

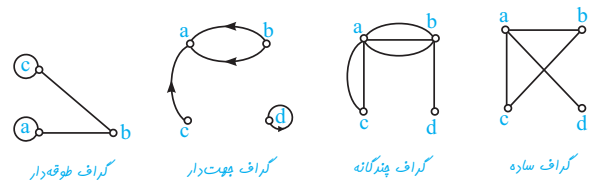
جزوه ۱: مقدمات گراف

مباحث پژوهی اول گراف شامل مقدمات، گراف بازه‌ها، دنباله‌ی گرافی، گراف منتظم و گراف کامل است که در این میان مهم‌ترین موضوع از دیدگان طراحان کنکور سراسری دنباله‌ی گرافی است که در ۱۰ سال اخیر حدود ۶ بار به طور مستقیم مورد سؤال قرار گرفته و ۵ بار هم به طور غیر مستقیم مطرح شده است. مبحث پر اهمیت بعدی گراف بازه‌ها می‌باشد که ۲ بار در ۵ سال اخیر به آن توجه شده است. گراف کامل و منتظم به طور مستقیم تاکنون مورد سؤال قرار نگرفته‌اند، اما به طور غیر مستقیم و در ترکیب با مفاهیم دور و مسیر پندین بار در کنکور دیده شده‌اند.

گراف چیست؟

۱ گراف: به تعدادی نقطه که توسط پاره‌خط‌ها یا کمان‌هایی به هم وصل شده‌اند، گراف می‌گویند. به نقطه‌ها، رأس‌های گراف و به پاره‌خط‌ها یا کمان‌ها، یال‌های گراف می‌گویند.

۲ انواع گراف: گراف‌ها را می‌توان به ۴ دسته‌ی عمده تقسیم‌بندی کرد که عبارت‌اند از گراف جهت‌دار، گراف طوقه‌دار، گراف چندگانه و گراف ساده. به شکل‌های زیر نگاه کنید.



۳ نمودار گراف ساده: گرافی که یال موازی یا طوقه و یا یال جهت‌دار نداشته باشد گراف ساده نیست.



۴ تعریف گراف ساده: گراف ساده‌ی G ، زوج مرتبی مانند $G = (V, E)$ است که در آن مجموعه‌ی V ، مجموعه‌ای ناتپی و متناهی است و مجموعه‌ی E ، زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی V می‌باشد.

چند تعریف مهم در گراف ساده

۵ مرتبه: به تعداد رأس‌های گراف (تعداد اعضای V) مرتبه‌ی گراف می‌گویند و با p نشان می‌دهند.

۶ اندازه: به تعداد یال‌های گراف (تعداد اعضای E) اندازه‌ی گراف می‌گویند و با q نشان می‌دهند.

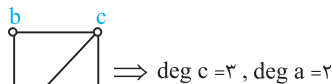
مثلاً در گراف شکل مقابل مرتبه برابر ۵ و اندازه برابر ۴ است

$$\Rightarrow \begin{cases} V = \{a, b, c, d, e\} & ; p = 5 \\ E = \{ab, bc, cd, de\} & ; q = 4 \end{cases}$$

۷ دو رأس مجاور: دو رأس متمایز a و b را مجاور می‌نامند، هرگاه یالی بین آن‌ها موجود باشد.

مثلاً در گراف روبه‌رو، رأس a با رأس b مجاور است ولی با رأس c مجاور نیست.

۸ درجه‌ی رأس: به تعداد یال‌هایی که به یک رأس از گراف متصل است (یا گاهی می‌گویند بر آن رأس مرور می‌کند یا ماژ بر آن رأس است) درجه‌ی آن رأس می‌گویند که آن را با «deg» نشان می‌دهند.



۹ رأس زوج و رأس فرد: اگر درجه‌ی یک رأس از گراف، عددی زوج باشد، آن رأس را یک رأس زوج و اگر درجه‌ی یک رأس از گراف، عددی فرد باشد، آن رأس را رأس فرد می‌نامند.

تمرین ۱: گراف شکل مقابل چند رأس زوج و چند رأس فرد دارد؟

حل: $4 = \text{تعداد رأس‌های زوج}$
 $2 = \text{تعداد رأس‌های فرد}$

۱۰ ماکسیمم درجه‌ها: بزرگ‌ترین عدد در بین درجه‌ی رأس‌ها را ماکسیمم درجه‌ی رأس‌ها می‌نامند و با Δ نشان می‌دهند.

۱۱ مینیمم درجه‌ها: کوچک‌ترین عدد در بین درجه‌ی رأس‌ها را مینیمم درجه‌ی رأس‌ها می‌نامند و با δ نشان می‌دهند.

تمرین ۲: در گراف شکل مقابل Δ و δ را مشخص کنید.

حل: $\Delta = 5, \delta = 2$

۱۲ رأس فول و رأس منفرد: به رأس از درجه‌ی $p-1$ رأس فول و به رأس با درجه‌ی صفر رأس منفرد می‌گویند و داریم:


$$0 \leq \delta \leq \Delta \leq p-1$$

۱۳ تعداد بخش‌ها در گراف: به تعداد قسمت‌هایی از گراف که با هم ارتباطی ندارند تعداد بخش‌های گراف گویند. گراف روبه‌رو، یک گراف با چهار بخش جدا از هم است.

۱۴ ارتباط مرتبه و اندازه: در هر گراف ساده از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q داریم:

$$0 \leq q \leq \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$$

دنباله‌ی گرافی

تعریف: دنباله‌ی مرتب از اعداد (صعودی یا نزولی) مانند d_1, d_2, \dots, d_p را دنباله‌ی گرافی می‌نامند هرگاه بتوان گرافی ساده با p رأس رسم کرد که درجه‌ی رأس‌های آن همین اعداد باشد، مانند دنباله‌ی $3, 3, 2, 2$ که گراف آن به صورت  می‌باشد.

