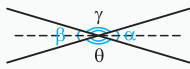
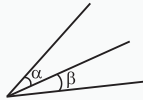


## درسنامه‌ی ۱

## زاویه

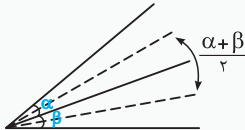


**تعریف:** به دو زاویه که رأس مشترک داشته باشند و اضلاعشان در امتداد هم باشد، متقابل به رأس گویند، مانند  $\alpha$  و  $\beta$  (یا  $\theta$  و  $\gamma$ ) در شکل روبه‌رو:

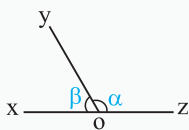


**قضیه:** دو زاویه‌ی متقابل به رأس با هم برابرند و نیمسازهایشان در یک امتداد می‌باشند.

**دو زاویه‌ی مجاور:** دو زاویه که رأس و یک ضلع‌شان مشترک و دو ضلع دیگر آن‌ها در دو طرف ضلع مشترک واقع باشند، مجاور می‌نامند؛ مانند  $\alpha$  و  $\beta$  در شکل روبه‌رو:



**ترجیه:** زاویه‌ی بین دو نیمساز دو زاویه‌ی مجاور نصف اندازه‌ی مجموع دو زاویه است، یعنی  $(\frac{\alpha + \beta}{2})$ .



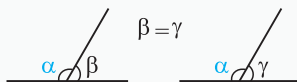
**دو زاویه‌ی مجانب:** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  دو زاویه‌ی مجاور و مکمل باشند، آن‌ها را مجانب می‌نامند.

۱ **زاویه‌ی حاده:** اگر زاویه‌ی  $\alpha$  در نامساوی  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  صدق کند، آن‌را حاده (تند) می‌نامند.

۲ **زاویه‌ی قائمه:** اگر زاویه‌ی  $\alpha = 90^\circ$  باشد، آن را قائمه می‌نامند.

۳ **زاویه‌ی منفرجه:** اگر زاویه‌ی  $\alpha$  در نامساوی  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  صدق کند، آن را منفرجه (باز) می‌نامند.

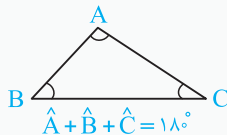
۴ **زاویه‌ی نیم‌صفحه:** اگر زاویه‌ی  $\alpha = 180^\circ$  باشد، آن را نیم‌صفحه می‌نامند.



**قضیه:** اگر دو زاویه برابر باشند، مکمل‌ها و متمم‌هایشان نیز با هم مساوی می‌باشد.

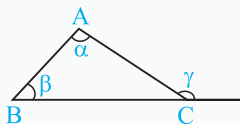
**ترجیه:** به‌طور کلی اگر دو زاویه با هم برابر باشند و جزئی از یکی با جزئی از دیگری برابر باشد، جزء دیگرشان نیز برابر می‌باشد.

## زوایا در مثلث



۱ مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر است با  $180^\circ$ .

۲ هر زاویه‌ی خارجی (زاویه‌ای که از یک ضلع و امتداد ضلع دیگر به‌وجود می‌آید) برابر است با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاورش، یعنی:



$$\gamma = \alpha + \beta$$

## معرفی انواع مثلث

۱ **مثلث متساوی‌الساقین:** هر مثلثی که دو ضلع برابر یا دو زاویه‌ی برابر داشته باشد، متساوی‌الساقین نام دارد.

۲ **مثلث متساوی‌الاضلاع:** هر مثلثی که سه ضلع برابر داشته باشد، متساوی‌الاضلاع نام دارد. (مثلثی که بزرگ‌ترین یا کوچک‌ترین زاویه‌اش  $60^\circ$  است).

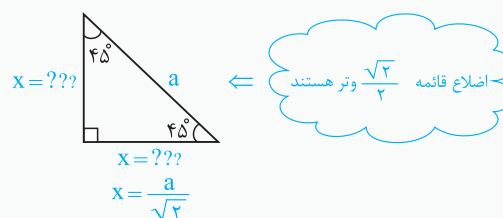
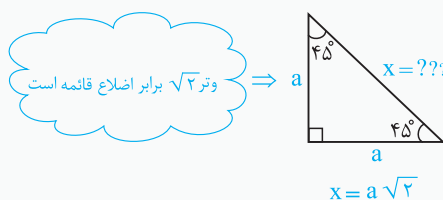
۳ **مثلث قائم‌الزاویه:** هر مثلثی که یک زاویه‌ی  $90^\circ$  داشته باشد، قائم‌الزاویه نام دارد.

**دانش‌آموز:** مثلث منفرجه‌الزاویه ریگه پیه؟!

**معلم:** هر مثلثی که یکی از زاویه‌هایش بزرگ‌تر از  $90^\circ$  باشد، مثلث منفرجه‌الزاویه نامیده می‌شود و اگر مثلثی هر سه زاویه‌اش حاده ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ) باشد، حاده‌الزاویه نامیده می‌شود. [در واقع نوع مثلث براساس نوع بزرگ‌ترین زاویه‌ی آن نام‌گذاری می‌شود.]

**دانش‌آموز:** می‌شه یک مثلث هم متساوی‌الساقین باشه و هم قائم‌الزاویه؟!

**معلم:** بله می‌شود و در این صورت می‌گوییم مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است. و از الآن در موردش این دو تا نکته‌ی ساده را بلد باش:





## ☆ ۱- کدام گزینه غلط است؟

- (۱) دو زاویه‌ی مجانب، مکمل یکدیگرند.  
 (۲) نیمسازهای دو زاویه‌ی متقابل به رأس در یک امتداد می‌باشند.  
 (۳) در مثلث، دو زاویه‌ی مکمل وجود ندارد.  
 (۴) دو زاویه‌ی مجاور همواره مکمل یکدیگر می‌باشند.

