درسنامه‌ی ۶

پیشامدهای مستقل و قانون ضرب احتمالات

تعریف: اگر A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه‌ای باشند و وقوع یا عدم وقوع هر یک در وقوع یا عدم وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد، این دو پیشامد را **مستقل** از هم می‌نامیم. مثلاً در پرتاب دو تاس، پیشامد آمدن عدد ۶ در تاس اول با پیشامد آمدن عدد ۶ در تاس دوم مستقل از هم هستند.

تذکر: دو پیشامد را که مستقل از هم نیستند، **وابسته** گوییم.

قانون ضرب احتمالات برای دو پیشامد مستقل:

اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند، داریم:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

و بر عکس اگر $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$، دو پیشامد A و B مستقل خواهند بود.

نتیجه: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشد، قانون جمع احتمالات به صورت زیر در می‌آید:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$$

مثال: یک سکه و یک تاس را با هم می‌اندازیم. احتمال این‌که عدد رو شده‌ی تاس، عدد اول و سکه «پشت» بیاید را حساب کنید.

پاسخ:

روش اول: اگر A پیشامد عدد اول بودن تاس و B پیشامد «پشت» آمدن سکه باشد، $A\cap B$ پیشامد این است که تاس عدد اول **و** سکه «پشت» بیاید. دو پیشامد A و B مستقل از هم هستند، زیرا وقوع هر یک، در وقوع دیگری تأثیری نمی‌گذارد. پس طبق قانون ضرب احتمالات داریم:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B) \qquad (*)$$

بنابراین احتمال هر یک از پیشامدهای A و B را می‌یابیم:

$$\begin{cases} A=\{۲،۳،۵\}\ ,\ S_{\text{تاس}}=\{۱،۲،...،۶\}\Rightarrow P(A)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲} \\ B=\{\text{پ}\}\ ,\ S_{\text{سکه}}=\{\text{ر،پ}\}\Rightarrow P(B)=\frac{۱}{۲}\end{cases} \xrightarrow{(*)} P(A\cap B)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

روش دوم: فضای نمونه‌ای پرتاب سکه و تاس را به‌دست می‌آوریم:

$$S=\{(\text{ر}\ ,\ ۱)\ ,\ (\text{ر}\ ,\ ۲)\ ,\ ...\ ,\ (\text{ر}\ ,\ ۶)\ ,\ (\text{پ}\ ,\ ۱)\ ,\ (\text{پ}\ ,\ ۲)\ ,\ ...\ ,\ (\text{پ}\ ,\ ۶)\}\Rightarrow n(S)=۱۲$$

C را پیشامد «پشت» آمدن سکه **و** عدد اول بودن تاس درنظر می‌گیریم:

$$C=\{(\text{پ}\ ,\ ۲)\ ,\ (\text{پ}\ ,\ ۳)\ ,\ (\text{پ}\ ,\ ۵)\}\Rightarrow n(C)=۳\Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$$

نکته: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آن‌گاه پیشامدهای (B',A') و (B,A') و (B',A) نیز مستقل از هم می‌باشند، بنابراین داریم:

$$P(A\cap B')=P(A)\times P(B')\ ,\ P(A'\cap B)=P(A')\times P(B)\ ,\ P(A'\cap B')=P(A')\times P(B')$$

مثال: اگر A و B دو پیشامد مستقل از فضای نمونه‌ای S باشند، به طوری که $P(A)=\frac{۳}{۴}$ و $P(B)=\frac{۱}{۳}$، چه‌قدر احتمال دارد که هیچ یک از دو پیشامد A و B روی <u>ندهند</u>؟

پاسخ: مطلوب سؤال احتمال رخ ندادن A **و** رخ ندادن B، یعنی احتمال رخ دادن A' **و** رخ دادن B' است. بنابراین باید $P(A'\cap B')$ را بیابیم. طبق نکته‌ی گفته شده چون A و B مستقل از هم می‌باشند، A' و B' نیز مستقل از هم هستند، پس:

$$P(A'\cap B')=P(A')\times P(B')=\big(۱-P(A)\big)\big(۱-P(B)\big)=\Big(۱-\frac{۳}{۴}\Big)\Big(۱-\frac{۱}{۳}\Big)\Rightarrow P(A'\cap B')=\frac{۱}{۴}\times\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۶}$$

نکته: برای بررسی مستقل بودن دو پیشامد A و B ابتدا احتمال‌های $P(A)$، $P(B)$ و $P(A\cap B)$ را به‌دست می‌آوریم. سپس اگر تساوی $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ بین آن‌ها برقرار باشد، می‌گوییم دو پیشامد A و B مستقل از هم هستند، در غیر این صورت آن‌ها را وابسته (غیرمستقل) می‌نامیم.