تشخیص دنباله‌ی گرافی

۱) در هر گراف ساده از مرتبه‌ی p ، درجه‌ی هر رأس حداکثر $p-1$ است. مثلاً دنباله‌ی $4, 3, 2, 1$ مربوط به گراف ساده نیست چون ۴ رأس داریم و نمی‌توانیم رأس درجه‌ی ۴ داشته باشیم.

۲) تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است چون اگر تعداد رأس‌های فرد، عددی فرد باشد جمع درجه‌ها برابر عدد زوج $2q$ نمی‌شود. مثلاً دنباله‌ی $5, 4, 3, 2, 1$ مربوط به گراف ساده نیست چون سه رأس فرد در گراف وجود دارد.

۳) تعداد رأس‌های زوج هر گراف، از نظر زوج و فرد بودن هم‌جنس مرتبه‌ی گراف است یعنی اگر p زوج باشد تعداد رأس‌های زوج هم عددی زوج است و اگر p فرد باشد تعداد رأس‌های زوج هم عددی فرد است.

۴) اگر گراف دارای k رأس فول باشد، آن‌گاه باید $\delta \geq k$ باشد. مثلاً دنباله‌ی $5, 5, 3, 3, 1, 1$ مربوط به گراف ساده نیست چون دو رأس فول داریم باید $\delta \geq 2$ باشد که این طور نیست و $\delta = 1$ است.

۵) حداقل دو رأس گراف، دارای یک درجه‌اند، یعنی دنباله‌ی گرافی باید حداقل دو جمله‌ی مساوی داشته باشد. مثلاً دنباله‌ی $3, 2, 1, 0$ مربوط به گراف ساده نیست چون حداقل دو جمله‌ی مساوی ندارد.

۶) تشخیص گرافی بودن یک دنباله، می‌توانیم از رأس‌های درجه‌ی صفر صرف‌نظر کنیم یعنی می‌توانیم جمله‌های صفر را از دنباله پاک کنیم. مثلاً به جای بررسی دنباله‌ی $3, 3, 2, 2, 0, 0, 0, 0$ می‌توانیم دنباله‌ی $3, 3, 2, 2$ را بررسی کنیم.

نمونه‌ی ۶: دنباله‌ی درجات رؤس یک گراف به صورت

δ کدام است؟ $7, 7, 6, 6, 5, 5, 4, 4$ است، δ کدام است؟

۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۸ (۴)

حل: گزینه (۳) چون سه رأس فول (یعنی از درجه‌ی ۱- p) وجود دارد باید $\delta \geq 3$ باشد، از طرفی تعداد رأس‌های فرد باید عددی زوج باشد پس $\delta = 4$ جواب است.

الگوریتم هاول - حکیمی: دنباله‌هایی وجود دارند که همه‌ی نکات فوق در آن‌ها برقرار است، اما دنباله، مربوط به یک گراف ساده نیست. به عنوان مثال دنباله‌ی $5, 5, 4, 4, 3, 3, 2, 2$. در این گونه موارد می‌توان به کمک الگوریتم هاول - حکیمی، گرافی بودن دنباله را تشخیص داد. در این الگوریتم، دنباله‌ی درجات را سبک می‌کنیم که در نتیجه تشخیص گرافی بودن دنباله‌ی حاصل از دنباله‌ی اولیه ساده‌تر است. اما روش کار به صورت زیر است:

گام ۱: دنباله را به صورت نزولی مرتب می‌کنیم.

نمونه‌ی ۳: کدام گراف با مشخصات زیر حتماً ساده نیست؟

$$q = 15, p = 6 \quad (1) \quad q = 10, p = 7 \quad (2)$$

$$q = 0, p = 5 \quad (3) \quad q = 38, p = 9 \quad (4)$$

حل: گزینه (۴) اگر مرتبه و اندازه‌ی گرافی در رابطه‌ی $0 \leq q \leq \frac{p(p-1)}{2}$ صدق نکند حتماً ساده نیست. پس:

$$1) p = 6, q = 15 \Rightarrow 0 \leq 15 \leq \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

$$2) p = 7, q = 10 \Rightarrow 0 \leq 10 \leq \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

$$3) p = 5, q = 0 \Rightarrow 0 \leq 0 \leq \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

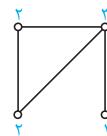
$$4) p = 9, q = 38 \Rightarrow 0 \leq 38 \not\leq \frac{9 \times 8}{2} = 36 \Rightarrow \text{حتماً ساده نیست}$$

۱۵) رابطه‌ی درجه‌ها و اندازه: در هر گراف

$$\sum_{i=1}^p \deg v_i = 2q$$

ساده، مجموع درجات رؤس برابر است با $2q$ یا به عبارتی:

اثبات: چون هرکدام از یال‌ها به دو رأس وصل هستند، از هر رأس یک بار شمرده می‌شوند، بنابراین مجموع درجات رؤس برابر $2q$ است.



$$\Rightarrow 2 + 2 + 3 + 1 = 8 = 2q$$

نمونه‌ی ۴: گرافی دارای هشت رأس از درجه‌ی ۲ و سه رأس از درجه‌ی

۴ و تعدادی رأس از درجه‌ی ۱۱ است. اگر اندازه‌ی این گراف ۲۵ باشد، مرتبه‌ی گراف کدام است؟

۱۳ (۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴)

حل: گزینه (۱) صحبت از درجه‌ها و اندازه است، بنابراین:

$$\sum_{i=1}^p \deg v_i = 2q$$

$$\Rightarrow (2 + 2 + \dots + 2) + (4 + 4 + \dots + 4) + (11 + 11 + \dots + 11) = 2 \times 25$$

$$\Rightarrow 2 \times 8 + 3 \times 4 + 11 \times x = 50 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow p = 8 + 3 + 2 = 13$$

