندازه‌ی بردار b (یعنی دراز یا کوتاه بودن آن) هیچ تأثیری در محاسبه‌ی a' ندارد و فقط راستای b مهم است، یعنی اگر بردار b را در هر عدد مثبت یا منفی ضرب کنید جواب تصویر تغییر نخواهد کرد.



۱۹ تصویر قائم بردار $a=(۴،۳،۲)$ بر امتداد برداری که با قسمت مثبت محورهای مختصات زوایای حاده‌ی مساوی می‌سازد، کدام است؟

تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۳

۱) $(۱،۱،۱)$ ۲) $(۲،۲،۲)$ ۳) $(۳،۳،۳)$ ۴) $(۴،۴،۴)$

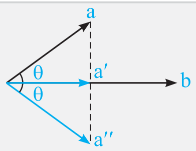
چون اندازه‌ی بردار b اهمیت ندارد، بنابراین برداری که با هر سه محور، زوایای حاده‌ی مساوی می‌سازد را می‌توان هر بردار با سه مؤلفه‌ی یکسان فرض کرد. مثلاً $b=(۱،۱،۱)$. در این صورت داریم:

$$a'=\left(\frac{a.b}{|b|^۲}\right)b=\left(\frac{۴+۳+۲}{۱+۱+۱}\right)b=۳b=(۳،۳،۳)$$

۱۴ قرینه‌ی بردار a نسبت به بردار b

اگر a'' قرینه‌ی بردار a نسبت به بردار b باشد و a' تصویر a بر بردار b، در این‌صورت برای پیدا کردن a'' ابتدا باید a' را پیدا کرد و سپس:

$$\boxed{a''=۲a'-a}$$



۲۰ قرینه‌ی بردار $a=j+۳k$ نسبت به راستای $b=i-k$ کدام است؟

دهمی ۷۰ | پاسخ: ۲

۱) $-i+۳k$ ۲) $-۳i-j$ ۳) $۲i-j+k$ ۴) $۳i+j$

$$a'=\left(\frac{a.b}{|b|^۲}\right)b=\left(\frac{۰+۰-۳}{۱+۱}\right)b=-\frac{۳}{۲}(i-k)\Rightarrow a''=۲a'-a=-۳(i-k)-(j+۳k)=-۳i-j$$

۲۱ قرینه‌ی بردار $a=(-۲،۰،۱)$ نسبت به امتداد بردار $b=(۱،۲،-۱)$ کدام بردار است؟ مثال ۳ ص ۲۱ کتاب درسی

خارج ۸۷ | پاسخ: ۱

۱) $(۱،-۲،۰)$ ۲) $(-۱،۲،۰)$ ۳) $(۰،۲،۱)$ ۴) $(۰،-۲،۱)$

$$a'=\left(\frac{a.b}{|b|^۲}\right)b=\left(\frac{-۲+۰-۱}{۱+۴+۱}\right)b=-\frac{۱}{۲}b\Rightarrow a''=۲a'-a=-b-a=(۱،-۲،۰)$$

۱۵ تشخیص a'' از روی گزینه‌ها

برای تشخیص a'' از روی گزینه‌ها می‌توان به شکل زیر هم عمل کرد.

۱ باید $|a|=|a''|$ باشد.

۲ باید $a+a''$ مضربی از b باشد.

۲۲ قرینه‌ی بردار $a=(۱،-۳،۲)$ نسبت به امتداد بردار a'' = $b=(۱،۲،۰)$ کدام بردار است؟ مثال ۳ ص ۲۱ کتاب درسی

خارج ۷۸ | پاسخ: ۱

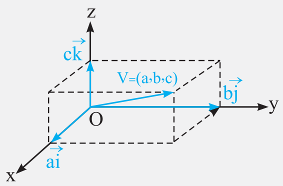
۱) $(-۳،-۱،-۲)$ ۲) $(-۱،-۲،۲)$ ۳) $(۰،۵،-۲)$ ۴) $(۱،۷،-۲)$

اندازه‌ی بردار a برابر است با: $|a|=\sqrt{۱+۹+۴}$ که تنها گزینه‌ی (۱) با آن هم‌اندازه است. البته اگر $a+a''$ را به‌دست آوریم $(-۲،-۴،۰)$ به‌دست می‌آید که $-۲b$ است.

۱۶ حرف آخر در قرینه

نه تنها a'' قرینه‌ی a نسبت به b است بلکه a هم قرینه‌ی a'' نسبت به b است.

تذکر: وقتی گفته می‌شود برداری به تصویر $(۱،-۲،۳)$ یعنی برداری که تصویر آن روی محور xها ۱ و روی محور yها -۲ و روی محور zها برابر ۳ است. یعنی مؤلفه‌های هر برداری مُعرف **اندازه‌ی جبری تصویر بردار** بر محورهای مختصات هستند.



۲۳ قرینه‌ی بردار a نسبت به امتداد بردار $۲i-j+k$ برداری به تصویر $(۱،-۲،۵)$ است. تصاویر بردار a کدام است؟ مثال ۳ ص ۲۱ کتاب درسی

خارج ۷۹ | پاسخ: ۳

۱) $(-۱،۵،۲)$ ۲) $(۲،۵،-۱)$ ۳) $(۵،-۱،-۲)$ ۴) $(۵،-۲،۱)$

اول بردارها را نام‌گذاری کنیم همان‌طوری که همیشه صدایشان می‌کردیم، $b=۲i-j+k$ و $a''=(۱،-۲،۵)$.

$$a'=\left(\frac{a''.b}{|b|^۲}\right)b=\left(\frac{۲+۲+۵}{۴+۱+۱}\right)b=\frac{۳}{۲}b$$

$$a=۲a'-a''=۳b-a''=(۶،-۳،۳)-(۱،-۲،۵)=(۵،-۱،-۲)$$

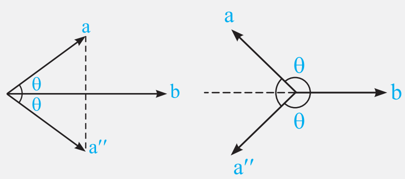
توجه: چون همه‌ی گزینه‌ها هم‌اندازه بودند برای تشخیص از روی گزینه‌ها باید تک‌تک آن‌ها را با a'' جمع می‌کردیم تا ببینیم کدام مضرب b می‌شود.

جمع‌بندی: *در سؤالاتی که قرینه‌ی بردار a نسبت به بردار b خواسته می‌شود فقط یک گزینه هست که هم با a هم‌اندازه است و هم حاصل جمعش با a مضرب b می‌شود. پس اگر مجبور شدید، دست به دامن گزینه‌ها شوید.*

۱۷ زاویه‌ی a و a''

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید زاویه‌ی بین a و a'' برابر است با ۲θ که θ زاویه‌ی بین a و b است. اما اگر زاویه‌ی a و b منفرجه باشد ۲θ را از ۳۶۰° کم می‌کنیم.

توجه: زاویه‌ی بین هر دو برداری همواره از ۱۸۰° کم‌تر است. اصلاً آقا زاویه‌ی بالای ۱۸۰° توی **بردار** نداریم اصلاً زاویه باید کمتر از ۱۸۰° باشه ...