☆ ۲- دو زاویه‌ی  $A$  و  $B$  متمم هستند، اندازه‌ی زاویه‌ی  $A$  برابر  $\frac{4}{9}$  اندازه‌ی مکمل زاویه‌ی  $B$  است، زاویه‌ی  $A$  چند درجه است؟

- (۱) ۲۷ (۲) ۳۶ (۳) ۶۳ (۴) ۷۲ (سراسری ریاضی ۷۵)

## ☆ ۳- اندازه‌های سه زاویه‌ی مثلثی با اعداد ۵ و ۴ و ۱ متناسب است، این مثلث کدام است؟

- (۱) متساوی‌الاضلاع (۲) متساوی‌الساقین (۳) قائم‌الزاویه (۴) منفرجه‌الزاویه (سراسری ریاضی ۶۵)

۴- در مثلث  $ABC$ ، اگر  $\hat{A} = 2\hat{B}$  و  $\hat{C} = \hat{A} - \hat{B}$  باشد، نوع مثلث کدام است؟

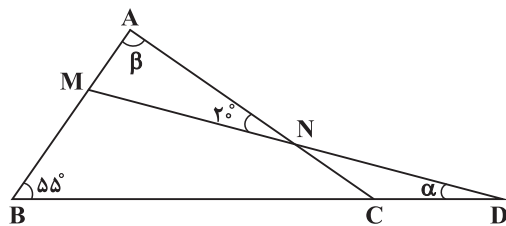
- (۱) متساوی‌الاضلاع (۲) متساوی‌الساقین (۳) قائم‌الزاویه (۴) قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین

## ۵- زاویه‌های یک مثلث با اعداد ۸ و ۵ و ۲ متناسب است، اندازه‌ی کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی این مثلث چند درجه است؟

- (۱) ۲۰۰ (۲) ۸۲ (۳) ۸۴ (۴) ۹۶ (سراسری ریاضی ۸۰)

## ۶- زاویه‌های مثلثی با اعداد ۲، ۳ و ۵ متناسب هستند. نوع این مثلث چیست؟

- (۱) قائم‌الزاویه (۲) متساوی‌الاضلاع (۳) متساوی‌الساقین (۴) غیرم مشخص

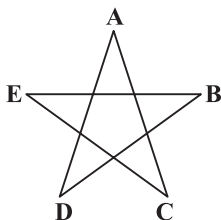
☆ ۷- در شکل روبه‌رو  $\alpha + \beta$  کدام است؟

- (۱)  $100^\circ$   
 (۲)  $110^\circ$   
 (۳)  $105^\circ$   
 (۴)  $115^\circ$

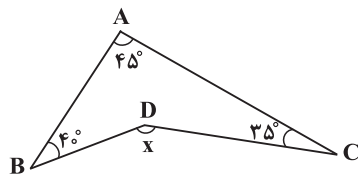
(سراسری ریاضی ۷۳ و آزمایشی سنجش ۸۴)

☆ ۸- در شکل روبه‌رو مجموع زوایای  $A, B, C, D$  و  $E$  کدام است؟

- (۱)  $180^\circ$   
 (۲)  $270^\circ$   
 (۳) کمتر از  $180^\circ$   
 (۴) بین  $180^\circ$  و  $270^\circ$

۹- در شکل زیر، زاویه‌ی  $x$  کدام است؟

- (۱)  $150^\circ$   
 (۲)  $130^\circ$   
 (۳)  $120^\circ$   
 (۴)  $110^\circ$



۱۰- در مثلث  $ABC$  بر روی ضلع  $BC$  پاره‌خط‌های  $BM = BA$  و  $CN = CA$  را جدا می‌کنیم، اگر زاویه‌ی  $\hat{A} = 72^\circ$  باشد،

(سراسری تجربی ۸۶)

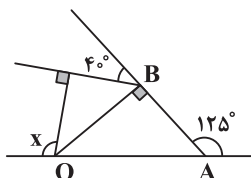
زاویه‌ی  $\hat{MAN}$  چند درجه است؟

- (۱) ۵۴ (۲) ۵۲ (۳) ۴۸ (۴) ۴۲

(سراسری تجربی ۸۷)

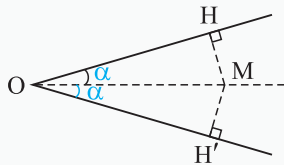
۱۱- در شکل مقابل  $\hat{A} = 125^\circ$  و  $\hat{B} = 40^\circ$  است. زاویه‌ی  $x$  چند درجه است؟

- (۱)  $105^\circ$   
 (۲)  $110^\circ$   
 (۳)  $115^\circ$   
 (۴)  $125^\circ$



## درسنامه ۲

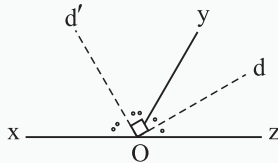
## نیمساز زاویه



۱ نیمساز خطی است که از رأس زاویه می‌گذرد و زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. یعنی:

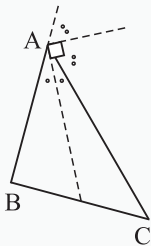
$$MH = MH'$$

۲ نیمسازهای دو زاویه‌ی مجانب (مجاور و مکمل) برهم عمودند.



نتیجه: نیمساز زاویه‌ی داخلی و خارجی هر رأس مثلث برهم عمودند (چون زاویه‌ی داخلی و خارجی هر مثلث مجانب هستند).

سه نکته که در همه‌ی کتاب‌ها هست!



۱ در هر مثلث زاویه بین دو نیمساز داخلی A و B برابر با  $90^\circ + \frac{\hat{C}}{2}$  است.

۲ در هر مثلث زاویه بین دو نیمساز خارجی A و B برابر با  $90^\circ - \frac{\hat{C}}{2}$  است.

۳ در هر مثلث زاویه بین نیمساز داخلی A و نیمساز خارجی B برابر با  $\frac{\hat{C}}{2}$  است.