نمونه‌ی ۵: در گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۱۰؛ اندازه‌ی گراف برابر ۱۸

است. اگر درجه‌ی رأس‌های گراف ۳ یا ۴ باشد، تعداد رؤس از درجه‌ی ۳ کدام است؟

۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

حل: گزینه (۱) فرض می‌کنیم x رأس از درجه‌ی ۳ داریم، پس $10 - x$ رأس از درجه‌ی ۴ خواهیم داشت. بنابراین:

$$\sum_{i=1}^p \deg v_i = 2q$$

$$\Rightarrow (3 + 3 + \dots + 3) + (4 + 4 + \dots + 4) = 2 \times 18$$

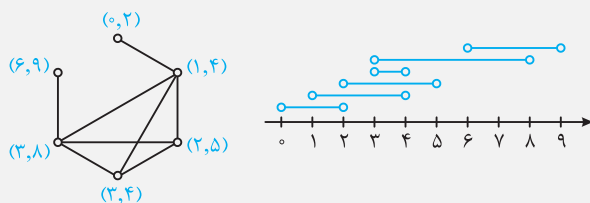
$$\Rightarrow 3x + 4(10 - x) = 36 \Rightarrow 3x + 40 - 4x = 36$$

$$\Rightarrow x = 4 \Rightarrow \text{۴ رأس از درجه‌ی ۳ داریم}$$

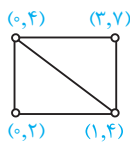
رسم گراف بازه‌ها: برای رسم گراف بازه‌ها، ابتدا به تعداد بازه‌های داده شده، رأس در نظر می‌گیریم و بازه‌ها را کنار آن‌ها می‌نویسیم، سپس بازه‌هایی را که با هم اشتراک دارند به هم وصل می‌کنیم.

نمونه ۹: گراف متناظر با بازه‌های
 $(۰,۲), (۱,۴), (۲,۵), (۳,۴), (۳,۸), (۶,۹)$ را رسم کنید.

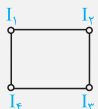
حل: چون شش بازه داریم، شش رأس در نظر می‌گیریم و هر کدام از بازه‌ها را کنار یکی از رأس‌ها می‌نویسیم. ابتدا از یک بازه مثلاً $(۰,۲)$ شروع می‌کنیم و اشتراک آن را با بقیه بازه‌ها بررسی می‌کنیم و با هر کدام که اشتراک داشت بین آن‌ها یال رسم می‌کنیم. سپس بازه‌ی بعدی یعنی $(۱,۴)$ را با بقیه بازه‌ها مورد بررسی قرار می‌دهیم. البته دیگر لازم نیست با $(۰,۲)$ بررسی کنیم و با آن‌هایی که مانده‌اند بررسی می‌کنیم و همین‌طور ادامه می‌دهیم. برای این‌که اشتراک داشتن و یا نداشتن بازه‌ها را بهتر بفهمید یک محور اعداد حقیقی رسم کنید به‌صورت زیر:



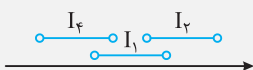
نکته: هنگامی که گفته می‌شود گراف G متناظر با بازه‌هاست، یعنی می‌توانیم بازه‌هایی پیدا کنیم که اگر گراف متناظرشان را رسم کنیم گراف حاصل همان گراف G می‌شود. مثلاً گراف متناظر با بازه‌هاست چون می‌توان بازه‌هایی به‌صورت مقابل تعریف کرد.



نمونه ۱۰: نشان دهید که گراف G ، گراف بازه‌ها نیست.



حل: به رؤس گراف، بازه‌های باز I_1, I_2, I_3, I_4 را مطابق شکل روبه‌رو نسبت می‌دهیم. داریم: بین I_1 و I_2 یال وجود دارد، پس با هم اشتراک دارند. از طرفی بین I_4 و I_1 نیز یال وجود دارد پس I_4 نیز با I_1 اشتراک دارد ولی I_4 و I_2 نباید با هم اشتراک داشته باشند چون بین آن‌ها یالی وجود ندارد. یعنی I_1, I_2 و I_4 به‌صورت مقابل می‌باشند:



حالا باید I_3 به‌گونه‌ای باشد که هم با I_2 و هم با I_4 اشتراک داشته باشد چون بین آن‌ها یال وجود دارد، اما اشتراکی با I_1 نداشته باشد؛ چنین بازه‌ای هرگز وجود ندارد. پس گراف مورد نظر نمی‌تواند گراف بازه‌ها باشد.

نکته: اگر در یک گراف، n ضلعی بدون قطر ($n \geq 4$) دیده شود، آن‌گاه گراف، گراف بازه‌ها نمی‌باشد.

گام ۲: بزرگ‌ترین عدد دنباله یعنی Δ را حذف کرده و از Δ رأس بعدی یک واحد کم می‌کنیم. (مشتق اول دنباله)
گام ۳: می‌توان گام‌های فوق را تا جایی که تشخیص دنباله‌ی حاصل میسر شود ادامه داد. (مشتق n ام)

نمونه ۷: بررسی کنید که آیا دنباله‌ی $۵, ۵, ۴, ۴, ۲, ۲$ مربوط به یک گراف ساده است؟

حل:

$$S: 5, 5, 4, 4, 2, 2 \xrightarrow{\text{حذف رأس ۵}} S': 5, 4, 4, 2, 2$$

$$S' \xrightarrow{\text{حذف رأس ۴}} S'': 5, 3, 3, 1, 1$$

$$S'' \xrightarrow{\text{حذف رأس ۲}} S''': 5, 2, 0, 0$$

$$S''' \xrightarrow{\text{حذف رأس ۵}} S''': 1, 0, 0$$

عدد منفی ظاهر شد، پس دنباله‌ی گرافی نیست.