۲۴ قرینه‌ی بردار $a=i-j$ نسبت به بردار $b=۲i-j+۲k$ را c می‌نامیم. ضرب داخلی دو بردار a و c کدام است؟

مثال ۳ ص ۲۱ و شکل ۲ ص ۱۶ کتاب درسی

خارج ۹۰ | پاسخ: ۲

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) صفر ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

$$\begin{cases} a.c=|a||c|\cos ۲\theta=|a||a|\cos ۲\theta=|a|^۲\cos ۲\theta \\ \cos\theta=\dfrac{a.b}{|a||b|}=\dfrac{۲+۱+۰}{\sqrt{۱+۱}\times\sqrt{۴+۱+۴}}=\dfrac{۳}{\sqrt{۲}\times ۳}=\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\theta=۴۵^\circ \end{cases}\Rightarrow a.c=|a|^۲\times\cos ۹۰^\circ=۰$$

۱۸ بردار جهت (بردار یکه)

اگر $a=(x،y،z)$ یک بردار غیر صفر در فضا باشد آن‌گاه بردار جهت آن به‌صورت مقابل به‌دست می‌آید:

$$\boxed{e_a=\frac{۱}{|a|}a=\left(\frac{x}{|a|},\frac{y}{|a|},\frac{z}{|a|}\right)}$$

تذکر: e_a را می‌توان به‌صورت $e_a=(\cos\alpha،\cos\beta،\cos\gamma)$ هم بیان کرد.

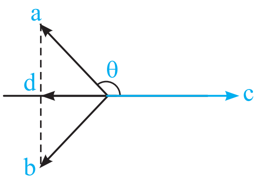
۲۵ دو بُردار $a = 3i - 6j + 3k$ و $b = -7i + 4j + k$ نسبت به بردار c قرینه‌ی یک دیگرند. اگر زاویه‌ی بین دو بردار a و c در بازه‌ی $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ باشد، آن‌گاه بردار جهت بردار c کدام است؟

داخل ۹۰ | پاسخ: ۱

شکل ۲ ص ۱۶ و فرمول ص ۱۲ کتاب درسی

۱) $\frac{1}{3}(2i + j - 2k)$ ۲) $\frac{1}{3}(-2i - j + 2k)$ ۳) $\frac{1}{3}(2i - 2j + k)$ ۴) $\frac{1}{3}(-2i + 2j + k)$

این تست از لحاظ ساختاری دچار اشکال است، چون a و b نسبت به c قرینه‌ی هم هستند، پس باید $|a| = |b|$ باشد که نیست ولی ما فرض می‌کنیم که هست. در این صورت راه‌حل به‌صورت زیر ادامه پیدا می‌کرد:



$$b = 2d - a \Rightarrow d = \frac{a+b}{2} = (-2, -1, 2) \Rightarrow e_d = \frac{1}{|d|}d = \frac{1}{3}(-2, -1, 2)$$

$$e_c = -e_d \Rightarrow e_c = -\frac{1}{3}(-2, -1, 2) = \frac{1}{3}(2, 1, -2) \Rightarrow \text{(۱) گزینه‌ی}$$

به هر حال گزینه‌ی (۱) با چشم‌پوشی از اشتباه طراح به‌دست آمده ولی این تست جواب درست ندارد!!!

۱۹ نامساوی کوشی ـ شوارتز

اون کوشی با شوارتز خودشونو کُشتن فهمیدن $|\cos\theta| \le 1$ و در فرمول زاویه $\cos\theta = \frac{a.b}{|a||b|}$ باید صورت از مخرج کم‌تر باشه و برای هر دو بردار دلخواه یک نامساوی عجیب به دست آوردن. عجب!!! عجب!!!

$$\boxed{|a.b| \le |a||b|}$$

۲۶ اگر $a = (x, y, z)$ و $b = (2, 1, 2)$ و حاصل‌ضرب داخلی آن‌ها برابر ۶ باشد، کم‌ترین مقدار برای $x^2 + y^2 + z^2$ کدام است؟

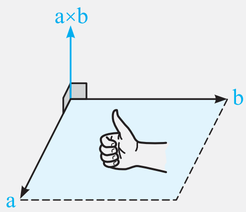
تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۱

۱) ۴ ۲) $\frac{2}{3}$

۳) ۲ ۴) $\frac{1}{2}$

$$|a.b| \le |a||b| \Rightarrow 6 \le \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \times \sqrt{4 + 1 + 4} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \ge 4$$

۲۰ ضرب خارجی



اگر $a = (x, y, z)$ و $b = (x', y', z')$ دو بردار باشند، آن‌گاه حاصل ضرب خارجی آن‌ها یک بردار است که عمود بر هر دو بردار a و b (و در واقع عمود بر صفحه‌ی شامل a و b) می‌باشد و به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\boxed{\begin{matrix} a = (x, y, z) \\ b = (x', y', z') \end{matrix} \Rightarrow a \times b = \left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \right)}$$

برای محاسبه‌ی ضرب خارجی، دو بردار را زیر هم می‌نویسیم. برای به‌دست آوردن مؤلفه‌ی x، xهای دو بردار را نادیده می‌گیریم و دترمینان ماتریس 2×2ی باقی‌مانده را به‌دست می‌آوریم و ... فقط در محاسبه‌ی مؤلفه‌ی y، چون هر کی دوست داری منفی یادت نره. (توی کلاس‌ها ما به بچه‌ها می‌گیم دترمینان وسطی را برعکس بگیرید یعنی حاصل‌ضرب قطر فرعی را منهای قطر اصلی کنید. اصلاً یه لحظه فکر کن چُلمن شدی).

جهت ضرب خارجی: جهت بردار ضرب خارجی هم بر اساس قانون دست راست به‌دست می‌آید. یعنی اگر کف دست راست را در جهت a باز کرده و در جهت b ببندیم، انگشت شست جهت $a \times b$ را نشان می‌دهد.

۲۷ اگر $a = 2i + 2j$ و $b = i + 2k$ باشد، اندازه‌ی بردار $a \times b$ کدام است؟

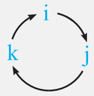
دهمی ۷۰ | پاسخ: ۳

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

$$\begin{cases} a = (2, 2, 0) \\ b = (1, 0, 2) \end{cases} \Rightarrow a \times b = (4 - 0, \underbrace{0 - 4}_{\text{چلمن شدی}}, 0 - 2) = (4, -4, -2) \Rightarrow |a \times b| = \sqrt{16 + 16 + 4} = 6$$

۲۱ ضرب خارجی i و j و k

برای ضرب خارجی بردارهای i و j و k نیازی به زیر هم نوشتن آن‌ها نیست و می‌توانید از دایره‌ی ساعت‌گرد مقابل استفاده کنید. اگر ضرب دو بردار در جهتِ دایره بود جواب، سومی است و اگر در خلافِ جهتِ دایره بود جواب، قرینه‌ی سومی است.



۲۸ اگر i و j و k بردارهای واحد باشند، حاصل $(i\times(i\times j))\times k$ کدام است؟ تمرین ۶ ص ۳۳ کتاب درسی

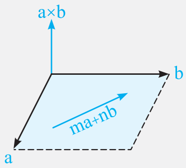
داخل ۹۱ | پاسخ: ۴

۱) صفر ۲) $-k$ ۳) j ۴) $-i$

$$((i\times\underbrace{(i\times j)}_{k})\times k = \underbrace{\quad}_{-j} -j\times k=-i$$

۲۲ در جریان باش ...

اگر برداری بر یک صفحه عمود باشد بر تمام بردارهای آن صفحه عمود است. حال اگر بردارهای سازنده‌ی صفحه، a و b باشند، بردارهای درون آن صفحه به شکل $m\vec{a}+n\vec{b}$ هستند. بنابراین $a\times b$ بر همه‌ی آن‌ها عمود است.



۲۹ دو بردار $a=(1,-2,0)$ و $b=(2,4,m)$ مفروض‌اند. به‌ازای کدام مقادیر m، حاصل $(a+b).(a\times b)$ برابر صفر است؟ شکل ۱ ص ۲۹ و قضیه‌ی ۱ ص ۲۸ کتاب درسی

داخل ۸۸ | پاسخ: ۴

۱) فقط $m=-2$ ۲) فقط $m=\pm 2$

۳) هیچ مقدار m ۴) هر عدد حقیقی m

بردار $a\times b$ همواره بر $a+b$ عمود است، بنابراین ضرب داخلی آن‌ها همیشه صفر است و ربطی به m ندارد، یعنی $m\in\mathbb{R}$.