☆ ۱۲- در مثلث ABC زاویه‌ی بین نیمساز داخلی رأس A و نیمساز داخلی رأس B،  $11^\circ$  است. زاویه‌ی C کدام است؟ (آزاد ریاضی ۷۹)

- (۱)  $70^\circ$  (۲)  $110^\circ$  (۳)  $40^\circ$  (۴)  $35^\circ$

۱۳- اگر  $\hat{A}$ ،  $\hat{B}$  و  $\hat{C}$  (زاویه‌های یک مثلث) به ترتیب با اعداد ۱، ۲ و ۳ متناسب باشند و نیمسازهای داخلی در نقطه‌ی D متقاطع باشند، زاویه‌ی ADC کدام است؟ (آزاد ریاضی ۷۶)

- (۱)  $145^\circ$  (۲)  $120^\circ$  (۳)  $95^\circ$  (۴)  $140^\circ$

۱۴- در مثلثی زوایای A، B و C به ترتیب به نسبت ۱، ۴ و ۷ تقسیم شده‌اند. زاویه‌ای که نیمساز داخلی A با نیمساز خارجی B می‌سازد، چند درجه است؟ (آزاد ریاضی فایز از کشور ۸۷)

- (۱)  $35^\circ$  (۲)  $52/5^\circ$  (۳)  $75^\circ$  (۴)  $15^\circ$

☆ ۱۵- در مثلث ABC زاویه‌های خارجی B و C به ترتیب  $120^\circ$  و  $\alpha$  و زاویه‌ی بین نیمسازهای این دو زاویه‌ی خارجی  $45^\circ$  است. چه قدر است؟ (آزاد ریاضی ۶۶)

- (۱)  $150^\circ$  (۲)  $120^\circ$  (۳)  $90^\circ$  (۴)  $75^\circ$

۱۶- در مثلث قائم‌الزاویه با زوایای  $\hat{A} = 20^\circ$  و  $\hat{C} = 90^\circ$ ، زاویه‌ی بین نیمساز زاویه‌ی A و B کدام است؟ (آزاد پزشکی ۸۶)

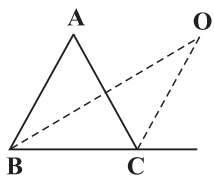
- (۱)  $10^\circ$  (۲)  $35^\circ$  (۳)  $110^\circ$  (۴)  $135^\circ$

۱۷- در مثلثی  $\hat{B} - \hat{C} = 90^\circ$  و اندازه‌ی زاویه‌ی بین نیمسازهای خارجی  $\hat{B}$  و  $\hat{C}$  برابر  $55^\circ$  است، نوع مثلث کدام است؟

- (۱) متساوی‌الساقین (۲) قائم‌الزاویه

(۳) غیرمستطیل (۴) زوایا تصاعد عددی تشکیل می‌دهند.

(آزاد ۷۶)



۱۸- در شکل روبه‌رو اگر  $\hat{A} = 60^\circ$  و BO و CO نیمساز باشند، آن‌گاه:

- (۱)  $\hat{O} = 45^\circ$  (۲)  $\hat{O} = 60^\circ$

- (۳)  $\hat{O} = 30^\circ$  (۴) هیچ‌کدام

☆ ۱۹- اگر در مثلثی  $\hat{B} - \hat{C} = 90^\circ$  باشد، زاویه‌ی حاده‌ی بین نیمساز زاویه‌ی A و ضلع BC برابر است با:

- (۱)  $15^\circ$  (۲)  $30^\circ$  (۳)  $45^\circ$  (۴)  $60^\circ$

(سراسری تجربی ۵۱)



۲۰- در مثلث  $ABC$  با فرض  $\hat{B} > \hat{C}$ ، برای آن که طول‌های نیمسازهای درونی و بیرونی رأس  $A$  با یکدیگر برابر باشند، لازم است داشته باشیم:

(آزاد ریاضی ۶۵)  $\hat{B} - \hat{C} = \frac{\pi}{3}$  (۱)  $\hat{B} - \hat{C} = \frac{\pi}{6}$  (۲)  $\hat{B} - \hat{C} = \frac{\pi}{4}$  (۳)  $\hat{B} - \hat{C} = \frac{\pi}{2}$  (۴)

☆ ۲۱- در مثلث  $ABC$ ،  $\hat{C} = 40^\circ$  و  $\hat{B} = 80^\circ$ ، زاویه‌ی بین ارتفاع و نیمساز رأس  $A$  چه قدر است؟

(۱)  $10^\circ$  (۲)  $20^\circ$  (۳)  $40^\circ$  (۴)  $30^\circ$

☆ ۲۲- در مثلثی  $\hat{A} = 50^\circ$  و  $\hat{B} = 60^\circ$  است، زاویه‌ی بین نیمساز زاویه‌ی  $A$  و عمود منصف ضلع  $BC$  چه قدر است؟

(۱)  $15^\circ$  (۲)  $75^\circ$  (۳)  $5^\circ$  (۴)  $45^\circ$

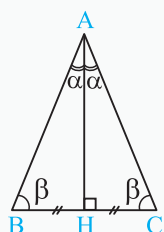
۲۳- در مثلثی که زاویه‌ها به نسبت  $70:20:20$  و زاویه‌ی بزرگ‌تر  $A$  است، اگر  $D$  محل تلاقی سه نیمساز باشد، حاصل

$\hat{ADB} + \hat{ADC} - \hat{BDC}$  کدام است؟

(۱)  $105^\circ$  (۲)  $75^\circ$  (۳)  $60^\circ$  (۴)  $90^\circ$

### زاویه در مثلث متساوی‌الساقین

#### درساخته‌ی ۳



۱- بهتر است در مثلث متساوی‌الساقین روی این نکته تأکید کنیم که زوایای نظیر دو ساق با هم برابر است و نیمساز داخلی رأس  $A$  همان میانه و ارتفاع وارد بر ضلع  $BC$  است.

توجه: نیمساز خارجی رأس  $A$  در مثلث متساوی‌الساقین موازی قاعده است و هریک از زوایای ایجاد شده توسط آن با زاویه‌های نظیر ساق‌ها برابر است.

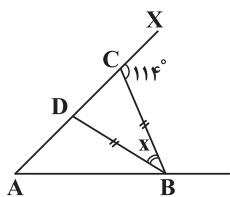
توجه: خواص مثلث متساوی‌الساقین به مثلث متساوی‌الاضلاع هم سرایت می‌کند.

۲- پس در مثلث متساوی‌الساقین، اگر یکی از نیمسازها امتداد ضلع دیگر را قطع کند، نیمساز رأس نیست و نیمساز خارجی زیر ساق است.

۳- هرگاه در یک مثلث متساوی‌الساقین یکی از زوایا بزرگ‌تر از  $90^\circ$  بود، حتماً زاویه‌ی رأس است.