نکته: اگر دنباله‌ای مربوط به گراف ساده باشد پس از به کار بردن الگوریتم هاول - حکیمی تا مرحله‌ی آخر، به یک دنباله می‌رسیم که تمام جملاتش صفر است.

تشخیص درجه‌ها از روی حاصل ضرب آن‌ها

اگر حاصل ضرب درجه‌ی رأس‌ها را دادند، آن عدد را به اعداد اول تجزیه می‌کنیم که ۳ حالت عمده رخ می‌دهد:

- تعداد اعداد اول موجود در حاصل ضرب کم‌تر از مرتبه‌ی گراف است که در این حالت، بقیه‌ی درجه‌ها را ۱ در نظر می‌گیریم.
- تعداد اعداد اول موجود در حاصل ضرب بیشتر از مرتبه‌ی گراف است که در این حالت دو تا از کوچک‌ترها (معمولاً دو تا از ۲ها را) در هم ضرب کرده و یک درجه در نظر می‌گیریم.
- تعداد اعداد اول موجود در حاصل ضرب برابر با مرتبه است که در این حالت احتمالاً همین اعداد درجه‌ی رأس‌ها هستند. اگر نبودند دو تا از ۲ها را ضرب کرده و ۴ فرض کنید و به جای درجه‌ی یک رأس دیگر، ۱ قرار دهید.

نمونه ۸: دنباله‌ی درجات رؤس گراف از مرتبه‌ی ۵ که حاصل ضرب درجه‌ی رأس‌های آن هر یک از اعداد ۷۲، ۱۴۴ و ۱۸ می‌باشد را پیدا کنید.

- حل:**
- $72 = 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \Rightarrow S: 3, 3, 2, 2, 2$
 - $144 = 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times (2 \times 2) \Rightarrow S: 4, 3, 3, 2, 2$
 - $18 = 3 \times 3 \times 2 \Rightarrow S: 3, 3, 2, 1, 1$

گراف بازه‌ها

تعریف: اگر رأس‌های یک گراف را متناظر با بازه‌های باز متمایزی از اعداد حقیقی در نظر بگیریم و دو رأس آن را با این شرط به هم وصل کنیم که بازه‌های متناظر آن‌ها دارای اشتراک ناتهی باشند، آن‌گاه گراف حاصل را گراف متناظر با بازه‌ها می‌نامند.

توضیح: اندازه‌ی هر گراف کامل مرتبه‌ی p یعنی K_p برابر است با:

$$q = \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$$

تمرین ۱۴: کدام یک از گراف‌های زیر کامل است؟

- (۱) ۲- منتظم از مرتبه‌ی ۴ (۲) ۳- منتظم از مرتبه‌ی ۶
(۳) ۴- منتظم از مرتبه‌ی ۵ (۴) ۵- منتظم از مرتبه‌ی ۲

حل: گزینه (۳) فقط گراف ۴- منتظم از مرتبه‌ی ۵، گراف کامل محسوب می‌شود که همان K_5 است.

تمرین ۱۵: گراف ۷ - منتظم G ، کامل است. اندازه‌ی این گراف کدام است؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۲۸ (۳) ۳۶ (۴) ۲۴

حل: گزینه (۲) گراف K_p ، یک گراف $(p-1)$ - منتظم است. پس:

$$p-1=7 \Rightarrow p=8 \Rightarrow q = \frac{p(p-1)}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

توضیح: اگر مرتبه و اندازه‌ی گرافی را داشته باشیم و بخواهیم حداقل یا حداکثر Δ یا δ را پیدا کنیم و یا بدانیم حداقل یا حداکثر چند رأس از درجه‌ی فلان داریم، باید گراف را با گراف کامل هم‌مرتبه با خودش مقایسه کنیم و ببینیم گراف چند یال از گراف کامل، کمتر دارد. سپس با توجه به آن چه مسأله خواسته است این چند یال را طوری برمی‌داریم که به خواسته‌ی مسأله برسیم.

تمرین ۱۶: مرتبه‌ی گراف G برابر ۸ و اندازه‌ی آن ۲۷ است. درجه‌ی چند رأس آن ماکزیمم است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

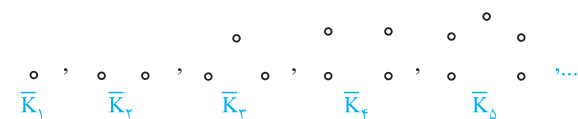
حل: گزینه (۲) مرتبه‌ی گراف ۸ است. گراف کامل مرتبه‌ی ۸ یعنی K_8 دارای $\frac{8 \times 7}{2} = 28$ یال است. پس این گراف یک یال کمتر از K_8 دارد.

درجه‌ی تمام رؤس K_8 برابر ۷ است. حالا یک یال از K_8 برمی‌داریم. با توجه به شکل روبه‌رو، درجه‌ی شش رأس گراف ماکزیمم است.



گراف تهی

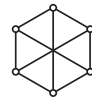
تعریف: هر گراف صفر - منتظم از مرتبه‌ی p را گراف تهی از مرتبه‌ی p می‌نامند و با \bar{K}_p نشان می‌دهند.



توضیح: گراف صفر - منتظم از مرتبه‌ی یک، هم کامل است و هم تهی، یعنی \bar{K}_1 با K_1 هیچ فرقی ندارد.

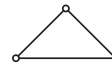
گراف منتظم

تعریف: گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی p را r - منتظم می‌نامند، هرگاه درجه‌ی تمام رؤس گراف برابر r باشد.