مثال: سکه‌ی سالمی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامدی باشد که در آن دومین پرتاب «رو» است و B پیشامدی باشد که در آن فقط دو «رو» به صورت متوالی ظاهر شده است. آیا این دو پیشامد A و B مستقل هستند؟ (امتحانات هماهنگ کشوری ۹۰)

پاسخ: فضای نمونه‌ای پرتاب ۳ بار سکه‌ی سالم به صورت زیر است:

$$S=\{(\text{ر،ر،ر}),(\text{ر،ر،پ}),(\text{ر،پ،ر}),(\text{پ،ر،ر}),(\text{ر،پ،پ}),(\text{پ،ر،پ}),(\text{پ،پ،ر}),(\text{پ،پ،پ})\}$$

حال با توجه به فضای نمونه‌ای فوق پیشامدهای A و B و $A\cap B$ و سپس احتمال‌هایشان را به‌دست می‌آوریم:

$$A = \{(\text{پ، ر، پ}), (\text{ر، ر، ر}), (\text{ر، ر، پ}), (\text{پ، ر، ر})\} \Rightarrow n(A) = ۴ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

$$B = \{(\text{ر، ر، ر}), (\text{پ، ر، ر}), (\text{ر، ر، پ})\} \Rightarrow n(B) = ۲ \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴}$$

$$A \cap B = \{(\text{ر، ر، ر}), (\text{پ، ر، ر}), (\text{ر، ر، پ})\} \Rightarrow n(A \cap B) = ۲ \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴}$$

حال درستی تساوی $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ را بررسی می‌کنیم:

$P(A \cap B) \stackrel{?}{=} P(A).P(B) \Rightarrow \frac{۱}{۴} \stackrel{?}{=} \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{۱}{۴} \neq \frac{۱}{۸} \Rightarrow$ پیشامدهای A و B مستقل نمی‌باشند.

انتخاب مهره بدون جایگذاری و با جایگذاری

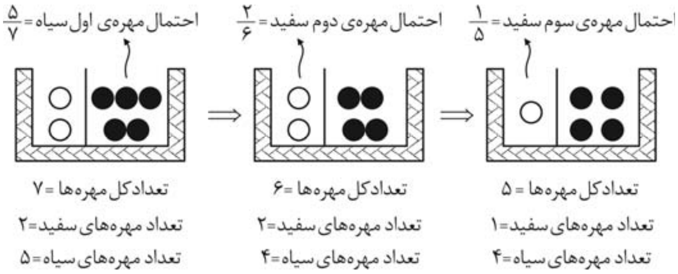
الف) فرض کنید انتخاب مهره از داخل یک کیسه یا ظرف، به صورت پی‌درپی (یکی پس از دیگری یا پشت سرهم) و بدون جایگذاری انجام شود، در این صورت در هر مرحله برداشتن یک مهره، از تعداد کل مهره‌ها نیز ۱ عدد کم می‌شود. به عنوان مثال اگر ۸ مهره درون کیسه وجود داشته باشد، پس از برداشتن مهره‌ی اول، تعداد کل مهره‌ها ۷ عدد و بعد از برداشتن دومین مهره، تعداد کل مهره‌ها به ۶ مهره کاهش می‌یابد.

مثال: در کیسه‌ای ۵ مهره‌ی سیاه و ۲ مهره‌ی سفید وجود دارد، سه مهره به تصادف و پی‌درپی و بدون جایگذاری از این کیسه خارج می‌کنیم. چه‌قدر احتمال دارد که مهره‌ی اول سیاه و مهره‌های دوم و سوم سفید باشد؟

پاسخ: در هنگام برداشتن مهره‌ی اول، در داخل کیسه ۷ مهره وجود دارد که ۵ تای آن‌ها سیاه است. پس احتمال سیاه بودن مهره‌ی اول $\frac{۵}{۷}$ می‌باشد.

(در واقع احتمال سیاه بودن مهره‌ی اول $\frac{\binom{۵}{۱}}{\binom{۷}{۱}}$ است که چون ۱ مهره انتخاب شده می‌توان آن را به صورت تعداد مهره‌های سیاه بر روی تعداد کل مهره‌ها نوشت.)

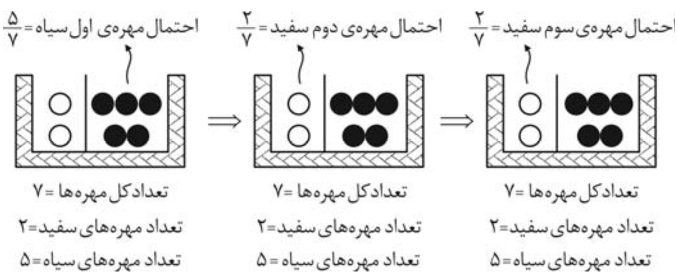
در هنگام برداشتن مهره‌ی دوم، از تعداد کل مهره‌ها، هم‌چنین از تعداد مهره‌های سیاه یکی کم شده است ولی تعداد مهره‌های سفید همان ۲ عدد است، پس با توجه به شکل احتمال سفید بودن مهره‌ی دوم $\frac{۲}{۶}$ است و در نهایت هنگام خروج مهره‌ی سوم، تعداد کل مهره‌ها ۵ بوده که فقط یکی از آن‌ها سفید است. پس احتمال سفید بودن مهره‌ی سوم $\frac{۱}{۵}$ است. بنابراین احتمال خواسته شده برابر می‌شود با:



$$P = \frac{\cancel{۵}}{۷} \times \frac{\cancel{۲}}{\underset{۳}{\cancel{۶}}} \times \frac{۱}{\cancel{۵}} = \frac{۱}{۲۱}$$