۲۳ اندازه‌ی ضرب خارجی

اگر زاویه‌ی بین دو بردار a و b برابر θ باشد آن‌گاه اندازه‌ی ضرب خارجی از رابطه‌ی مقابل قابل محاسبه است: $\boxed{|a\times b|=|a||b|\sin\theta}$

۳۰ بردارهای a و b مفروض‌اند. اگر $|a|=3$ و $|b|=26$ و $|a\times b|=72$ باشد حاصل $a.b$ کدام است؟

تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۳

۱) ۳۰ ۲) -30 ۳) ± 30 ۴) ± 15

$$|a\times b|=|a||b|\sin\theta \Rightarrow 72=26\times 3\times\sin\theta \Rightarrow \sin\theta=\frac{12}{13}\Rightarrow \cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\frac{144}{169}=\frac{25}{169}\Rightarrow \cos\theta=\pm\frac{5}{13}$$

$$\Rightarrow a.b=|a||b|\cos\theta=3\times 26\times\left(\pm\frac{5}{13}\right)=\pm 30$$

۲۴ ویژگی‌های ضرب خارجی و مقایسه با ضرب داخلی

$a.a=\vert a\vert^2$	۱ $a\times a=\bar{0}$
$a.b=b.a$	۲ $a\times b=-b\times a$
$a.(b\pm c)=a.b\pm a.c$	۳ $a\times(b\pm c)=a\times b\pm a\times c$
$a\perp b\Rightarrow a.b=0$	۴ $a\parallel b\Rightarrow a\times b=\bar{0}$

۳۱ زاویه‌ی بین دو بردار a و b کم‌تر از 90° است و $|a|=6$ و $|b|=5$ و $|a\times(a+b)|=18$، حاصل $a.(a+b)$ کدام است؟ تمرین ۵ ص ۳۲ کتاب درسی

داخل ۸۵ | پاسخ: ۳

۱) ۵۴ ۲) ۵۶ ۳) ۶۰ ۴) ۶۴

$$|a\times(a+b)|=|\underbrace{a\times a}_{\bar{0}}+a\times b|=|a\times b|=|a||b|\sin\theta\Rightarrow 18=6\times 5\times\sin\theta\Rightarrow\sin\theta=\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=\frac{16}{25}\Rightarrow\cos\theta=\begin{cases}\frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & \text{غ.ق.ق}\quad(\theta<90^\circ)\end{cases}$$

$$\Rightarrow a.(a+b)=a.a+a.b=|a|^2+|a||b|\cos\theta=6^2+6\times 5\times\frac{4}{5}=60$$

۳۲ اگر a و b و c سه بردار باشند و $a+b+c=\overline{o}$، حاصل $a\times b$ با کدام گزینه برابر است؟

دهمی ۷۰ | پاسخ: ۴

۱) $c\times b$ ۲) $a\times c$ ۳) $b\times a$ ۴) $c\times a$

اگر $a+b+c=\overline{o}$ باشد، می‌توان ثابت کرد که $a\times b=b\times c=c\times a$ زیرا:

$$\begin{cases} a+b+c=\overline{o} \Rightarrow b=-a-c \\ a\times b=a\times(-a-c)=-\underbrace{a\times a}_{\overline{o}}-a\times c=-a\times c=c\times a \end{cases}$$

۳۳ بردارهای ناموازی و غیر صفر a و b و c و d در تساوی‌های $a\times c=b\times d$ و $a\times b=c\times d$ صادق‌اند. کدام نتیجه‌گیری الزاماً درست است؟

تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۲

۱) بردارهای $a-d$ و $b+c$ موازی‌اند. ۲) بردارهای $a-d$ و $b-c$ موازی‌اند.

۳) بردارهای $a+d$ و $b+c$ عمودند. ۴) اندازه‌ی دو بردار $a+b$ و $c+d$ یکسان است.

همان‌طور که گفتیم ضرب خارجی دو بردارِ موازی، بردار صفر است بنابراین:

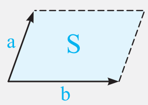
$$\begin{cases} a\times b=c\times d \\ a\times c=b\times d \end{cases} \xRightarrow{-} a\times b-a\times c=c\times d-b\times d \Rightarrow a\times(b-c)=(c-b)\times d$$

$$\Rightarrow a\times(b-c)-(c-b)\times d=\overline{o} \Rightarrow a\times(b-c)-d\times(b-c)=\overline{o} \Rightarrow (a-d)\times(b-c)=\overline{o} \Rightarrow a-d \,||\, b-c$$

توجه: اگر طرفین دو تساوی را با هم جمع کنیم می‌توان نتیجه گرفت که $a+d \,||\, b+c$.

۲۵ مساحت متوازی الاضلاع

اگر a و b دو بردار باشند، مساحت متوازی‌الاضلاعی که روی بردارهای a و b ساخته می‌شود برابر است با:



$$\boxed{S=|a\times b|}$$

یادداشت: اگر به جای متوازی‌الاضلاع، هر چهارضلعی دیگری دادند مساحت نصف حاصل‌ضرب خارجی دو قطر آن است (ولی بعیده تو کنکور بیاد تا حالا که نیومده فقط گفتیم در جریان باشید آخه در جریان بودن مهمه ...)

۳۴ اگر $a=(۱,-۲,۳)$ و $b=(۲,۰,۱)$ باشد، مساحت متوازی‌الاضلاع تولید شده توسط دو بردار $a+۳b$ و $۲a+۵b$ کدام است؟

داخل ۸۷ | پاسخ: ۳

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $۳\sqrt{۵}$ ۴) $۵\sqrt{۳}$ تمرین ۴ ص ۳۲ کتاب درسی

$$S=|(۲a+۵b)\times(a+۳b)|=|\underbrace{۲a\times a}_{\overline{o}}+۶a\times b+۵b\times a+۱۵\underbrace{b\times b}_{\overline{o}}|=|۶a\times b-۵a\times b|=|a\times b|$$

$$\begin{cases} a=(۱,-۲,۳) \\ b=(۲,۰,۱) \end{cases} \Rightarrow a\times b=(-۲,۵,۴) \Rightarrow S=|a\times b|=\sqrt{۴+۲۵+۱۶}=۳\sqrt{۵}$$

۳۵ بردار $a=i+۲j-۴k$ به صورت ترکیبی از بردارهای واحد محورهای مختصات داده شده است. مساحت متوازی‌الاضلاعی که بر روی دو بردار a و $a\times k$ ساخته شود، کدام است؟

خارج ۸۶ | پاسخ: ۴

تمرین ۴ ص ۳۲ کتاب درسی

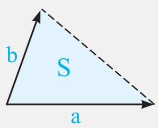
۱) $\sqrt{۸۴}$ ۲) $\sqrt{۹۶}$ ۳) $\sqrt{۱۰۲}$ ۴) $\sqrt{۱۰۵}$

$$\begin{cases} a=(۱,۲,-۴) \\ k=(۰,۰,۱) \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a\times k=(۲,-۱,۰) \\ a=(۱,۲,-۴) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (a\times k)\times a=(۴,۸,۵) \Rightarrow S=|(a\times k)\times a|=\sqrt{۱۶+۶۴+۲۵}=\sqrt{۱۰۵}$$

۲۶ مساحت مثلث

اگر a و b دو بردار باشند آن‌گاه مساحت مثلث تولید شده [یا گاهی می‌گویند مساحت تولید شده و اسمی از مثلث نمی‌برند!!!] توسط این دو بردار برابر است با:

$$\boxed{S=\frac{۱}{۲}|a\times b|}$$



در جریان باش، اگر به جای بردار، سه نقطه‌ی A و B و C داده شد اول با آن‌ها دو بردار دلخواه، مثلاً $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را می‌سازیم بعد آن‌ها را ضرب خارجی می‌کنیم و ...