۳- منتظم

از مرتبه‌ی ۶



۲- منتظم

از مرتبه‌ی ۳



۱- منتظم

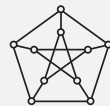
از مرتبه‌ی ۶



۰- منتظم

از مرتبه‌ی ۴

تمرین ۱۱: کدام یک از گراف‌های زیر منتظم است؟



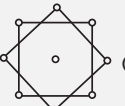
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

حل: گزینه (۴) گراف گزینه‌ی (۴)، ۳- منتظم از مرتبه‌ی ۱۰ است. دقت کنید که منتظم بودن گراف فقط به درجه‌ی رأس‌ها بستگی دارد نه به ظاهر منتظم گراف.

توضیح: در گراف r - منتظم از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی

$$pr = 2q$$

داریم:

اثبات:

$$\sum_{i=1}^p \deg v_i = 2q \Rightarrow \underbrace{r+r+r+\dots+r}_{p \text{ times}} = 2q \Rightarrow pr = 2q$$

تمرین ۱۲: گرافی دارای ۸ رأس و درجه‌ی هر رأس ۱ می‌باشد. تعداد یال‌ها کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۲۸

حل: گزینه (۱) گرافی ۱- منتظم از مرتبه‌ی ۸ داریم. پس:

$$pr = 2q \Rightarrow 8 \times 1 = 2q \Rightarrow q = 4$$

توضیح:

۱ چون در گراف‌های منتظم، pr ، برابر عدد زوج $2q$ می‌شود پس از بین p و r حداقل یکی زوج است و این یعنی گراف فرد - منتظم از مرتبه‌ی فرد وجود ندارد.

۲ می‌دانیم در هر گراف ساده از مرتبه‌ی p ، درجه‌ی هر رأس از p کمتر است. پس در گراف r - منتظم از مرتبه‌ی p ، باید همواره $r < p$ باشد.

تمرین ۱۳: چند گراف ۳ - منتظم از مرتبه‌ی ۷ وجود دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۲۱ (۴) صفر

حل: گزینه (۴) گراف فرد - منتظم از مرتبه‌ی فرد وجود ندارد. واقعاً اگر چنین گرافی وجود داشته باشد باید $2q = 3 \times 7$ باشد و در نتیجه $q = 10.5$ خواهد شد!!!

گراف کامل

تعریف: هر گراف $(p-1)$ - منتظم از مرتبه‌ی p را گراف کامل مرتبه‌ی p می‌نامند و با K_p نشان می‌دهند.



K_1



K_2



K_3



K_4



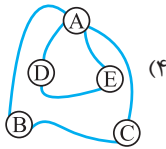
K_5

مقدمات گراف

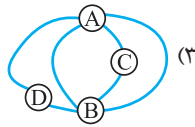
در چند تست زیر با مفاهیم اولیه و بنیادی گراف آشنا می‌شوید هر چند از این نوع تست‌ها به‌طور مستقیم در کنگور سراسری سؤالی دیده نمی‌شود اما پایه و اساس کل فصل می‌باشد و دانستن آن‌ها ضروری است.

۱- گراف متناظر با نقشه‌ی کدام یک از مناطق زیر نمایشگر یک گراف ساده است؟

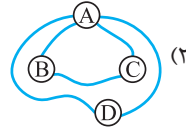
شکل ۱ من ۲ و شکل‌های ۲ و ۳ من ۳ کتاب درسی



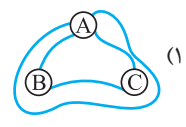
(۴)



(۳)



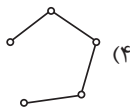
(۲)



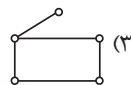
(۱)

تمرین ۴ من ۸ کتاب درسی

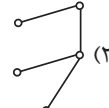
۲- نمودار گراف $G = (V, E)$ که در آن $V = \{a, b, c, d, e\}$ و $E = \{ab, bd, ec, bc\}$ می‌باشند، کدام است؟



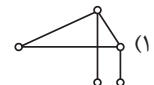
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

۳- تعداد رأس‌ها و یال‌های گراف $G = (V, E)$ با $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ و $E = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_1v_5\}$ به ترتیب برابر:

(۴) ۵ و ۷ است مثال ۱ من ۱۰ کتاب درسی

(۳) ۵ و ۴ است

(۲) ۵ و ۸ است

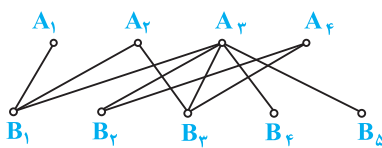
(۱) ۵ و ۸ است

گراف مشاغل، کاربرد گراف ساده در امور روزمره است که در متن و تمرین‌های کتاب درسی مطرح شده است ولی تاکنون سؤالی از آن در کنگور سراسری به‌طور مستقیم مطرح نشده است.

۴- مطابق شکل مقابل برای شغل‌های A_1 تا A_4 پنج نفر به نام‌های B_1 تا B_5 داوطلب می‌شوند، اگر

قرار باشد برای تمام شغل‌ها متصدی پیدا شود و هر داوطلب حداکثر یک شغل را بپذیرد، آن‌گاه

شغل A_3 به کدام یک از داوطلبین ممکن است برسد؟



(۲) B_5

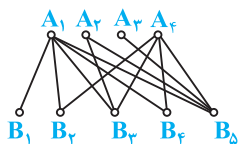
(۱) B_5 یا B_4

(۴) B_5 یا B_2

(۳) B_4 یا B_3

۵- افراد B_1 تا B_5 جهت استخدام در مشاغل A_1 تا A_4 مطابق گراف روبه‌رو اعلام آمادگی کرده‌اند.