ب) اگر انتخاب مهره از داخل یک کیسه یا ظرف، به صورت پی‌درپی و با جایگذاری باشد، در این حالت تعداد کل مهره‌ها در هر مرحله برداشتن یک مهره تغییری نمی‌کند و ثابت است. در حقیقت برداشتن مهره‌ها بر روی هم تأثیری نداشته و پیشامد انتخاب مهره‌ها مستقل هستند. حال مثال قسمت الف را در حالتی که انتخاب مهره‌ها پی‌درپی و با جایگذاری باشد، حل می‌کنیم.

پاسخ: همان‌طوری که در شکل‌ها ملاحظه می‌کنید، چون انتخاب مهره‌ها با جایگذاری می‌باشد، تعداد کل مهره‌ها در تمام مراحل ثابت است و خارج شدن مهره‌ها بر روی هم تأثیری نداشته و مستقل از هم هستند. بنابراین احتمال خواسته شده برابر می‌شود با:



$$P = \frac{۵}{۷} \times \frac{۲}{۷} \times \frac{۲}{۷} = \frac{۲۰}{۳۴۳}$$

۸۹- تعداد مسافرین در یک هتل ۷۲ نفرند که ۲۳ نفر آن‌ها تاجر و ۱۲ نفر برای اولین بار سفر کرده‌اند. ۸ نفر از این تاجرین، برای اولین بار سفر کرده‌اند. اگر فردی به تصادف از بین آن‌ها انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد نه تاجر است و نه اولین بار سفر کرده است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۷)

۹۰- در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۶ موش سیاه موجود است. به تصادف ۳ موش از بین آن‌ها خارج می‌کنیم. با کدام احتمال لااقل یکی از موش‌ها سفید است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور ۹۱)

۱) $\frac{۸}{۱۱}$ ۲) $\frac{۹}{۱۱}$ ۳) $\frac{۲۸}{۳۳}$ ۴) $\frac{۲۹}{۳۳}$

۹۱- در کیسه‌ای ۳ مهره‌ی سیاه، ۴ مهره‌ی قرمز و ۳ مهره‌ی آبی وجود دارد. از این کیسه ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال این که حداقل دو مهره همرنگ باشند، کدام است؟ (تمرین کتاب درسی)

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۷

۹۲- از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره‌ی سبز و ۴ مهره‌ی آبی و ۲ مهره‌ی زرد می‌باشد، سه مهره به تصادف خارج می‌کنیم، احتمال وقوع کدام پیشامد از بقیه کم‌تر است؟ (امتحانات هماهنگ کشوری ۹۱ و ۹۰ و مثال کتاب درسی)

۱) هر ۳ مهره سبز باشد. ۲) هر ۳ مهره همرنگ باشند. ۳) حداقل ۱ مهره آبی باشد. ۴) حداکثر ۲ مهره سبز باشد.

۹۳- در یک عدد سه رقمی بدون صفر، احتمال این‌که لااقل دو رقم یکسان باشند، کدام است؟ (سراسری انسانی ۸۷)

۱) $\frac{۲۵}{۸۱}$ ۲) $\frac{۱۱}{۲۷}$ ۳) $\frac{۱۷}{۳۶}$ ۴) $\frac{۴۹}{۸۱}$

۹۴- در پرتاب سه تاس، احتمال آن‌که حداقل یک بار ۶ ظاهر شود، کدام است؟ (آزاد ریاضی ۸۳ و مشابه مثال کتاب درسی)

۱) $\frac{۹۰}{۲۱۶}$ ۲) $\frac{۱۰۷}{۲۱۶}$ ۳) $\frac{۱۰۸}{۲۱۶}$ ۴) $\frac{۹۱}{۲۱۶}$

۹۵- اگر یک عدد سه رقمی با کنار هم قرار گرفتن ارقام متمایز ۰،۱،۲،۳،۴ به وجود آید، احتمال آن‌که این عدد زوج باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$ (سراسری تجربی ۸۵)

۹۶- اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A)=\frac{۱}{۳}$ و $P(B)=\frac{۱}{۴}$، حاصل $P(A\cup B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۱۲}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۶}{۱۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۲}$

۹۷- اگر A و B دو پیشامد مستقل ناتهی باشند و $P(A\cap B)=[P(A)]^۲$ باشد، $P(A')$ کدام است؟