۳۶ دو بردار a و b به طول‌های ۳ و ۴ واحد با یک‌دیگر زاویه‌ی 30° می‌سازند. مساحت مثلثی که بر روی دو بُـردار $a-2b$ و $3a+2b$ تولید می‌شود، کدام است؟

مثال ۵ ص ۳۰ کتاب درسی

داخل ۸۴ | پاسخ: ۱

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۲ ۴) ۴۸

$$S=\frac{1}{2}|(3a+2b)\times(a-2b)|=\frac{1}{2}|3\underbrace{a\times a}_{\vec{0}}-6a\times b+2b\times a-4\underbrace{b\times b}_{\vec{0}}|$$

$$=\frac{1}{2}|-6a\times b-2a\times b|=4|a\times b|=4|a||b|\sin 30^\circ=4\times 3\times 4\times\frac{1}{2}=24$$

۳۷ دو بردار a و b با طول‌های ۵ و ۸ واحد مفروض‌اند و مساحت تولید شده توسط این دو بردار ۱۲ واحد مربع است. اگر زاویـه‌ی بین دو بردار کم‌تر از قائمه باشد، اندازه‌ی تفاضل دو بردار کدام است؟

مثال ۵ ص ۳۰ و قضیه‌ی ۲ ص ۲۰ کتاب درسی

داخل ۸۱ | پاسخ: ۱

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۶/۵ ۴) ۷/۵

منظور از مساحت تولید شده همان مساحت مثلث تولید شده است. بنابراین:

$$S=\frac{1}{2}|a\times b|\Rightarrow 12=\frac{1}{2}|a||b|\sin\theta\Rightarrow 24=5\times 8\times\sin\theta\Rightarrow\sin\theta=\frac{3}{5}\xRightarrow{\theta<90^\circ}\cos\theta=\frac{4}{5}$$

$$|a-b|^2=|a|^2+|b|^2-2|a||b|\cos\theta=5^2+8^2-2\times 5\times 8\times\frac{4}{5}=25\Rightarrow|a-b|=5$$

دقت کنید که برای به دست آوردن $\cos\theta$ از روی $\sin\theta$ یا برعکس از رابطه‌ی $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ استفاده می‌کنیم.

۳۸ مساحت مثلث ABC با سه رأس $A(1,-2,3)$ و $B(2,0,1)$ و $C(-3,2,1)$ کدام است؟

مثال ۵ ص ۲۰ کتاب درسی

داخل ۸۹ | پاسخ: ۴

۱) $\sqrt{35}$ ۲) $\sqrt{42}$

۳) $\sqrt{54}$ ۴) $\sqrt{65}$

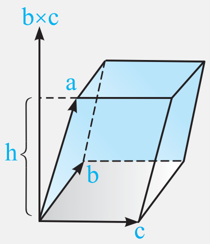
با این سه نقطه باید دو بردار تشکیل دهیم و فرقی نمی‌کند که $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ باشد یا مثلاً $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ و ... .

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=B-A=(1,2,-2)\\ \overrightarrow{AC}=C-A=(-4,4,-2)\end{cases}\xRightarrow{\times}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(4,10,12)$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{16+100+144}=\frac{1}{2}\sqrt{260}=\sqrt{65}$$

۲۷ ضرب مختلط

۱ محاسبه‌ی ضرب مختلط



اگر $a=(a_1,a_2,a_3)$ و $b=(b_1,b_2,b_3)$ و $c=(c_1,c_2,c_3)$ سه بـردار در فضا باشـند، آن‌گـاه ضـرب مختلط آن‌ها که با نماد $a.(b\times c)$ نشان داده می‌شود به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

$$a.(b\times c)=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix}b_2&b_3\\c_2&c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}b_1&b_3\\c_1&c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1&b_2\\c_1&c_2\end{vmatrix}$$

۲ محاسبه‌ی حجم متوازی‌السطوح

حجم متوازی‌السطوحی که، بردارهای a و b و c سه یال هم رأس آن باشند برابر است با:

$$V=|a.(b\times c)|$$

نکته: حجم متوازی‌السطوح برابر است با مساحت قاعده × ارتفاع یعنی:

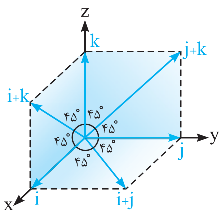
$$V=Sh$$

۳۹ حجم متوازی‌السطوحی که توسط سه بردار واقع بر نیمسازهای سه صفحه‌ی xoy و yoz و xoz و به‌ترتیب با طول‌های $\sqrt{۲}$ و $۲\sqrt{۲}$ و $۳\sqrt{۲}$ با مؤلفه‌های غیرمنفی ساخته می‌شود، چند واحد مکعب است؟

مثال ۶ ص ۳۲ کتاب درسی

خارج ۸۴ | پاسخ: ۱

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) $۸\sqrt{۲}$ ۴) $۱۲\sqrt{۲}$



ابتدا باید ببینیم نیمسازهای سه صفحه‌ی xoy و yoz و xoz با مؤلفه‌های غیرمنفی چه بردارهایی هستند به شکل خیره شوید همین جور مات و مبهوت زُل بزنید. خُب نیمسازهای این سه صفحه با مؤلفه‌های غیرمنفی، $i+j$ و $j+k$ و $i+k$ است اما بدبختی این است که طول همه‌ی آن‌ها $\sqrt{۲}$ است ولی مسأله گفته با طول‌های $\sqrt{۲}$ و $۲\sqrt{۲}$ و $۳\sqrt{۲}$ خب حالا چه‌کار کنیم؟!! کاری نداره اگر یکی را در ۲ و یکی را در ۳ ضرب کنیم درست می‌شود یعنی بردارهای سازنده‌ی متوازی‌السطوح عبارتند از:

$$\begin{cases} a = i + j \\ b = ۲j + ۲k \\ c = ۳i + ۳k \end{cases} \Rightarrow V = |a.(b\times c)| = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۲ \\ ۳ & ۰ & ۳ \end{vmatrix} = ۱\times(۶) - ۱\times(-۶) + ۰\times(...) = ۱۲$$

۴۰ بر روی سه بردار $a = ۲i - j$ و $b = j + ۳k$ و $c = ۴i - k$ یک متوازی‌السطوح ساخته شده است. اگر قاعده‌ی این متوازی‌السطوح را بردارهای a و b تشکیل دهند، ارتفاع متوازی‌السطوح کدام است؟

تمرین ۱ ص ۳۲ کتاب درسی

خارج ۸۹ | پاسخ: ۴

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲

$$V = |a.(b\times c)| = \begin{vmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۴ & ۰ & -۱ \end{vmatrix} = |۲(-۱) + ۱(-۱۲)| = |-۱۴| = ۱۴$$

$$\begin{cases} a = (۲,-۱,۰) \\ b = (۰,۱,۳) \end{cases} \Rightarrow a\times b = (-۳,-۶,۲) \Rightarrow S_{\text{قاعده}} = |a\times b| = \sqrt{۹+۳۶+۴} = ۷ \xRightarrow{V=S.h} ۱۴ = ۷\times h \Rightarrow h = ۲$$

راه دیگر این بود که بردار c را روی $a\times b$ تصویر کنیم. به شکل روی جلد کتاب درسی دقت کنید.

۴۱ اگر سه بردار به تصاویر $(۲,a,۱)$، $(b,۲,۴)$ و $(۲,۱,c)$ یال‌های یک مکعب مستطیل باشند، حجم آن کدام است؟

تمرین ۲ ص ۲۴ و مثال ۶ ص ۳۲ کتاب درسی

خارج ۹۰ | پاسخ: ۳

۱) ۳۲ ۲) ۳۶
۳) ۴۲ ۴) ۴۵

یال‌های مکعب مستطیل دو به دو بر هم عمودند بنابراین ضرب داخلی دوبه‌دوی این بردارها باید صفر شود.