این افراد به چند طریق می‌توانند این شغل‌ها را تصاحب کنند؟



(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) ۶

(۳) ۴

۶- در گراف $G = (V, E)$ که $V = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$ و $E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6\}$ می‌باشد، حاصل $\frac{p+q}{\Delta-\delta}$ کدام است؟

تمرین ۲ بند الف من ۱۴ کتاب درسی

(۲) ۵/۵

(۱) ۱۱

(۴) ۴/۵

(۳) ۱۱/۳

۷- به گراف $G = (V, E)$ با $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ و $E = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7\}$ کدام یال را

تمرین ۴ من ۸ کتاب درسی

اضافه کنیم، گرافی با دو بخش جدا از هم حاصل نمی‌شود؟

(۴) v_1v_7

(۳) v_4v_5

(۲) v_1v_3

(۱) v_6v_7

تعریف ۲-۱ من ۱۰ کتاب درسی

۸- کدام گراف با مشخصات زیر حتماً ساده نیست؟

(۴) $q=38, p=9$

(۳) $q=0, p=5$

(۲) $q=10, p=7$

(۱) $q=15, p=6$

تعریف ۲-۱ من ۱۰ کتاب درسی

۹- مرتبه‌ی گراف G برابر ۱۵ می‌باشد. این گراف حداکثر چند یال می‌تواند داشته باشد؟

(۴) ۱۲۰

(۳) ۱۰۵

(۲) ۱۱۰

(۱) ۹۱

۱۰- گراف G از مرتبه‌ی ۱۲، دارای سه رأس از درجه‌ی صفر است. این گراف حداکثر چند یال می‌تواند داشته باشد؟

تعریف ۲-۱ من ۱۰ کتاب درسی

(۴) ۵۵

(۳) ۳۶

(۲) ۴۵

(۱) ۶۶

ایرهای تست زیر چند بار در کنگور سراسری دیده شده است که در ترکیب با مفاهیم دیگر مورد سؤال قرار می‌گیرد. آفرین بار هم در کنگور فارچ ۹۳ دیده شد ...

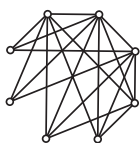
۱۱- مجموع مرتبه و اندازه‌ی گراف ساده‌ی G ، برابر ۱۶ است. مرتبه‌ی این گراف چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟ مشابه دافل ۸۴

۱۵ (۱) ۱۱ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴)

۱۲- در گراف ساده‌ی $G = (V, E)$ مجموعه‌ی E دارای ۲۳ عضو است. حداقل تعداد اعضای مجموعه‌ی V کدام است؟ تعریف ۱-۲ من ۱۰ کتاب درسی

۶ (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴)

چند تست زیر که در رابطه با مجموع درجه‌ها و اندازه‌ی گراف است در لایه‌های پنهان بسیاری از تست‌های سراسری وجود دارد و آفرین بار هم در کنگور سراسری سال ۹۳ رد پای آن‌ها دیده شد ...



قضیه ۱ من ۱۱ کتاب درسی

۱۳- اندازه‌ی گراف مقابل کدام است؟

۱۷ (۱) ۱۸ (۲) ۱۹ (۳) ۲۰ (۴)

۱۴- گرافی دارای هشت رأس از درجه‌ی ۲ و سه رأس از درجه‌ی ۴ و تعدادی رأس از درجه‌ی ۱۱ است. اگر اندازه‌ی گراف ۲۵ باشد، مرتبه‌ی گراف کدام است؟ مشابه دافل ۹۳

۱۳ (۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴)

۱۵- در گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۱۰؛ اندازه‌ی گراف برابر ۱۸ است. اگر درجه‌ی رأس‌های گراف ۳ یا ۴ باشد، تعداد رؤس از درجه‌ی ۳ کدام است؟ مشابه دافل ۹۳

۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

۱۶- در گراف ساده‌ی $G = (V, E)$ مجموع درجات رؤس زوج برابر ۶ و تعداد یال‌ها برابر ۷ است، مجموع درجات رؤس فرد کدام است؟ مشابه دافل ۹۳

۲ (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴)

۱۷- در گرافی از مرتبه‌ی p ، اندازه برابر ۱۵ است و درجه‌ی رأس‌های گراف ۳ یا ۵ می‌باشد. مقدار p کدام است؟ مشابه دافل ۹۳

۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

۱۸- گرافی دارای ۱۷ یال است، رؤس این گراف از درجه‌های ۱، ۲، ۴ و ۹ می‌باشند و همچنین تعداد رؤس از درجه‌ی ۱ با تعداد رؤس از درجه‌ی ۹ و تعداد رؤس از درجه‌ی ۲ با تعداد رؤس از درجه‌ی ۴ برابر است. مرتبه‌ی گراف کدام است؟ مشابه دافل ۹۳

۱۳ (۱) ۱۲ (۲) ۱۱ (۳) ۱۰ (۴)

دنباله‌ی گرافی

بست دنباله‌ی گرافی ۹ بار در کنگور سراسری دافل و فارچ از سال ۸۰ به بعد دیده شده است که آفرین بار هم در کنگور سراسری دافل ۹۳ بود. ضمناً این تیپ سؤال قابلیت ترکیب با ماتریس مجاورت که در انتهای جزوه‌ی سوم با آن آشنا می‌شوید را نیز دارد که در آن‌جا بیشتر به آن پرداخته شده ...