۱) $P(A)$ ۲) $P(A)\times P(B)$

۳) $۱-P(A)\times P(B)$ ۴) $۱-P(B)$

۹۸- اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند و داشته باشیم $P(A)=\frac{۱}{۳}$ و $P(A\cup B)=\frac{۵}{۶}$، آن‌گاه $P(B')$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۹۹- اگر A و B دو پیشامد مستقل و $P(A)=۰/۴$ و $P(B)=۰/۳$ باشد، آن‌گاه $P(A-B)$ کدام است؟

۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۲۸ ۳) ۰/۱۸ ۴) ۰/۴۲

۱۰۰- اگر $P(A)=\frac{۱}{۲}$، $P(B)=\frac{۱}{۳}$ و A و B مستقل باشند، $P(A\cup B')$ کدام است؟ (آزاد ریاضی ۸۶)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۱۰۱- اگر دو پیشامد A و B مستقل از هم و $P(B)=۲P(A)$ و $P(A\cup B)=\frac{۵}{۸}$ باشد، آن‌گاه $P(B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

۱۰۲- اگر $P(B)=۰/۸$، $P(A)=۰/۳$ و $P(A\cup B)=۰/۸۶$ باشد، آن‌گاه دو پیشامد A و B نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

۱) ناسازگار ۲) $A\subset B$ ۳) متمم ۴) مستقل

۱۰۳- تاسی را دو بار می‌اندازیم. اگر A پیشامد آن باشد که عدد رو شده در پرتاب اول برابر ۴ و B پیشامد آن که مجموع اعداد رو شده‌ی دو تاس ۷ باشد، در این صورت دو پیشامد A و B چگونه‌اند؟ (مثال کتاب درسی)

۱) سازگار و مستقل ۲) ناسازگار و مستقل ۳) ناسازگار و وابسته ۴) سازگار و وابسته

۱۰۴- احتمال این‌که شخص A در آزمون ورودی دانشگاه قبول شود برابر $\frac{۳}{۵}$ و احتمال این‌که شخص B در این آزمون قبول شود برابر $\frac{۲}{۳}$ است. احتمال این‌که هر دو در این آزمون قبول شوند، چه‌قدر است؟ (امتحانات هماهنگ خارج از کشور ۸۹)

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱۳}{۱۵}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۱۰۵- احتمال بهبود شخص A و B پس از عمل جراحی پیوند کلیه به ترتیب ٪۸۰ و ٪۶۰ است. اگر این دو نفر تحت عمل پیوند کلیه قرار بگیرند، احتمال آن‌که شخص B بهبود بیابد ولی شخص A بهبود نیابد، چند برابر احتمال آن است که حداقل یکی از آن‌ها بهبود بیابند؟ (مشابه مثال کتاب درسی)

۱) $\frac{۲۳}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲۳}$

۳) $\frac{۳۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۳۲}$

۱۰۶- احتمال این‌که شخص A تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند، ۰/۶ و احتمال این‌که شخص B تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند، ۰/۷ است. چه‌قدر احتمال دارد که حداقل یکی از آن‌ها تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا نکند؟ (تمرین کتاب درسی)

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۸

۳) ۰/۴۲ ۴) ۰/۵۸

۱۰۷- در گروه زنان ساکن یک روستا ۶۰ درصد آن‌ها تحصیلات ابتدایی و ۲۵ درصد از آن‌ها مهارت قالی‌بافی دارند. اگر یک فرد از این گروه انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی یا مهارت قالی‌بافی دارد؟ (سراسری تجربی ۹۰)

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۸ ۴) ۰/۸۵

۱۰۸- هر یک از دو صفحه‌ی عقربه‌دار به ۴ قطاع برابر با شماره‌های ۴،۳،۲،۱ تقسیم شده‌اند. عقربه‌ی مربوط به هر صفحه را می‌چرخانیم. احتمال این‌که عقربه‌ها در نواحی هم‌شماره متوقف شوند، کدام است؟ (سراسری انسانی خارج از کشور ۹۱)

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۰۹- اگر در یک جامعه، احتمال داشتن نوعی گروه خونی ٪۲۰ باشد، در انتخاب دو نفر، احتمال این‌که یک نفر، از این نوع گروه خونی داشته و دیگری نداشته باشد، چه‌قدر است؟ (آزاد پزشکی ۸۰)

۱) ٪۳۲ ۲) ٪۱۶ ۳) ٪۴۸ ۴) ٪۴۰

۱۱۰- احتمال قبولی دو دوست در کنکور امسال به ترتیب ۰/۴ و ۰/۶ است. احتمال آن‌که فقط یکی از آن‌ها قبول شوند، چه‌قدر است؟

۱) ۰/۴۸ ۲) ۰/۵۶ ۳) ۰/۵۲ ۴) ۰/۴۲ (آزاد ریاضی خارج از کشور ۸۹)