☆ ۲۴- یکی از زوایای مثلث متساوی‌الساقینی برابر  $100^\circ$  است. نیمساز خارجی یکی از زاویه‌ها امتداد ضلع مقابل را با کدام زاویه قطع می‌کند؟

(۱)  $25^\circ$  (۲)  $30^\circ$  (۳)  $35^\circ$  (۴)  $40^\circ$  (سراسری ریاضی ۷۶)



۲۵- در شکل روبه‌رو  $\hat{BCX} = 114^\circ$  است، مقدار  $\hat{CBD}$  چند درجه است؟

(۱)  $44^\circ$  (۲)  $46^\circ$  (۳)  $48^\circ$  (۴)  $52^\circ$

☆ ۲۶- در شکل روبه‌رو  $\hat{BCX} = 117^\circ$ ، زاویه‌ی  $\hat{CBY}$  چند درجه است؟

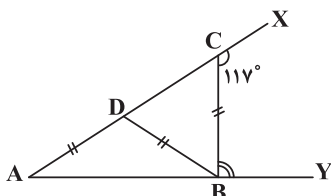
(سراسری تجربی فارغ از کشور ۸۴)

(۱)  $93^\circ$

(۲)  $94/5^\circ$

(۳)  $95/5^\circ$

(۴)  $96^\circ$

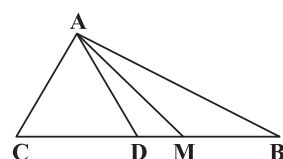


۲۷- در شکل زیر،  $AD$  نیمساز زاویه‌ی  $A$  و  $AM = MB$  است. اگر  $\hat{B} = 30^\circ$  و  $\hat{DAM} = 20^\circ$ ، زاویه‌ی  $\hat{C}$  چند درجه است؟

(آزاد تجربی ۸۲)

(۱)  $30^\circ$  (۲)  $40^\circ$

(۳)  $50^\circ$  (۴)  $20^\circ$

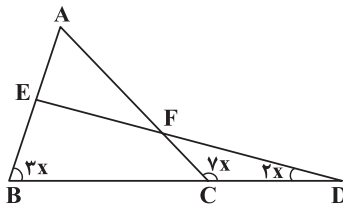


۲۸- یک ساق مثلث متساوی‌الساقینی را از طرف رأس مثلث به اندازه‌ی خودش ادامه می‌دهیم. نقطه‌ی حاصل و قاعده‌ی مثلث، چه نوع

مثلثی تشکیل می‌دهند؟

(سراسری تجربی ۶۸)

(۱) قائم‌الزاویه (۲) قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین (۳) متساوی‌الساقین (۴) منفرجه‌الزاویه



۲۹- در شکل روبه‌رو اگر  $AE = EF$  باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی  $\widehat{AEF}$  کدام است؟

$$\frac{4\pi}{13} \quad (۲)$$

$$\frac{\pi}{13} \quad (۴)$$

$$\frac{2\pi}{13} \quad (۱)$$

$$\frac{5\pi}{13} \quad (۳)$$

۳۰- در مثلث متساوی‌الساقین  $ABC$ ، نقطه‌ی  $M$  قاعده را به نسبت ۱ و ۳ تقسیم کرده است و  $MH$  عمود بر

ساق  $AB$  است، زاویه‌ی  $\widehat{HMB}$  کدام است؟

$$\widehat{A} \quad (۴)$$

$$\frac{\widehat{A}}{2} \quad (۳)$$

$$90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2} \quad (۲)$$

$$90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} \quad (۱)$$

۳۱- در مثلث متساوی‌الساقین  $ABC$  ( $AB = AC$ )، مطابق شکل روبه‌رو  $AD = AE$  است، مقدار  $x$  کدام

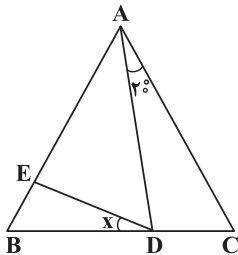
است؟

$$9^\circ \quad (۲)$$

$$12/5^\circ \quad (۴)$$

$$8^\circ \quad (۱)$$

$$10^\circ \quad (۳)$$



۳۲- در شکل مقابل، یک مربع و یک لوزی با زاویه‌ی  $60^\circ$  درجه، در یک ضلع مشترک‌اند. بزرگ‌ترین زاویه‌ی

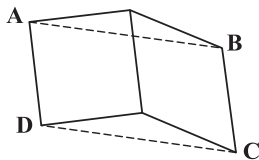
متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  چند درجه است؟

$$105 \quad (۲)$$

$$135 \quad (۴)$$

$$100 \quad (۱)$$

$$120 \quad (۳)$$



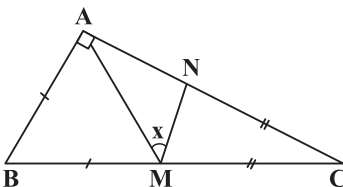
(سراسری تجربی ۸۸)

### یک راهکار جالب

### درسنامه‌ی ۴

هرگاه دو زاویه از مثلثی آزاد بود یعنی نه داده شده بود و نه خواسته شده بود می‌توان به آن دو زاویه عدد داد و مسأله را بسیار راحت حل کرد.

**توجه:** در مثلث‌های خاص مثل متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه اگر یک زاویه معلوم باشد همه‌ی زاویه‌ها از روی آن معلوم است و نباید عددگذاری کرد.



۳۳- در شکل روبه‌رو با فرض  $\widehat{A} = 90^\circ$ ، مقدار  $x$  کدام است؟

$$45^\circ \quad (۲)$$

$$90^\circ \quad (۴)$$

$$30^\circ \quad (۱)$$

$$60^\circ \quad (۳)$$

۳۴- در شکل مقابل، هر دو مثلث کناری متساوی‌الساقین‌اند. اگر زاویه‌ی  $A$  برابر  $106^\circ$  درجه

(سراسری ریاضی فارج از کشور ۸۸)

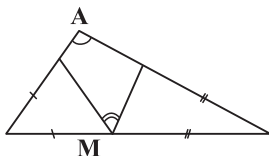
باشد، زاویه‌ی  $M$  چند درجه است؟

$$38 \quad (۲)$$

$$54 \quad (۴)$$

$$37 \quad (۱)$$

$$44 \quad (۳)$$



۳۵- در شکل روبه‌رو  $BF = BD$  و  $CD = CE$  و  $\widehat{A} = 120^\circ$ ، زاویه‌ی  $\widehat{FDE}$  چند درجه