۱۹- در گرافی که ۱۶ رأس دارد، تعداد رأس‌های زوج عددی و تعداد رأس‌های فرد عددی است. دافل ۸۶

۱) فرد - فرد ۲) فرد - زوج ۳) زوج - فرد ۴) زوج - زوج

۲۰- گرافی شامل ۵ رأس است، کدام گزینه نمی‌تواند نشان‌دهنده‌ی دنباله‌ی درجات رؤس آن باشد؟ مشابه دافل ۸۸

۴۰۳۰۲۰۱۰۰ (۱) ۴۰۴۰۴۰۴۰۴ (۲) ۱۰۱۰۱۰۱۰۰ (۳) ۲۰۲۰۲۰۲۰۲ (۴)

۲۱- کدام یک از دنباله‌های زیر، دنباله‌ی درجه‌ی رأس‌های یک گراف ساده است؟ مشابه دافل ۸۸

۴۰۴۰۴۰۳۰۲۰۱۰۱ (۱) ۶۰۵۰۳۰۳۰۲۰۱۰۰۰۰ (۲) ۵۰۵۰۳۰۳۰۱۰۱ (۳) ۳۰۳۰۳۰۱۰۱۰۱۰۰۰ (۴)

۲۲- در یک گراف ساده از مرتبه‌ی ۶، دنباله درجه‌ی رأس‌های آن، به کدام صورت می‌تواند باشد؟ دافل ۸۵

۵۰۴۰۳۰۲۰۲۰۱ (۱) ۵۰۴۰۳۰۲۰۲۰۱ (۲) ۵۰۴۰۳۰۲۰۱۰۱ (۳) ۵۰۴۰۳۰۳۰۲۰۱ (۴)

۲۳- اگر درجه‌ی رأس‌های یک گراف ساده به صورت x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 باشد، x کدام عدد می‌تواند باشد؟ مشابه دافل ۸۳

۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۸ (۴)

۲۴- درجه‌ی رؤس گراف G به صورت $2, 3, 4, 5, a, b$ است، کم‌ترین عدد $a + b$ کدام است؟ دافل ۸۳

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

مشابه دافل ۸۳

۲۵- در گرافی با درجه‌ی رئوس $a, b, 2, 2, 4, 4, 4$ حداکثر $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۹ (۳) ۸ (۴) ۷

مشابه دافل ۹۳

۲۶- در گرافی با درجه‌ی رئوس $a, b, c, 2, 2, 5$ حداکثر $a + b + c$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۷ (۳) ۱۱ (۴) ۱۳

۲۷- در گرافی با درجه‌ی رئوس $a, a, b, b, 2, 2$ اگر $q = 3p - 8$ باشد، برای حاصل ضرب درجه‌ی رأس‌ها چند مقدار مختلف وجود دارد؟

مشابه دافل ۹۳

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

مشابه دافل ۹۳

۲۸- در گراف G با درجه‌ی رأس‌های $a, b, c, 2, 4$ اگر $q = p^2 + 3$ باشد، برای حاصل ضرب abc چند جواب وجود دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۲۹- درجه‌ی رأس‌های یک گراف ساده و همبند، اعداد $a, b, c, 1, 3, 4$ هستند. اگر p تعداد رأس‌های گراف، q تعداد یال‌های گراف و $q = \frac{3}{4}p$ باشد، تعداد جواب‌های مجموعه‌ی $\{a, b, c\}$ کدام است؟

دافل ۹۳

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۰- درجه‌ی رأس‌های یک گراف همبند و ساده، اعداد $a, b, c, 2, 5$ هستند. اگر p تعداد رأس‌ها و q تعداد یال‌های گراف باشد

مشابه دافل ۹۳

و $p^2 = 3(q + 2)$ باشد، برای حاصل ضرب درجات رئوس این گراف چند مقدار مختلف وجود دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

مشابه دافل ۸۰

۳۱- کدام عدد نمی‌تواند حاصل ضرب درجه‌ی رأس‌های یک گراف از مرتبه‌ی ۵ باشد؟

- (۱) ۱۲۸ (۲) ۱۷۲ (۳) ۱۶ (۴) ۲۷

مشابه قارچ ۸۸

۳۲- حاصل ضرب درجه‌ی رأس‌های گراف G از مرتبه‌ی ۵ برابر ۱۰۸ است، این گراف چند رأس فرد دارد؟

- (۱) هیچ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۳

مشابه قارچ ۸۸

۳۳- حاصل ضرب درجه‌ی رأس‌های گراف G از مرتبه‌ی ۶ برابر ۱۹۲ است، این گراف چند رأس از درجه‌ی ماکزیمم دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

مشابه قارچ ۸۸

۳۴- در گرافی از مرتبه‌ی ۶ حاصل ضرب درجه‌ی تمام رأس‌ها ۳۶۰ است، تعداد یال‌های این گراف کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) ۸

گراف بازه‌ها



از این‌ها به بعد با انواع گراف‌های ساده آشنا می‌شویم که اولین آن‌ها گراف بازه‌هاست. این نوع گراف که در تمرین‌های کتاب درسی مطرح شده است از سال ۸۸ پا به عرصه‌ی کنکور سراسری گذاشت و معمولاً دو نوع سؤال دارد یکی رسم گراف از روی بازه‌ها و یکی تشخیص بازه‌ای بودن گراف. در همین ۵ سال هم ۲ بار مورد توجه طراحان قرار گرفته است ...

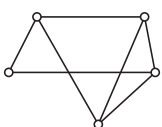
مشابه دافل ۹۰

۳۵- گراف متناظر با بازه‌های $(4, 9)$ ، $(2, 4)$ ، $(3, 5)$ ، $(1, 3)$ و $(5, 7)$ کدام گزینه است؟

مشابه دافل ۹۰

۳۶- دنباله‌ی درجه‌ی رئوس گراف متناظر با بازه‌های $(5, 8)$ و $(4, 6)$ ، $(3, 7)$ ، $(1, 4)$ ، $(0, 5)$ ، $(4, 6)$ و $(5, 8)$ کدام است؟

- (۱) $4, 2, 2, 2, 2, 4$ (۲) $4, 4, 3, 3, 2, 2$ (۳) $4, 3, 2, 2, 1, 3$ (۴) $4, 3, 3, 2, 2, 4$