۱۱۱- بسکتبالیستی با احتمال ۰/۳، توپ‌هایش وارد حلقه می‌شوند، با فرض مستقل بودن پرتاب‌ها، چه‌قدر احتمال دارد از ۳ بار پرتاب او، حداقل یک توپ وارد حلقه شود؟

۱) ۰/۶۷۵ ۲) ۰/۳۴۳ ۳) ۰/۶۵۷ ۴) ۰/۳۳۴

۱۱۲- یک سکه را ۱۰۰ بار انداخته‌ایم پشت آمده است، احتمال آن‌که در یکصد و یکمین بار مجدداً پشت بیاید، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $۲^{۱۰۰}$ ۴) $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۰۱}$

۱۱۳- با چه احتمالی، در یک تیم والیبال ۶ نفره، همه در ماه خرداد متولد شده‌اند؟ (امتحانات هماهنگ خارج از کشور ۹۰ و مثال کتاب درسی)

۱) $\frac{۱}{۱۲^{۵}}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲^{۶}}$ ۳) $\frac{۱۲!}{۶!\times ۱۲^{۶}}$ ۴) $\frac{۱۲!}{۶!\times ۱۲^{۵}}$

۱۱۴- با چه احتمالی، در یک تیم والیبال ۶ نفره، همه در یک ماه متولد شده‌اند؟

۱) $\frac{۱}{۱۲^{۵}}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲^{۶}}$ ۳) $\frac{P(۱۲،۶)}{۱۲^{۶}}$ ۴) $\frac{\binom{۱۲}{۶}}{۱۲^{۶}}$

۱۱۵- چهار دانش‌آموز یک کلاس که بر یک نیمکت نشسته باشند با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر آنان یکسان است؟

۱) $\frac{۱۹}{۴۸}$ ۲) $\frac{۴۱}{۹۶}$ ۳) $\frac{۲۳}{۴۸}$ ۴) $\frac{۵۵}{۹۶}$ (سراسری تجربی خارج از کشور ۹۲)

۱۱۶- اگر در یک خانواده احتمال به دنیا آمدن فرزند دختر ٪۶۰ و پسر ٪۴۰ باشد، احتمال آن‌که هر سه فرزند این خانواده پسر باشند، چه‌قدر است؟

۱) ۰/۰۶۴ ۲) ۰/۶۴ ۳) ۰/۰۸ ۴) ۰/۰۰۸ (آزاد تجربی ۸۲)

۱۱۷- خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است، در این خانواده احتمال وقوع کدام پیشامد از بقیه بیشتر است؟ (مثال کتاب درسی)

۱) فرزندان یک در میان پسر و دختر (یا دختر و پسر) باشند. ۲) هر ۳ فرزند پسر باشد.

۳) فرزند سوم دختر باشد. ۴) فقط فرزند سوم دختر باشد.

۱۱۸- احتمال تولد فرزند پسر در یک خانواده $\frac{۱}{۴}$ است. چه‌قدر احتمال دارد فرزند اول و دوم این خانواده هم‌جنس باشند؟ (آزاد پزشکی ۸۶)

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۹}{۱۶}$

۱۱۹- در پرتاب دو تاس احتمال آن‌که هر دو تاس بین ۲ و ۵ ظاهر شوند، چه‌قدر است؟ (آزاد پزشکی ۹۰ و مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۱۸}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۱۲۰- در پرتاب هم‌زمان دو تاس، با کدام احتمال لااقل یکی از اعداد رو شده در این دو تاس مضرب ۳ است؟ (سراسری انسانی ۸۹)

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۱۲۱- سه تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال اعداد رو شده مضرب ۳ نیستند؟ (سراسری ریاضی ۸۰ و مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) $\frac{۸}{۲۷}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۱۹}{۲۷}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۲۲- یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که سکه «پشت» یا تاس ۴ بیاید، کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$ (امتحانات هماهنگ کشوری ۹۰ و مشابه هماهنگ کشوری ۹۱)

۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۲}$

۱۲۳- در پرتاب هم‌زمان دو سکه‌ی یکسان و یک تاس، با کدام احتمال دو سکه به صورت متفاوت و عدد تاس، زوج ظاهر می‌شود؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$ (سراسری انسانی ۹۱)

۱۲۴- در پرتاب دو سکه و یک تاس با هم، احتمال این‌که حداقل یک سکه «رو» و عدد تاس مضرب ۳ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$ (سراسری تجربی خارج از کشور ۹۱)

۱۲۵- احتمال آن‌که نوزادی در خانواده‌ی A با چشم‌هایی به رنگ روشن متولد شود ٪۲۰ و احتمال آن‌که نوزادی در خانواده‌ی B با چشم‌هایی به رنگ روشن متولد شود ٪۷۵ است. چه‌قدر احتمال دارد که حداکثر یکی از این دو نوزاد با چشم‌هایی به رنگ روشن متولد شوند؟