(آزاد ۸۳ و سراسری تجربی ۸۵)

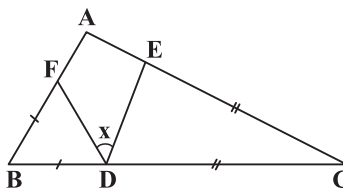
است؟

$$30 \quad (۲)$$

$$75 \quad (۴)$$

$$60 \quad (۱)$$

$$15 \quad (۳)$$



۳۶- در شکل مقابل، دو مثلث کناری متساوی‌الساقین‌اند و  $\widehat{A} = 100^\circ$ ، دو خط  $d$  و  $d'$  با

(سراسری ریاضی ۸۸)

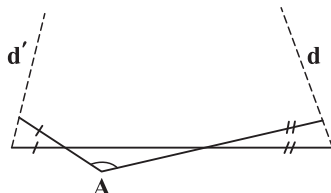
زاویه‌ی چند درجه متقاطع‌اند؟

$$40 \quad (۲)$$

$$50 \quad (۴)$$

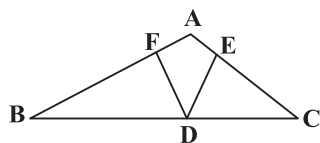
$$20 \quad (۱)$$

$$45 \quad (۳)$$



۳۷- در شکل مقابل  $CE = CD$ ،  $BF = BD$  و  $\hat{B} + \hat{C} = 40^\circ$ . زاویه  $BAC$  چند برابر زاویه  $FDE$  است؟

(آزاد ریاضی عمر ۸۸)



۳ (۲)

۷ (۱)

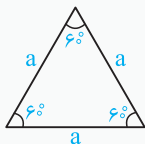
۹ (۴)

۵ (۳)

### درسنامه ۵

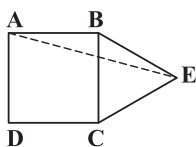
### زاویه در مثلث متساوی الاضلاع

در مثلث متساوی الاضلاع تمامی زوایا  $60^\circ$  است. (چشم بسته غیب گفتیم!!!)



۳۸- ☆ مربع  $ABCD$  و مثلث متساوی الاضلاع  $BEC$  مطابق شکل واقع شده‌اند، زاویه  $D\hat{A}E$  چه قدر است؟

(آزاد پزشکی ۷۱)



$60^\circ$  (۲)

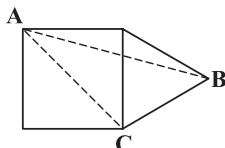
$75^\circ$  (۱)

$70^\circ$  (۴)

$45^\circ$  (۳)

۳۹- در شکل مقابل، بر روی ضلع مربع مفروض، مثلث متساوی الاضلاع ساخته شده است. در مثلث  $ABC$ ، بزرگ‌ترین زاویه چند برابر کوچک‌ترین زاویه آن است؟

(سراسری تجربی خارج از کشور ۸۸)



$\frac{7}{2}$  (۲)

۳ (۱)

$\frac{9}{2}$  (۴)

۴ (۳)

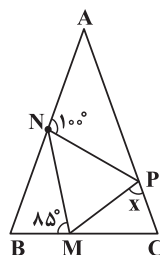
۴۰- ☆ در شکل، مثلث  $ABC$  متساوی الساقین و  $MNP$  متساوی الاضلاع است، زاویه  $x$  کدام است؟

$60^\circ$  (۱)

$65^\circ$  (۲)

$70^\circ$  (۳)

$75^\circ$  (۴)



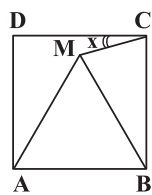
۴۱- در مربع شکل روبه‌رو مثلث  $ABM$  متساوی الاضلاع است، اندازه‌ی زاویه  $x$  کدام است؟

$15^\circ$  (۲)

$30^\circ$  (۱)

$25^\circ$  (۴)

$20^\circ$  (۳)



۴۲- یک مثلث متساوی الاضلاع به سه مثلث همنهشت تقسیم شده است. زاویه‌های هر مثلث همنهشت کدام است؟

(سراسری تجربی خارج از کشور ۸۷)

$30^\circ$  و  $30^\circ$  و  $90^\circ$  (۲)

$60^\circ$  و  $60^\circ$  و  $60^\circ$  (۱)

$30^\circ$  و  $30^\circ$  و  $120^\circ$  (۴)

$30^\circ$  و  $60^\circ$  و  $90^\circ$  (۳)

۴۳- مربع و مثلث متساوی الاضلاع درون مربع، در یک ضلع مشترک‌اند. در مثلث غیر قائمه‌الزاویه که دو ضلع آن به ترتیب قطر مربع و ضلع مثلث متساوی الاضلاع است، زاویه‌ی بزرگ‌تر چند برابر زاویه‌ی کوچک‌تر است؟

(سراسری تجربی خارج از کشور ۸۶)

۹ (۴)

۸ (۳)

$\frac{7}{5}$  (۲)

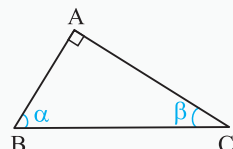
۷ (۱)

### زاویه در مثلث قائم‌الزاویه

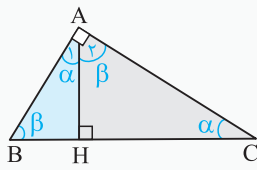
### درسنامه ۶

چند نکته‌ی مهم درباره‌ی مثلث قائم‌الزاویه وجود دارد لازم می‌دانم شما هم آن‌ها را بدانید.