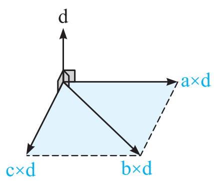
$$\begin{matrix} \vec{V}_۱.\vec{V}_۲ = ۰ \Rightarrow \\ \vec{V}_۱.\vec{V}_۳ = ۰ \Rightarrow \\ \vec{V}_۲.\vec{V}_۳ = ۰ \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} ۲b + ۲a + ۴ = ۰ \\ ۴ + a + c = ۰ \\ ۲b + ۲ + ۴c = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} a + b = -۲ \\ a + c = -۴ \end{cases} \\ b + ۲c = -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b - c = ۲ \\ b + ۲c = -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -۱ \\ b = ۱ \\ a = -۳ \end{cases}$$

$$\begin{matrix} |\vec{V}_۱| = \sqrt{۴+۹+۱} = \sqrt{۱۴} \\ |\vec{V}_۲| = \sqrt{۱+۴+۱۶} = \sqrt{۲۱} \\ |\vec{V}_۳| = \sqrt{۴+۱+۱} = \sqrt{۶} \end{matrix} \Rightarrow V = |V_۱||V_۲||V_۳| = \sqrt{۱۴}\times\sqrt{۲۱}\times\sqrt{۶} = ۴۲$$

۴۲ اگر a، b، c و d چهار بردار دلخواه باشند، آن‌گاه سه بردار $a\times d$، $b\times d$ و $c\times d$ نسبت به هم چگونه‌اند؟ *تمرین ۱۲ ص ۳۳ کتاب درسی*

خارج ۸۵ | پاسخ: ۱

۱) موازی یک صفحه‌اند. ۲) موازی هم‌اند.
۳) دو به دو عمود برهم‌اند. ۴) مجموع آن‌ها بردار صفر است.



از آن جایی که حاصل‌ضرب خارجی دو بردار، بر هر دو بردار عمود است، پس $a\times d$، $b\times d$ و $c\times d$ همگی بر بردار d عمود می‌باشند (مطابق شکل)، پس همگی درون یک صفحه قرار دارند یا به تعبیری دیگر، موازی یک صفحه‌اند.

۲۸ شرط هم صفحه بودن

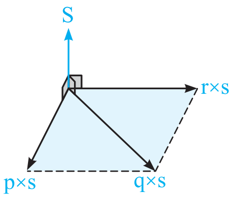
شرط لازم و کافی برای این که سه بردار a و b و c در یک صفحه باشند، این است که حجم متوازی‌السطوح بنا شده بر آن‌ها صفر شود یعنی به‌عبارت دیگر: $\boxed{a.(b\times c)=۰}$

۴۳ فرض کنید p، q، r و s بردارهایی دلخواه باشند، حاصل $(p\times s).[(q\times s)\times(r\times s)]$ کدام است؟

تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۲

۱) $p\times(q\times r)$ ۲) صفر

۳) $(q\times r)\times p$ ۴) $p.(q\times s)$



بردارهای $p\times s$ و $q\times s$ و $r\times s$ همگی بر بردار s عمودند بنابراین موازی یک صفحه هستند و ضرب مختلط آن‌ها صفر است.

۴۴ به‌ازای کدام مقدار a چهار نقطه‌ی $C(۲,۳,۲)$ ، $B(۱,-۱,-۳)$ ، $A(۱,۰,-۱)$ ، $D(a,۹,۵)$ در یک صفحه قرار دارند؟

تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۴

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

باید بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ در یک صفحه باشند یعنی ضرب مختلط آن‌ها صفر باشد.

$$AB.(AC\times AD)=\begin{vmatrix} ۰ & -۱ & -۲ \\ ۱ & ۳ & ۳ \\ a-۱ & ۹ & ۶ \end{vmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow ۰(۱۸-۲۷)+۱(۶-۳a+۳)-۲(۹-۳a+۳)=۰\Rightarrow(۹-۳a)-۲(۱۲-۳a)=۰\Rightarrow -۱۵+۳a=۰\Rightarrow a=۵$$

۴۵ اگر $a\times b=a\times c$ ، $b\neq c$، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟ $(a\neq\overline{o})$

داخل ۷۹ | پاسخ: ۱

۱) a عمود بر $b-c$ ۲) a موازی $b-c$ ۳) $a.(b\times c)=۰$ ۴) a و b و c در یک صفحه‌اند.

$$a\times b=a\times c\Rightarrow a\times b-a\times c=\overline{o}\Rightarrow a\times(b-c)=\overline{o}\Rightarrow\begin{cases}a=\overline{o}\\ a\,||\,b-c\\ b-c=\overline{o}\Rightarrow b=c\end{cases}\xrightarrow{\text{با توجه به فرضیات سؤال}}a\,||\,b-c$$

وقتی a با بردار $b-c$ موازی است، یعنی سه بردار درون یک صفحه قرار دارند و ضرب مختلط آن‌ها صفر است.

۴۶ فرض کنید a و b و c بردارهایی غیر صفر بوده و $(a\times b)+(b\times c)+(c\times a)=\overline{o}$ باشند، کدام نتیجه‌گیری الزاماً درست است؟

تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۲

۱) هر سه موازی هم ۲) $a.(b\times c)=۰$ ۳) $a+b+c=\overline{o}$ ۴) $a\times(b\times c)=\overline{o}$

طرفین تساوی را در بردار a، ضرب داخلی می‌کنیم:

$$\underbrace{a.(a\times b)}_{۰}+a.(b\times c)+\underbrace{a.(c\times a)}_{۰}=۰\Rightarrow a.(b\times c)=۰$$

۴۷ بردارهای a و b و c با شرط $(a-c)\times b=a\times c$ مفروض‌اند، کدام نتیجه‌گیری الزاماً درست است؟ تمرین ۹ ص ۳۳ کتاب درسی

خارج ۹۱ | پاسخ: ۲

۱) $a.(b.c)=۰$ ۲) $a.(b\times c)=۰$ ۳) $a\times(b\times c)=\overline{o}$ ۴) هر سه بردار موازی‌اند.

می‌دونی که؟!! در ضرب مختلط اگر دو بردار از سه بردار یکسان باشند هم‌صفحه می‌شوند و ضرب مختلط آن‌ها صفر است یعنی: $\boxed{a.(a\times b)=۰}$

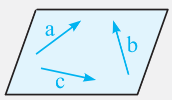
$$(a-c)\times b=a\times c\Rightarrow a\times b-c\times b=a\times c\Rightarrow a\times b+b\times c=a\times c$$

$$\Rightarrow a\times b+b\times c+c\times a=\overline{o}\xrightarrow{\text{طرفین را در a ضرب داخلی می‌کنیم}}\underbrace{a.(a\times b)}_{\text{همواره صفر}}+a.(b\times c)+\underbrace{a.(c\times a)}_{\text{همواره صفر}}=۰\Rightarrow a.(b\times c)=۰$$

۲۹ نوشتن یک بردار برحسب ترکیب خطی دو بردار دیگر

اگر سه بردار در یک صفحه باشند (ضرب مختلط آن‌ها صفر باشد) هر کدام از آن‌ها را می‌توان برحسب ترکیب خطی از دو بردار دیگر نوشت:

$$a.(b\times c)=۰\Leftrightarrow a=mb+nc$$



۴۸ به‌ازای کدام مقدار m، بردار $a=(1,2,m)$ را می‌توان به‌صورت مجموع دو بردار در راستاهای $V_1=(0,-1,2)$ و $V_2=(2,3,-1)$ نوشت؟