۱) ۰/۱۵ ۲) ۰/۸۵ ۳) ۰/۵۸ ۴) ۰/۵۱

۱۲۶- در ظرفی ۴ مهره‌ی سفید، ۵ مهره‌ی سیاه و ۱ مهره‌ی سبز موجود است. در ظرف دیگر ۶ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی سبز قرار دارد. به تصادف از هر ظرف یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال رنگ این دو مهره، متفاوت است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۹)

۱) $\frac{۱۹}{۴۰}$ ۲) $\frac{۲۱}{۴۰}$ ۳) $\frac{۲۳}{۴۰}$ ۴) $\frac{۲۷}{۴۰}$

۱۲۷- در یک ظرف ۵ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ی آبی قرار دارد. دو مهره پشت سر هم و با جایگذاری خارج می‌کنیم. با چه احتمالی دو مهره همرنگ نیستند؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) $\frac{۴۰}{۸۱}$ ۲) $\frac{۲۰}{۸۱}$ ۳) $\frac{۴۱}{۸۱}$ ۴) $\frac{۶۱}{۸۱}$

۱۲۸- در کیسه‌ای ۴ مهره‌ی آبی و ۳ مهره‌ی سبز و ۲ مهره‌ی قرمز وجود دارد، سه مهره به تصادف و پی‌درپی و بدون جایگذاری از این کیسه خارج می‌کنیم. چه‌قدر احتمال دارد مهره‌ی اول آبی، دومی سبز و سومی آبی باشد؟ (تمرین کتاب درسی)

۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) $\frac{۱}{۱۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲۱}$ ۴) $\frac{۳}{۱۴}$

۱۲۹- در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به طور تصادفی و پی‌درپی و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره‌ی فرد متوالیاً خارج نمی‌شوند؟ (سراسری تجربی ۹۲)

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۲۵

۱۳۰- از بین ۳ کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان، به تصادف یک کارت بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم. سپس کارت دوم را خارج می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو کارت همرنگ هستند؟ (سراسری تجربی ۹۱)

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۵}{۱۴}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

۱۳۱- در جعبه‌ای ۶ مهره‌ی سفید و ۹ مهره‌ی سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهره‌ی خارج شده سفید است؟ (سراسری تجربی ۹۲)

۱) $\frac{۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۱۳۲- در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگهداری می‌شوند. به تصادف متوالیاً سه موش را از بین آن‌ها انتخاب می‌شود. با کدام احتمال اولین موش، سفید و سومین موش، سیاه است؟ (سراسری تجربی ۸۸)

۱) $\frac{۱۱}{۵۶}$ ۲) $\frac{۱۷}{۵۶}$ ۳) $\frac{۱۳}{۵۶}$ ۴) $\frac{۱۵}{۵۶}$

۸۹- (۳) تعداد کل مسافرین هتل، همان تعداد اعضای فضای نمونه‌ای است:

$$n(S)=۷۲$$

حال پیشامدهای A و B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \to \text{تاجر بودن} \Rightarrow n(A)=۲۳ \Rightarrow P(A)=\frac{۲۳}{۷۲} \quad \text{و} \quad B \to \text{برای اولین بار سفر کردن} \Rightarrow n(B)=۱۲ \Rightarrow P(B)=\frac{۱۲}{۷۲}$$

$$A\cap B \to \text{تاجرهایی که برای اولین بار سفر کرده‌اند.} \Rightarrow n(A\cap B)=۸ \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۸}{۷۲}$$

در این تست احتمال این‌که فرد نه تاجر باشد و نه برای اولین بار سفر کرده باشد، خواسته شده است. این پیشامد متمم این است که فرد یا تاجر باشد یا برای اولین بار سفر کرده باشد، یعنی متمم $A\cup B$، پس طبق قانون جمع احتمالات ابتدا $P(A\cup B)$ را می‌یابیم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۲۳}{۷۲}+\frac{۱۲}{۷۲}-\frac{۸}{۷۲}=\frac{۲۷}{۷۲}$$

بنابراین احتمال خواسته شده عبارت است از:

$$P\big((A\cup B)'\big)=۱-P(A\cup B)=۱-\frac{۲۷}{۷۲}=\frac{۴۵}{۷۲}=\frac{۵}{۸}$$

تذکر: در هنگام نوشتن متمم پیشامد مذکور، به نوع تغییر فعل‌ها و تبدیل «و» به «یا» دقت کنید.