۱- زاویه‌های حاده متمم هم هستند:



$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

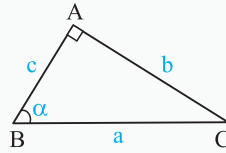


$$\hat{A}_1 = \alpha \quad \hat{A}_2 = \beta$$

۳ استفاده از نسبت‌های مثلثاتی نقش کلیدی در حل بسیاری از مسأله‌های مربوط به مثلث قائم‌الزاویه دارد.

$$\sin \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{وتر}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{وتر}}$$



$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{ضلع مجاور } \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{ضلع مقابل } \alpha}$$

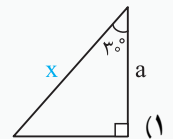
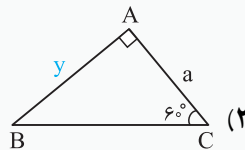
چند نتیجه:

۱ ضلع مقابل زاویه  $30^\circ$ ، وتر است. (چون  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ )  
 ۲ ضلع مقابل زاویه  $45^\circ$ ، وتر است. (چون  $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ )

۳ ضلع مقابل زاویه  $60^\circ$ ، وتر است. (چون  $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ )

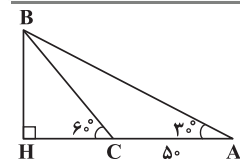
توجه: اگر به جای کلمه‌ی مقابل از مجاور استفاده کنیم، جای  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  با هم عوض می‌شود، یعنی مثلاً می‌توان گفت ضلع مجاور زاویه  $60^\circ$ ، وتر است و ...

مثال: مقدار x و y را بر حسب a بیان کنید:



حل: در این مثال چون وتر معلوم نیست، می‌توانیم از  $\tan$  (یا  $\cot$ ) استفاده کنیم:  
 $\tan 60^\circ = \frac{y}{a} \Rightarrow y = a \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$

$$\cos 30^\circ = \frac{a}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{x} \Rightarrow x = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$



(سراسری ریاضی ۷۸)

۴۴- در شکل روبه‌رو اگر اندازه‌ی AC برابر  $50^\circ$  باشد، کدام AH است؟

۸۰ (۲)

۷۵ (۱)

۹۰ (۴)

۸۵ (۳)

(آزاد ۸۵)

۴۵- در مثلث ABC اگر  $\hat{A} = 60^\circ$  و  $\hat{B} = 30^\circ$  باشد، طول نیمساز (AD) چند برابر طول BC است؟

$\frac{2}{3}$  (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{4}$  (۳)

$\frac{4}{3}$  (۲)

$\frac{4}{\sqrt{3}}$  (۱)

۴۶- در یک دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین قاعده‌ی کوچک با هر ساق برابر و قاعده‌ی بزرگ دو برابر هریک از آنهاست، اندازه‌ی زاویه‌ی حاده‌ی این دوزنقه چه قدر است؟

(سراسری ریاضی ۷۴)

$75^\circ$  (۴)

$60^\circ$  (۳)

$45^\circ$  (۲)

$30^\circ$  (۱)

۴۷- در شکل زیر  $\frac{CD}{AD} = \sqrt{2}$  و  $\frac{AC}{AD} = 2$  و  $\frac{AB}{AD} = \sqrt{2}$  می‌باشد، زاویه‌ی  $\hat{BAC}$  چند برابر

(آزاد ۸۳)

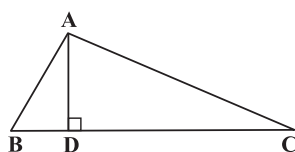
زاویه‌ی  $\hat{ACD}$  است؟

۲ (۲)

۳ (۱)

$\frac{7}{3}$  (۴)

$\frac{7}{3}$  (۳)



۴۸- در شکل  $AD = \sqrt{2}AB$  و  $AB = \sqrt{3}$  و  $AC = 2BC = 2$ ، اندازه‌ی زاویه‌ی  $\hat{DAC}$  چند

(آزاد پزشکی ۸۴)

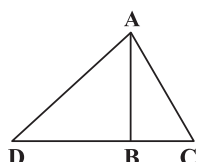
درجه است؟

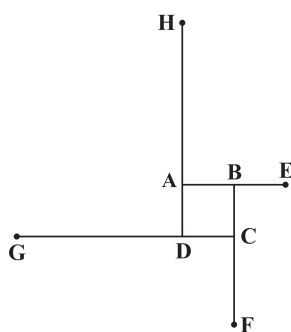
۱۰۵ (۲)

۱۳۵ (۱)

۷۵ (۴)

۹۰ (۳)





۴۹- در مربع  $ABCD$  اضلاع را مطابق شکل امتداد می‌دهیم،  $BE = AB$  و  $CF = 2BC$

و  $DG = 3CD$  و  $AH = 4AD$ ، بزرگ‌ترین زاویه‌ی چهارضلعی  $EFGH$  کدام است؟ (آزاد ۸۳)

(۲)  $\hat{E}$

(۱)  $\hat{H}$

(۴)  $\hat{G}$

(۳)  $\hat{F}$

☆ ۵۰- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر  $26^\circ$  است، کوچک‌ترین زاویه‌ی مثلث

(سراسری تجربی ۸۱)

چند درجه است؟

(۲) ۲۸

(۱) ۲۴

(۴) ۳۴

(۳) ۳۲

(آزاد ریاضی نوبت صبح ۸۷)

۵۱- در مثلث  $ABC$  ضلع  $BC = 10$  و میانه‌ی  $AM$  برابر ۵ است. این مثلث:

(۱) در رأس  $A$  حاده است. (۲) در رأس  $A$  قائمه است. (۳) در رأس  $A$  منفرجه است. (۴) هر سه حالت می‌تواند باشد.

۵۲- در یک مثلث قائم‌الزاویه اندازه‌ی یک زاویه  $35^\circ$  است. اندازه‌ی زاویه‌ی بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر این مثلث کدام است؟

(سراسری تجربی ۶۴)

(۴)  $45^\circ$

(۳)  $30^\circ$

(۲)  $20^\circ$

(۱)  $15^\circ$

☆ ۵۳- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) زاویه‌ی بین میانه و نیمساز رأس  $A$  برابر  $\frac{\pi}{y}$  است، در این مثلث زاویه‌ی بین نیمساز

رأس  $A$  و ارتفاع  $AH$  کدام است؟

(۴)  $\frac{3\pi}{y}$

(۳)  $\frac{2\pi}{y}$

(۲)  $\frac{\pi}{y}$

(۱)  $\frac{\pi}{14}$

☆ ۵۴- در مثلث  $ABC$  که در آن  $\hat{A} = 40^\circ$  و  $\hat{B} = 60^\circ$  و  $H$  محل تلاقی سه ارتفاع است، زاویه‌ی  $AHC$  چند

(آزاد ریاضی صبح ۸۸)