خارج ۸۴ | پاسخ: ۴

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$ مثال ۷ ص ۳۲ کتاب درسی

برای این که بتوان a را برحسب مجموع دو بردار در راستای $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ نوشت باید a و V_1 و V_2 هم‌صفحه باشند یعنی ضرب مختلط آن‌ها صفر باشد:

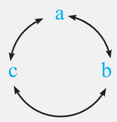
$$a.(V_1 \times V_2)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 1(1-6)-2(0-4)+m(0+2)=0 \Rightarrow 2m=-3 \Rightarrow m=-\frac{3}{2}$$

جمع‌بندی: *به این هم‌صفحه بودن سه بردار خیلی دقت کنید، با قیافه‌های مختلف داره ظاهر می‌شه.*

۳۰ جابه‌جایی دوری

ضرب مختلط سه بردار دارای یک ویژگی جالب به اسم جابه‌جایی دوری است ببین:

$$\boxed{a.(b\times c)=b.(c\times a)=c.(a\times b)}$$



۴۹ اگر a و b و c سه بردار غیر صفر و غیر واقع در یک صفحه باشند، مقدار کدام گزینه با سایرین فرق دارد؟   تمرین ۹ ص ۱۲۸ کتاب درسی

داخل ۷۷ و ۸۴ | پاسخ: ۲

۱) $a.(c\times b)$ ۲) $a.(b\times c)$ ۳) $b.(a\times c)$ ۴) $(a\times c).b$

گزینه‌های ۳ و ۴ کاملاً یکسان هستند چون ضرب داخلی خاصیت جابه‌جایی دارد، بنابراین یکی از دو گزینه ۱ یا ۲ با آن‌ها یکسان است:

$(a\times c).b=b.(a\times c)=a.(c\times b) \Rightarrow$ گزینه‌های ۱، ۳ و ۴

۵۰ اگر a، b و c سه بُردار غیر صفر باشند، خلاصه شده‌ی $(2a-b).((b+c)\times(c-a))$ کدام است؟   تمرین ۶ ص ۳۳ کتاب درسی

داخل ۹۰ | پاسخ: ۳

۱) $a.(b\times c)$ ۲) $2a.(b\times c)$ ۳) $3a.(b\times c)$ ۴) صفر

$$(2a-b).((b+c)\times(c-a))=(2a-b).(b\times c-b\times a+\underbrace{c\times c}_{\vec{0}}-c\times a)$$

$$=2a.(b\times c)-2\underbrace{a.(b\times a)}_{0}-2\underbrace{a.(c\times a)}_{0}-\underbrace{b.(b\times c)}_{0}+\underbrace{b.(b\times a)}_{0}+\underbrace{b.(c\times a)}_{a.(b\times c)}$$

$$=2a.(b\times c)+b.(c\times a)=2a.(b\times c)+a.(b\times c)=3a.(b\times c)$$

جمع‌بندی: *ساده‌سازی ضرب خارجی و داخلی دو ترکیب خطی در کنکور زیاد دیده شده، در این موارد خیلی با حوصله تک‌تک بردارها را در هم ضرب کنید. با رعایت دو نکته‌ی زیر همه چیز ساده می‌شه.*

۱) در ضرب داخلی $a.a=|a|^2$ و در ضرب خارجی $a\times a=\vec{0}$ می‌باشد.

۲) در ضرب داخلی $a.b=b.a$ امّا در ضرب خارجی $a\times b=-b\times a$ می‌باشد.

۳۱ ضرب مضاعف

اگر a، b و c سه بُردار در فضا باشند $a\times(b\times c)$ را ضرب مضاعف آن‌ها می‌نامند که در تمرین ۱۰ صفحه‌ی ۳۳ کتاب درسی آورده شده است. می‌توان ثابت کرد:

$$\boxed{a\times(b\times c)=(a.c)b-c(a.b)}$$

تذکر: $a\times(b\times c)$ موازی صفحه‌ی شامل b و c می‌باشد پس همواره یک ترکیب خطی از b و c است. برای به‌خاطر سپردن حاصل $a\times(b\times c)$، بردارهای داخل پرانتز را به‌صورت تفریق بنویسید، ضریب هر کدام از بردارها، ضرب داخلی دوتای دیگر است.

دو تای دیگر   دو تای دیگر

$$a\times(b\times c)=(a.c)b-c(a.b)$$

تذکر: اگر ضرب مضاعف را به‌صورت $(a\times b)\times c$ بدهند ابتدا یک منفی در جلوی عبارت می‌گذاریم و سپس به‌ترتیب بالا عمل می‌کنیم:

$$(a\times b)\times c=-c\times(a\times b)=-[(b.c)a-b(a.c)]=\dots$$

۵۱ اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ بردارهایی دلخواه باشند، حاصل $\mathbf{a \times (b \times c) + b \times (c \times a)}$ کدام است؟

تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۴

۱) $c \times (a \times b)$ ۲) $\overline{o}$ ۳) $(b \times a) \times c$ ۴) $(a \times b) \times c$

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) = [(a.c)\,b - c\,\cancel{(a.b)}] + [\cancel{(a.b)}\,c - a\,(b.c)]$$

$$= (a.c)\,b - a\,(b.c) = c \times (b \times a) = -(b \times a) \times c = (a \times b) \times c$$

۵۲ اگر $\mathbf{a = i - ۲j}$ و $\mathbf{b = ۳j + ۲k}$ و $\mathbf{c = ۴i + j - ۲k}$ باشند، تصویر بُردار $\mathbf{(a \times b) \times c}$ روی محور $\mathbf{x}$ ها کدام است؟

داخل ۹۲ | پاسخ: ۱

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ *تمرین ۱۰ ص ۳۳ کتاب درسی*

عبارت $a \times (b \times c)$ را هم می‌توان به تفاضل دو بردار تبدیل کرد و هم می‌توان به طور مستقیم حساب کرد:

$$\begin{cases} a = (۱,-۲,۰) \\ b = (۰,۳,۲) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \times b = (-۴,-۲,۳) \\ c = (۴,۱,-۲) \end{cases} \Rightarrow (a \times b) \times c = (۱,۴,۴) \xrightarrow{\text{تصویر روی } ox} (۱,۰,۰) \Rightarrow \text{تصویر روی محور } ox = ۱$$

جمع‌بندی: *تنبلی نکنید و نگویید من تمام ضرب مضاعف‌ها را به‌طور مستقیم حساب می‌کنم و نیازی به $(a.c)b - c(a.b)$ ندارم. شاید تست طوری طراحی شود که $a.b$ و $a.c$ و $b.c$ را به شما بدهد و حاصل را بر حسب ترکیب خطی دو بردار بخواهد و یا همانند تست ۵۱ طراحی شود.*

یادداشت

سؤالات آزمون دوره‌ای ۱ فصل ۱

۱- اگر $|a|=۲$ و $|b|=۴$ و $a+b+۲c=\overline{o}$ باشد، حاصل $a.b+b.c+a.c$ کدام است؟ *برگرفته از تمرین ۴ صفحه‌ی ۲۴ و مشابه خارج ۸۷*

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) -۱۰ ۴) -۲۰

۲- اگر بردارهای (۱،-۱،۲) و (۲،۰،۱) دو قطر یک متوازی الاضلاع باشد، مساحت آن کدام است؟ *مشابه خارج ۹۲ و داخل ۸۷*

۱) $\sqrt{۵۶}$ ۲) $\frac{\sqrt{۱۴}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۱۴}$ ۴) $\sqrt{۷}$

۳- اگر $۳a-۲b+c=\overline{o}$ باشد، کدام گزینه با بقیه متفاوت است؟ *برگرفته از تمرین ۷ صفحه‌ی ۳۳ و مشابه سراسری دهه‌ی ۷۰*

۱) $۳c\times a$ ۲) $۲c\times b$ ۳) $-۶a\times b$ ۴) $-۳b\times c$

۴- اگر $|a|=|b|$ و $|a+b|=۶$ و $|a-b|=۲\sqrt{۳}$ باشند، مساحت تولید شده توسط بردارهای a و b کدام است؟ *مشابه داخل ۸۱*