۹۰- (۴) **روش اول:** اولاً تعداد اعضای فضای نمونه‌ای عبارت است از:

$$n(S)=\binom{۵+۶}{۳}=\binom{۱۱}{۳}$$

ثانیاً اگر A پیشامد سفید بودن لااقل یک موش باشد، پیشامد A' (متمم A) سیاه بودن هر سه موش است. پس تعداد اعضای پیشامد A'، تعداد ترکیب‌های ۳تایی از بین ۶ موش سیاه می‌باشد:

$$n(A')=\binom{۶}{۳} \Rightarrow P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{\binom{۶}{۳}}{\binom{۱۱}{۳}}=\frac{\frac{۶!}{\cancel{۳!}\times ۳!}}{\frac{۱۱!}{\cancel{۳!}\times ۸!}}=\frac{\frac{\cancel{۶}\times ۵!}{\cancel{۶}}}{\frac{۱۱\times ۱۰\times ۹\times \cancel{۸!}}{\cancel{۸!}}} \Rightarrow P(A')=\frac{\cancel{۵}\times ۴\times \cancel{۳}\times \cancel{۲}}{۱۱\times \cancel{۱۰}\times \underset{۳}{\cancel{۹}}}=\frac{۴}{۳۳}$$

$$\Rightarrow P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۴}{۳۳}=\frac{۲۹}{۳۳}$$

روش دوم: لااقل یکی از موش‌ها سفید باشد، یعنی یا یک موش سفید یا دو موش سفید و یا سه موش سفید داشته باشیم. پس طبق اصل جمع و اصل ضرب داریم:

$$n(A)=\underbrace{\binom{۵}{۱}}_{\text{۱ موش سفید}}\overset{\text{و}}{\times}\underbrace{\binom{۶}{۲}}_{\text{۲موش سیاه}}\overset{\text{یا}}{+}\underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{۲ موش سفید}}\overset{\text{و}}{\times}\underbrace{\binom{۶}{۱}}_{\text{۱ موش سیاه}}\overset{\text{یا}}{+}\underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{۳ موش سفید}}$$

در صورت ادامه‌ی حل، $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ برابر $\frac{۲۹}{۳۳}$ به‌دست می‌آید.

۹۱- (۴) اولاً تعداد اعضای فضای نمونه‌ای تعداد ترکیب‌های ۳تایی از بین $(۳+۴+۳)$ مهره است:

$$n(S)=\binom{۳+۴+۳}{۳}=\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰!}{۳!\times ۷!}=\frac{۱۰\times \overset{۳}{\cancel{۹}}\times \overset{۴}{\cancel{۸}}\times \cancel{۷!}}{\cancel{۳}\times \cancel{۲}\times ۱\times \cancel{۷!}}=۱۲۰$$

ثانیاً اگر در پیشامد A حداقل دو مهره از سه مهره همرنگ باشند، در پیشامد A' هیچ دو مهره‌ای همرنگ نمی‌باشد، یعنی یک مهره‌ی سیاه، یک مهره‌ی قرمز و یک مهره‌ی آبی انتخاب می‌شود، پس:

$$n(A')=\underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{۱ مهره‌ی سیاه}}\overset{\text{و}}{\times}\underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{۱ مهره‌ی قرمز}}\overset{\text{و}}{\times}\underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{۱ مهره‌ی آبی}}=۳\times ۴\times ۳=۳۶ \Rightarrow P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{۳۶}{۱۲۰}=\frac{۳\times ۱۲}{۱۰\times ۱۲}=\frac{۳}{۱۰}$$

$$P(A)=۱-P(A') \Rightarrow P(A)=۱-\frac{۳}{۱۰}=\frac{۷}{۱۰}=۰/۷$$

۹۲- (۱) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای، تعداد ترکیب‌های ۳تایی از بین $(۲+۴+۵)$ مهره است:

$$n(S)=\binom{۱۱}{۳}=\frac{۱۱!}{۳!\times ۸!}=\frac{۱۱\times \overset{۵}{\cancel{۱۰}}\times \overset{۳}{\cancel{۹}}\times \cancel{۸!}}{\cancel{۳}\times \cancel{۲}\times ۱\times \cancel{۸!}}=۱۶۵ \quad (*)$$

حال با توجه به تعداد اعضای فضای نمونه‌ای احتمال رخداد پیشامدهای داده شده در گزینه‌ها را به‌دست می‌آوریم:

بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌ی (۱): اگر A پیشامد سبز بودن هر ۳ مهره‌ی انتخابی باشد، داریم:

$$n(A)=\binom{۵}{۳}=\frac{۵!}{۳!\times ۲!}=\frac{۵\times \overset{۲}{\cancel{۴}}\times \cancel{۳!}}{\cancel{۳!}\times \cancel{۲}\times ۱}=۱۰\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}\overset{(*)}{=}\frac{۱۰}{۱۶۵}$$

گزینه‌ی (۲): اگر پیشامد B، همرنگ بودن ۳ مهره‌ی انتخابی باشد، یعنی هر ۳ مهره سبز یا هر ۳ مهره آبی باشد (توجه کنید چون فقط ۲ مهره‌ی زرد داریم، هر ۳ مهره‌ی انتخابی نمی‌توانند زرد باشند.) بنابراین:

$$n(B)=\binom{۵}{۳}\overset{\text{یا}}{+}\binom{۴}{۳}=\frac{۵!}{۳!\times ۲!}+۴=\frac{۵\times \overset{۲}{\cancel{۴}}\times \cancel{۳!}}{\cancel{۳!}\times \cancel{۲}\times ۱}+۴=۱۰+۴=۱۴\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}\overset{(*)}{=}\frac{۱۴}{۱۶۵}$$