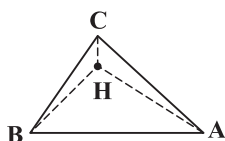
برابر زاویه‌ی  $BHC$  است؟

(۲)  $\frac{5}{y}$

(۱)  $\frac{5}{6}$

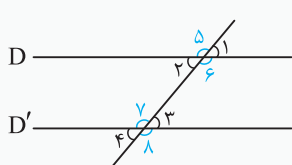
(۴)  $\frac{y}{5}$

(۳)  $\frac{6}{y}$



## زاویه در خطوط مورب و موازی

### درسنامه‌ی ۷



**قضیه:** اگر دو خط موازی توسط خط موربی قطع شوند، هشت زاویه پدید می‌آید که زاویه‌های حاده با هم، و زاویه‌های منفرجه نیز با هم برابرند. و برعکس، یعنی اگر زاویه‌های حاده (منفرجه) که توسط خط متقاطع ایجاد می‌شوند، برابر شوند، آن‌گاه دو خط  $D$  و  $D'$  با هم موازی‌اند.

$$\hat{1} = \hat{2} = \hat{3} = \hat{4}$$

$$\hat{5} = \hat{6} = \hat{7} = \hat{8}$$

**توجه:** در ضمن زوایای حاده و منفرجه مکمل هم هستند.

**نکته‌ی مهم:**

اگر یک خط شکسته بین دو خط موازی محصور شده باشد، آن‌گاه مجموع زوایای «این‌وری» و «اون‌وری» با هم برابر است:

$$\underbrace{\alpha + \gamma + \phi}_{\text{این‌وری}} = \underbrace{\beta + \theta}_{\text{اون‌وری}}$$

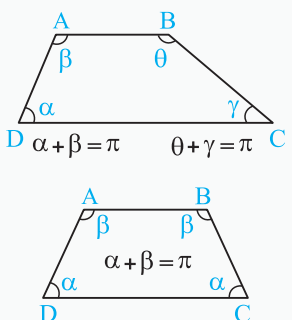
**توجه:** در دوزنقه همواره زاویه‌های زیر ساق و بالای ساق مکمل هم هستند.

**دانش‌آموز:** زاویه‌های روبه‌رو دو ساق ( $\gamma, \alpha$ ) یا ( $\theta, \beta$ ) رابطه‌ای با هم ندارند؟!

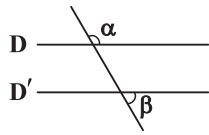
**معلم:** در حالت کلی هیچ رابطه‌ای ندارند، اما در حالت خاصی که دوزنقه متساوی‌الساقین

باشد ( $AD = BC$ ) آن‌گاه  $\alpha = \gamma$  و  $\theta = \beta$ .

**نتیجه:** دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین تنها یک زاویه مستقل دارد و با معلوم شدن یک زاویه همه‌ی زوایا معلوم می‌شود.







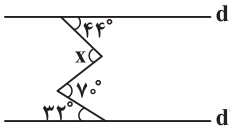
۵۵- در شکل روبه‌رو  $\alpha = 4x - 3^\circ$  و  $\beta = 2x + 22^\circ$  می‌باشد و  $D \parallel D'$  است،  $x$  کدام است؟ (تمرین کتاب درس)

(۱)  $21^\circ$

(۲)  $23^\circ$

(۳)  $25^\circ$

(۴)  $24^\circ$



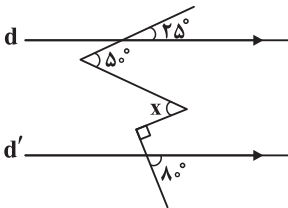
۵۶- در شکل روبه‌رو دو خط  $d$  و  $d'$  موازی‌اند، زاویه‌ی  $x$  کدام است؟

(۱)  $74^\circ$

(۲)  $72^\circ$

(۳)  $82^\circ$

(۴)  $84^\circ$



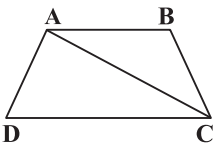
۵۷- در شکل زیر، زاویه‌ی  $x$  کدام است؟

(۱)  $35^\circ$

(۲)  $45^\circ$

(۳)  $25^\circ$

(۴)  $60^\circ$



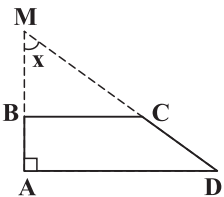
۵۸- در دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین ABCD اگر ساق AD برابر قاعده‌ی AB و قطر AC برابر قاعده‌ی DC باشد، زاویه‌ی  $\hat{D}$  کدام است؟

(۱)  $36^\circ$

(۲)  $54^\circ$

(۳)  $60^\circ$

(۴)  $72^\circ$



۵۹- در دوزنقه‌ی قائم‌الزاویه‌ی ABCD ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) امتداد ساق‌های AB و CD یک‌دیگر را در نقطه‌ی M قطع می‌کنند. اگر  $AB = 5$  و  $CD = 10$  باشد، زاویه‌ی M کدام است؟

(۱)  $30^\circ$

(۲)  $45^\circ$

(۳)  $60^\circ$

(۴)  $75^\circ$

۶۰- اگر در مثلثی نیمساز خارجی نظیر یک رأس با ضلع روبه‌رو به آن موازی باشد، آن‌گاه نوع مثلث کدام است؟

(۱) متساوی‌الاضلاع

(۲) قائم‌الزاویه

(۳) متساوی‌الساقین

(۴) منفرجه‌الزاویه

۶۱- در مثلث متساوی‌الساقین ABC، ( $AB = AC$ )، نیمساز خارجی  $\hat{A}$  و نیمساز داخلی  $\hat{B}$  در نقطه‌ی D متلاقض‌اند، طول

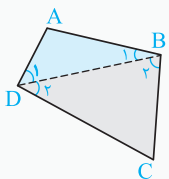
پاره‌خط AD برابر کدام جزء مثلث است؟

(۱) AC

(۲) طول نیمساز داخلی زاویه‌ی B

(۳) BC

(۴) شعاع دایره‌ی محیطی



زاویه در چهارضلعی محدب

درست‌های ۸

مجموع زوایای داخلی هر چهار ضلعی محدب برابر  $360^\circ$  است زیرا:

هر ۴ ضلعی دو مثلث در کنار هم است. به شکل روبه‌رو نگاه کن.