۱) $۳\sqrt{۳}$ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) $۶\sqrt{۳}$

۵- اگر حجم متوازی السطوح بنا شده بر سه بردار $b+c$ و $۲a-b$ و $c-a$ برابر ۱۵ باشد، حجم متوازی السطوح بنا شده بر سه بردار a و b و c کدام است؟ *تمرین ۶ صفحه‌ی ۳۳ و تمرین ۱ صفحه‌ی ۳۲ و مشابه داخل ۹۰ و خارج ۸۴*

۱) ۵ ۲) ۷/۵ ۳) ۱۵ ۴) ۳

۶- اگر $a.b=۲$ و $a.c=۳$ و $b.c=-۴$ باشد، حاصل $(a\times b)\times c$ کدام است؟ *تمرین ۱۰ صفحه‌ی ۳۳ و مشابه داخل ۹۲*

۱) $۴a+۳b$ ۲) $۳b-۴a$ ۳) $۳b-۲a$ ۴) $۳b+۲a$

۷- بردارهای $a=۳i-j+۲k$ و $b=۲i+j+k$ مفروضند. کدام بردار بر بردارهای $۸a+۷b$ و $۱۱a-۹b$ عمود است؟ *تمرین ۲ صفحه‌ی ۳۲ و مشابه داخل ۸۸*

۱) $(۳,۱,۶)$ ۲) $(۶,-۲,-۱۰)$

۳) $(-۲,-۶,۱۲)$ ۴) $(۳,-۱,۵)$

۸- اگر $a=(-۳,۱,۱)$ و $b=(۱,۰,-۱)$ و اندازه‌ی تصویر بردار c روی بردار $a\times b$ برابر $\sqrt{۳}$ باشد، حجم متوازی‌السطوح بنا شده بر سه بردار a، b و c کدام است؟ *عکس روی جلد کتاب و اثبات صفحه‌ی ۳۱ و مشابه خارج ۸۹*

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) ۱۲

۱ ①②③④	۳ ①②③④	۵ ①②③④	۷ ①②③④
۲ ①②③④	۴ ①②③④	۶ ①②③④	۸ ①②③④

محل انجام محاسبات

سؤالات آزمون دوره‌ای ۲ فصل ۱

۱- بردارهای $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$ و $\mathbf{b}=\mathbf{j}+\mathbf{k}$ و $\mathbf{c}=\mathbf{i}+\mathbf{k}$، قطرهای وجوه یک متوازی‌السطوح هستند، حجم متوازی‌السطوح کدام است؟ *مشابه خارج ۸۴*

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۲

۲- بردار $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ به‌صورت ترکیبی از بردارهای واحد محورهای مختصات داده شده است. مساحت مثلث بنا شده بر روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{a}\times\vec{j}$ کدام است؟ *مشابه خارج ۸۶*

۱) $\frac{\sqrt{15}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{30}}{2}$ ۳) $\sqrt{15}$ ۴) $\sqrt{30}$

۳- اگر $\mathbf{a}$ برداری با اندازه‌ی ۲ که با هر دو محور ox و oy زوایای 60° می‌سازد و داشته باشیم $\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}=2\mathbf{i}+4\mathbf{j}$، حجم متوازی‌السطوح بنا شده بر بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ کدام است؟ *برگرفته از تمرین ۹ صفحه‌ی ۳۳ و مشابه خارج ۹۱*

۱) ۸ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۴- قرینه‌ی بردار $\mathbf{a}=\sqrt{3}\mathbf{i}+\mathbf{k}$ نسبت به بردار $\mathbf{b}=-\mathbf{i}$ را بردار $\mathbf{c}$ می‌نامیم، مقدار $\mathbf{a}.\mathbf{c}$ کدام است؟ *مشابه خارج ۹۰*

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۲-

۵- اگر زاویه‌ی دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بزرگ‌تر از 90° و هر دو بردار یکه باشند و مساحت تولید شده توسط آن‌ها برابر ۰/۳ باشد، اندازه‌ی بردار $2\mathbf{a}+\mathbf{b}$ کدام است؟ *مشابه داخل ۸۱*

۱) $\frac{\sqrt{41}}{5}$ ۲) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ ۳) $\sqrt{\frac{41}{5}}$ ۴) $\frac{3}{5}$

۶- اگر اندازه‌ی بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ به‌ترتیب ۲، ۲ و ۴ و زاویه‌ی بین دو بردار $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ برابر 150° و بردار $\mathbf{a}$ عمود بر صفحه‌ی دو بردار $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ باشد، حاصل $|\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times(2\mathbf{a}-\mathbf{c}))|$ کدام است؟ *مشابه داخل ۹۰*

۱) صفر ۲) $8\sqrt{3}$ ۳) ۸ ۴) ۴

۷- دو بردار با تصاویر $\mathbf{a}=(2,3,-1)$ و $\mathbf{b}=(m,-2,4)$ مفروض‌اند، به ازای کدام مقادیر m حاصل عبارت $(2\mathbf{a}-3\mathbf{b}).(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ برابر صفر است؟ *مشابه داخل ۸۸*

۱) فقط $m=\pm 2$ ۲) فقط $m=-2$ ۳) هیچ مقدار m ۴) هر عدد حقیقی m

۸- اگر دو بردار $\mathbf{a}=(-2,0,1)$ و $\mathbf{b}=(1,-2,0)$ نسبت به راستای $\mathbf{c}$ قرینه‌ی هم باشند، و زاویه‌ی دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{c}$ در بازه‌ی $(\frac{\pi}{2},\pi)$ باشد، آن‌گاه بردار جهت $\mathbf{c}$ کدام است؟ *مشابه داخل ۹۰*

۱) $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,-1)$ ۲) $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-2,1)$

۱ (۱) (۲) (۳) (۴)	۳ (۱) (۲) (۳) (۴)	۵ (۱) (۲) (۳) (۴)	۷ (۱) (۲) (۳) (۴)
۲ (۱) (۲) (۳) (۴)	۴ (۱) (۲) (۳) (۴)	۶ (۱) (۲) (۳) (۴)	۸ (۱) (۲) (۳) (۴)

محل انجام محاسبات

پاسخ | آزمون | دوره‌ای ۱ | فصل ۱

۱ ۳ در $a.b+b.c+a.c$ ، $|a+b+c|^۲$ ظاهر می‌شود، پس:

$$a+b+۲c=\overline{o}\Rightarrow a+b+c=-c\Rightarrow |a+b+c|=|c|\Rightarrow |a+b+c|^۲=|c|^۲$$

$$\Rightarrow |a|^۲+|b|^۲+\cancel{|c|^۲}+۲(\underbrace{a.b+b.c+a.c}_{x})=\cancel{|c|^۲}\Rightarrow ۴+۱۶+۲(x)=۰\Rightarrow x=-۱۰$$

۲ ۲ مساحت متوازی‌الاضلاع بناشده روی دو بردار a و b برابر $S=|a\times b|$ می‌باشد، از طرفی می‌دانیم قطرهای این متوازی‌الاضلاع $a+b$ و $a-b$ هستند، پس:

$$|(a+b)\times(a-b)|=|\underbrace{a\times a}_{\overline{o}}-a\times b+b\times a-\underbrace{b\times b}_{\overline{o}}|=|-a\times b-a\times b|=|-۲a\times b|=۲|\underbrace{a\times b}_{S}|=۲S$$

بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع نصف اندازه‌ی حاصل ضرب خارجی دو قطر آن است.

$$۲S=|(۱,-۱,۲)\times(۲,۰,۱)|=|(-۱,۳,۲)|=\sqrt{۱+۹+۴}=\sqrt{۱۴}\Rightarrow S=\frac{\sqrt{۱۴}}{۲}$$