۳۷- دو رأس متناظر با بازه‌های (a, b) و (c, d) از اعداد حقیقی مجاورند به شرط آن‌که اشتراک این دو بازه تهی

دافل ۸۸

نباشد. گراف مقابل به چند طریق می‌تواند گراف بازه‌ها باشد؟

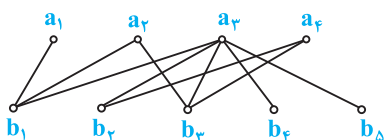
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) نشدنی

۳۸- دو رأس متناظر با بازه‌های (a, b) و (c, d) از اعداد حقیقی مجاورند به شرط آن‌که اشتراک

مشابه دافل ۸۸

این دو بازه ناتهی باشد، گراف مقابل به چند طریق متناظر با بازه‌هاست؟

- (۱) بی‌شمار (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) نشدنی



- ۵۲- در یک مهمانی ۹ نفره به چند طریق ممکن است هر یک از افراد دقیقاً با سه نفر دیگر دست دهد؟
 (۱) ۹ (۲) ۲۷ (۳) صفر (۴) $\binom{9}{3}$
 تمرین ۱۱ ص ۱۶ کتاب درسی
- ۵۳- گراف r - منتظم G از مرتبه‌ی ۷ است. r چند مقدار مختلف می‌تواند باشد؟
 (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۷
 تمرین ۴ ص ۱۵ کتاب درسی
- ۵۴- در گراف ساده‌ی $G = (V, E)$ ؛ $\Delta = \delta = 3$ می‌باشد و رابطه‌ی $q = 2p - 3$ بین مرتبه و اندازه برقرار است. مقدار $|p - q|$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
 تمرین ۱ ص ۱۴ کتاب درسی
- ۵۵- در یک گراف ساده، درجه‌ی همی رئوس گراف برابر ۶ بوده و رابطه‌ی $q = 2p + 5$ بین مرتبه و اندازه برقرار است. مقدار p کدام است؟
 (۱) ۸ (۲) ۵ (۳) ۱۰ (۴) چنین گرافی وجود ندارد.
 تمرین ۱ ص ۱۴ کتاب درسی

گراف کامل

- ۵۶- کدام یک از گراف‌های زیر کامل است؟
 (۱) ۲- منتظم از مرتبه‌ی ۴ (۲) ۳- منتظم از مرتبه‌ی ۶ (۳) ۴- منتظم از مرتبه‌ی ۵ (۴) ۵- منتظم از مرتبه‌ی ۲
 مثال ۴ ص ۱۲ کتاب درسی
- ۵۷- تعداد یال‌های گراف K_q کدام است؟
 (۱) صفر (۲) ۲۸ (۳) ۳۶ (۴) ۴۵
 قضیه ۲ ص ۱۲ کتاب درسی
- ۵۸- اندازه‌ی گراف کاملی برابر ۴۵ است، درجه‌ی هر رأس آن کدام است؟
 (۱) ۱۰ (۲) ۹ (۳) ۸ (۴) ۱۱
 قضیه ۲ و مثال ۴ ص ۱۲ کتاب درسی
- ۵۹- مجموع مرتبه و اندازه‌ی گراف کاملی برابر ۴۵ است، اندازه‌ی این گراف کدام است؟
 (۱) ۲۸ (۲) ۳۶ (۳) ۳۰ (۴) ۲۱
 مشابه قارج ۹۲
- ۶۰- تفاضل مرتبه و اندازه‌ی گراف کاملی ۲۰ است، درجه‌ی رأس‌های آن کدام است؟
 (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۹
 مشابه قارج ۹۲
- ۶۱- حاصل ضرب مرتبه و اندازه‌ی گراف کاملی ۹۰ است، مرتبه‌ی این گراف کدام است؟
 (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸
 مشابه قارج ۹۲
- ۶۲- حاصل ضرب مرتبه و اندازه‌ی گراف کاملی ۱۴۷ است، درجه‌ی رأس‌های این گراف کدام است؟
 (۱) ۵ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴) ۶
 مشابه قارج ۹۲
- ۶۳- کدام گزینه می‌تواند مجموع مرتبه و اندازه‌ی یک گراف کامل باشد؟
 (۱) ۶۵ (۲) ۳۰ (۳) ۴۲ (۴) ۵۵
 قضیه‌ی ۲ ص ۱۲ کتاب درسی
- ۶۴- اندازه‌ی گراف کامل G ، ۵ برابر مرتبه‌ی آن است. گراف G چند یال دارد؟
 (۱) ۲۸ (۲) ۳۶ (۳) ۴۵ (۴) ۵۵
 قضیه ۲ ص ۱۲ کتاب درسی
- ۶۵- به یک گراف ۳- منتظم از مرتبه‌ی ۶، چند یال اضافه کنیم تا کامل شود؟
 (۱) ۹ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷
 قضیه ۲ ص ۱۲ کتاب درسی
- ۶۶- گرافی با درجه‌ی رئوس a, b, c, d, e با اضافه کردن ۳ یال کامل می‌شود، برای حاصل ضرب abc چند مقدار مختلف وجود دارد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
 مشابه رافل ۹۳
- ۶۷- دنباله‌ی درجات رئوس گرافی به صورت $2, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 7$ است. این گراف چند جفت رأس غیرمجاور دارد؟
 (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۱۸
 قضیه‌ی ۲ ص ۱۲ کتاب درسی
- ۶۸- به گراف ۴- منتظم G ، ۱۸ یال اضافه کرده‌ایم تا هر دو رأس متمایزش مجاور شوند. گراف G چند رأس دارد؟
 (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱
 قضیه‌ی ۲ ص ۱۲ کتاب درسی

نظریه‌ی گراف

فصل اول

Graph
Theory