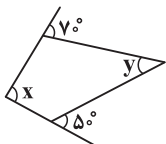
۶۲- در شکل زیر اگر  $\hat{x} - \hat{y}$  قائمه باشد،  $\frac{x}{y}$  کدام است؟

(۱) ۵

(۲) ۶

(۳) ۷

(۴) ۹



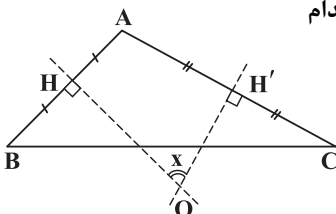
۶۳- در مثلث شکل روبه‌رو خطوط OH و OH' عمود منصف اضلاع AB و AC هستند، زاویه‌ی x کدام است؟

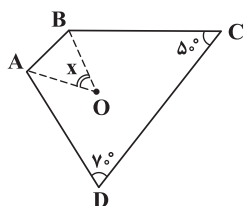
(۱)  $\frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2}$

(۲)  $90^\circ - \hat{A}$

(۳)  $90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$

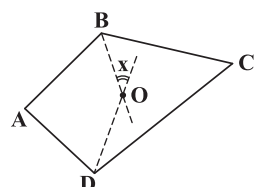
(۴)  $\hat{B} + \hat{C}$





۶۴- در چهارضلعی محدب شکل روبه‌رو، نیمساز زوایای  $A$  و  $B$  یک‌دیگر را در  $O$  قطع کرده‌اند، زاویه‌ی  $x$  کدام است؟

- (۱)  $50^\circ$  (۲)  $55^\circ$   
(۳)  $57/5^\circ$  (۴)  $60^\circ$



۶۵- در چهارضلعی محدب  $ABCD$  اگر  $\hat{A} = 100^\circ$  و  $\hat{C} = 40^\circ$  باشد، زاویه‌ی حاده‌ی بین نیمسازهای درونی زوایای  $B$  و  $D$  کدام است؟

- (۱)  $60^\circ$  (۲)  $30^\circ$   
(۳)  $20^\circ$  (۴)  $80^\circ$

۶۶- در مثلث  $ABC$  داریم،  $\hat{A} = 40^\circ$  و  $\hat{B} = 60^\circ$ ، اگر نقطه تلاقی سه ارتفاع  $H$  باشد زاویه‌ی  $\hat{CHA}$  چند درجه است؟ (آزاد ریاضی صبع ۹۰)

- (۱)  $100^\circ$  (۲)  $120^\circ$  (۳)  $140^\circ$  (۴)  $80^\circ$

۶۷- در مثلثی با زوایای  $\hat{A} = 40^\circ$  و  $\hat{B} = 60^\circ$ ، زاویه‌ی حاده‌ی بین ارتفاع  $AH$  و ارتفاع  $BH'$  چه قدر است؟ (آزاد ریاضی فارغ از کشور ۸۸)

- (۱)  $40^\circ$  (۲)  $60^\circ$  (۳)  $50^\circ$  (۴)  $80^\circ$

### زاویه در $n$ ضلعی محدب

#### درسنامه‌ی ۹

۱- مجموع زاویه‌های داخلی هر  $n$  ضلعی محدب (که از اجتماع  $n - 2$  مثلث تشکیل شده است) برابر است با:

$$(n - 2) \times 180^\circ$$

۲- مجموع زاویه‌های خارجی هر  $n$  ضلعی محدب برابر است با:

$$360^\circ$$

نتیجه‌ی مهم: اگر یک چندضلعی منتظم باشد [یعنی همه‌ی زاویه‌ها با هم برابر و همه‌ی اضلاع نیز با هم برابر باشد]، آن‌گاه هریک از زاویه‌های داخلی یا خارجی آن  $\frac{1}{n}$  مجموع خواهد شد. یعنی:

$$\text{هر زاویه‌ی خارجی } n \text{ ضلعی منتظم} = \frac{1}{n} \times 360^\circ$$

$$\text{هر زاویه‌ی داخلی } n \text{ ضلعی منتظم} = \frac{1}{n} (n - 2) \times 180^\circ$$

۶۸- در کدام چندضلعی محدب مجموع زوایای داخلی، چهاربرابر مجموع زوایای خارجی است؟ (آزاد ریاضی ۷۳)

- (۱) هشت‌ضلعی (۲) دوازده ضلعی (۳) ده‌ضلعی (۴) چهارده‌ضلعی

۶۹- یک نه‌ضلعی محدب حداکثر چند زاویه‌ی حاده‌ی داخلی می‌تواند داشته باشد؟ (سراسری ریاضی ۷۶)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۰- هر زاویه‌ی داخلی یک هشت‌ضلعی منتظم چند درجه است؟ (سراسری ریاضی ۷۵)

- (۱)  $120^\circ$  (۲)  $135^\circ$  (۳)  $150^\circ$  (۴)  $210^\circ$

۷۱- اندازه‌ی زاویه‌ی داخلی کدام‌یک از  $n$  ضلعی‌های منتظم زیر بزرگ‌تر است؟ (آزاد پیش‌دستی ۷۶)

- (۱)  $10^\circ$  ضلعی (۲)  $9^\circ$  ضلعی (۳)  $7^\circ$  ضلعی (۴)  $5^\circ$  ضلعی

۷۲- اگر هر زاویه‌ی داخلی یک  $n$  ضلعی منتظم، فقط ۲ درجه کم‌تر از هر زاویه‌ی داخلی یک  $n + 2$  ضلعی منتظم باشد،  $n$  کدام است؟ (سراسری ریاضی ۷۰)

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۲۲

۷۳- مجموع زاویه‌های داخلی یک چندضلعی محدب بدون یکی از آن‌ها برابر  $2570^\circ$  است. اندازه‌ی زاویه‌ی کنار گذاشته شده برابر است با:

- (۱)  $90^\circ$  (۲)  $105^\circ$  (۳)  $120^\circ$  (۴)  $130^\circ$

۷۴- زاویه‌های یک پنج‌ضلعی بر حسب درجه یک تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند، یکی از زاویه‌های این پنج‌ضلعی برابر است با:

- (۱)  $108^\circ$  (۲)  $90^\circ$  (۳)  $72^\circ$  (۴)  $54^\circ$