۳ ۴ می‌دانیم اگر $x+y+z=\overline{o}$ باشد، آن‌گاه $x\times y=y\times z=z\times x$ ، پس:

$$\underbrace{۳a}_{x}\underbrace{-۲b}_{y}+\underbrace{c}_{z}=\overline{o}\Rightarrow ۳a\times(-۲b)=(-۲b)\times c=c\times(۳a)\Rightarrow -۶a\times b=-۲b\times c=۳c\times a$$

۴ ۱ مساحت تولیدشده توسط بردارهای a و b یعنی مساحت مثلث تولیدشده توسط این دو بردار و برابر است با: $S=\frac{۱}{۲}|a\times b|$، پس نیاز به $|a|$ و $|b|$ و $\sin\theta$ داریم.

$$|a+b|^۲+|a-b|^۲=۲(|a|^۲+|b|^۲)\xrightarrow{|a|=|b|}۳۶+۱۲=۲(|a|^۲+|a|^۲)\Rightarrow |a|^۲=۱۲\Rightarrow |a|=|b|=\sqrt{۱۲}$$

$$|a+b|^۲-|a-b|^۲=۴a.b\Rightarrow ۳۶-۱۲=۴a.b\Rightarrow a.b=۶$$

$$a.b=|a||b|\cos\theta\Rightarrow ۶=\sqrt{۱۲}\times\sqrt{۱۲}\times\cos\theta\Rightarrow \cos\theta=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \theta=۶۰^\circ$$

$$S=\frac{۱}{۲}|a\times b|=\frac{۱}{۲}\times|a||b|\sin\theta=\frac{۱}{۲}\times\sqrt{۱۲}\times\sqrt{۱۲}\times\sin ۶۰^\circ=۳\sqrt{۳}$$

۵ ۱

$$(b+c).((۲a-b)\times(c-a))=۱۵\Rightarrow (b+c).(۲a\times c-۲\underbrace{a\times a}_{\overline{o}}-b\times c+b\times a)=۱۵$$

$$\Rightarrow b.(۲a\times c)-\underbrace{b.(b\times c)}_{۰}+\underbrace{b.(b\times a)}_{۰}+\underbrace{c.(۲a\times c)}_{۰}-\underbrace{c.(b\times c)}_{۰}+\underbrace{c.(b\times a)}_{b.(a\times c)}=۱۵\Rightarrow ۲b.(a\times c)+b.(a\times c)=۳b.(a\times c)=۱۵$$

$$\Rightarrow \underbrace{b.(a\times c)}_{\text{حجم متوازی‌السطوح بناشده بر } a,b,c}=۵$$

۶ ۱

$$(a\times b)\times c=-c\times(a\times b)=c\times(b\times a)=(a.c)b-a(b.c)=۳b+۴a$$

۷ ۲ بردار $a\times b$ یا $b\times a$ بر بردارهای a و b و هر برداری که در صفحه‌ی آن دو بردار است عمود است. پس به جای محاسبه‌ی $(۸a+۷b)\times(۱۱a-۹b)$ همان $a\times b$ را به‌دست می‌آوریم. حتماً خودش یا مضرب غیر صفری از آن در گزینه‌ها یافت می‌شود.

$$\begin{cases}a(۳,-۱,۲)\\ b(۲,۱,۱)\end{cases}\Rightarrow a\times b=(-۳,۱,۵)\xrightarrow{\times(-۲)}(۶,-۲,-۱۰)$$

۸ ۳ تصویر بردار c روی $a\times b$ مطابق شکل روی جلد کتاب درسی ارتفاع متوازی‌السطوح است و حجم متوازی‌السطوح برابر است با مساحت قاعده × ارتفاع. حال با ضرب خارجی a و b و محاسبه‌ی اندازه‌ی آن، مساحت قاعده را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases}a=(-۳,۱,۱)\\ b=(۱,۰,-۱)\end{cases}\xrightarrow{\times} a\times b=(-۱,-۲,-۱)\Rightarrow S=|a\times b|=\sqrt{۶}$$

$$V=Sh=\sqrt{۶}\times\sqrt{۳}=\sqrt{۱۸}=۳\sqrt{۲}$$

پاسخ | آزمون | دوره‌ای ۲ | فصل ۱

۱ ۱ در واقع متوازی‌السطوح بر روی بردارهای i و j و k بنا شده است و حجم آن برابر است با:

$$V=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1$$

۲ ۲

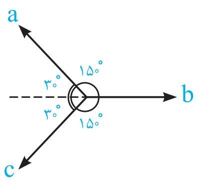
$$\begin{cases}a=(2,-1,1)\\j=(0,1,0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\times j=(-1,0,2)\\a=(2,-1,1)\end{cases}\xRightarrow{\times}(a\times j)\times a=(2,5,1)\Rightarrow S=\frac{1}{2}|a\times(a\times j)|=\frac{1}{2}\sqrt{4+25+1}=\frac{\sqrt{30}}{2}$$

۳ ۴ طرفین تساوی را در بردار a ضرب داخلی می‌کنیم:

$$\underbrace{a.(a\times b)}_{0}+a.(b\times c)+\underbrace{a.(c\times a)}_{0}=2a.i+4a.j\Rightarrow a.(b\times c)=2|a||i|\cos\alpha+4|a||j|\cos\beta$$

$$\Rightarrow a.(b\times c)=2\times2\times\frac{1}{2}+4\times2\times\frac{1}{2}\Rightarrow V=|a.(b\times c)|=6$$

۴ ۳ با توجه به این که $|a|=|c|$ می‌باشد، بنابراین کافی است زاویه‌ی بین a و c را پیدا کنیم. ابتدا زاویه‌ی a و b را پیدا می‌کنیم:



$$\cos\theta=\frac{a.b}{|a||b|}=\frac{-\sqrt{3}}{2\times1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\theta=150^\circ$$

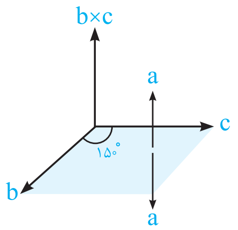
$$\Rightarrow a.c=|a||c|\cos60^\circ=2\times2\times\frac{1}{2}=2$$

۵ ۲ مساحت تولیدشده توسط دو بردار همان مساحت مثلث تولیدشده است بنابراین:

$$S=\frac{1}{2}|a\times b|\Rightarrow0/3=\frac{1}{2}|a||b|\sin\theta\Rightarrow\sin\theta=0/6\Rightarrow\cos\theta=-0/8$$

$$\Rightarrow|2a+b|^2=4|a|^2+|b|^2+4|a||b|\cos\theta=4+1+4(-\frac{8}{10})=\frac{9}{5}\Rightarrow|2a+b|=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

۶ ۳ ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم:

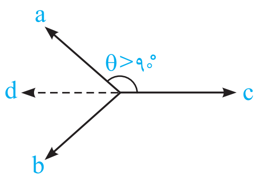


$$|a.(b\times(2b-c))|=|a.(2\underbrace{b\times b}_{\vec{0}}-b\times c)|=|-a.(b\times c)|=|a.(b\times c)|$$

$$=|a||b||c|\sin150^\circ\cos0^\circ=2\times2\times4\times\frac{1}{2}\times1=8$$

۷ ۴ بردار $a\times b$ همواره بر $2a-3b$ عمود است، پس حاصل‌ضرب داخلی آن‌ها همواره صفر است و به m هیچ ربطی ندارد، یعنی به ازای هر عدد حقیقی m، حاصل عبارت برابر صفر است.

۸ ۳



$$\text{راستای } d=\frac{a+b}{2}=(-\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2})\approx(-1,-2,1)$$

$$\Rightarrow e_d=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-2,1)\xRightarrow{e_d=-e_c}\Rightarrow e_c=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)$$

یادداشت