گزینه‌ی (۳): **روش اول:** اگر C، پیشامد آبی بودن حداقل ۱ مهره‌ی انتخابی باشد، متمم آن، پیشامدی است که در آن هیچ مهره‌ای آبی نمی‌باشد (یعنی هر ۳ مهره‌ی انتخابی را باید از میان ۷ مهره‌ی زرد یا سبز انتخاب کنیم.) که محاسبه‌ی آن راحت‌تر است. پس داریم:

$$n(C')=\binom{۷}{۳}=\frac{۷!}{۳!\times ۴!}=\frac{۷\times \cancel{۶}\times ۵\times \cancel{۴!}}{\cancel{۳}\times \cancel{۲}\times ۱\times \cancel{۴!}}=۳۵\Rightarrow P(C')=\frac{۳۵}{۱۶۵}\Rightarrow P(C)=۱-P(C')=۱-\frac{۳۵}{۱۶۵}=\frac{۱۳۰}{۱۶۵}$$

روش دوم: حداقل ۱ مهره‌ی آبی به معنای آن است که از ۳ مهره‌ی انتخابی یک مهره آبی (و دو مهره‌ی غیرآبی) یا دو مهره آبی (و یک مهره‌ی غیرآبی) یا هر ۳ مهره آبی باشد که تعداد اعضای این پیشامد برابر است با:

$$n(C)=\binom{۴}{۱}\binom{۷}{۲}+\binom{۴}{۲}\binom{۷}{۱}+\binom{۴}{۳}=۴\times\frac{۷\times \overset{۳}{\cancel{۶}}}{\cancel{۲}}+\frac{\overset{۲}{\cancel{۴}}\times ۳}{\cancel{۲}}\times ۷+۴=۴\times ۲۱+۶\times ۷+۴=۱۳۰$$

$$\Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}\overset{(*)}{=}\frac{۱۳۰}{۱۶۵}$$

گزینه‌ی (۴): اگر D پیشامدی باشد که حداکثر ۲ مهره‌ی انتخابی سبز باشد (یعنی ۲ مهره سبز یا ۱ مهره سبز یا ۰ مهره سبز)، متمم آن پیشامدی است که در آن هر ۳ مهره‌ی انتخابی سبز باشد که محاسبه‌ی آن راحت‌تر است. بنابراین داریم:

$$n(D')=\binom{۵}{۳}=\frac{۵!}{۳!\times ۲!}=\frac{۵\times \overset{۲}{\cancel{۴}}\times \cancel{۳!}}{\cancel{۳!}\times \cancel{۲}\times ۱}=۱۰\Rightarrow P(D')=\frac{n(D')}{n(S)}=\frac{۱۰}{۱۶۵}\Rightarrow P(D)=۱-P(D')=۱-\frac{۱۰}{۱۶۵}=\frac{۱۵۵}{۱۶۵}$$

در نتیجه احتمال پیشامدی که در گزینه‌ی (۱) مطرح شده، از بقیه کم‌تر است و لذا همین گزینه جواب تست است.

۹۳- (۱) اولاً فضای نمونه‌ای متشکل از تمام اعداد سه رقمی ساخته شده با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ است:

$$n(S)=\underset{\text{صدگان}}{\boxed{۹}}\times\underset{\text{دهگان}}{\boxed{۹}}\times\underset{\text{یکان}}{\boxed{۹}}$$

توجه کنید که در این تست، تکرار ارقام جایز است. ثانیاً اگر پیشامد A یکسان بودن لااقل دو رقم این اعداد باشد، پیشامد A'، یعنی متمم آن، متمایز بودن سه رقم است که یافتن تعداد اعضای آن راحت‌تر است:

$$n(A')=\overset{\text{صدگان}}{\boxed{۹}}\times\overset{\text{دهگان}}{\boxed{۸}}\times\overset{\text{یکان}}{\boxed{۷}}\Rightarrow P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{\cancel{۹}\times ۸\times ۷}{\cancel{۹}\times ۹\times ۹}=\frac{۵۶}{۸۱}\Rightarrow P(A)=۱-P(A')\Rightarrow P(A)=۱-\frac{۵۶}{۸۱}=\frac{۲۵}{۸۱}$$

۹۴- (۴) اگر A پیشامد حداقل یک بار ظاهر شدن عدد ۶ باشد، پیدا کردن تعداد اعضای پیشامد متمم A، یعنی تعداد حالاتی که در آن‌ها عدد ۶ ظاهر نشده باشد، راحت‌تر است. طبق اصل ضرب، تعداد حالاتی که در آن‌ها عدد ۶ ظاهر نشده باشد، یعنی هر سه تاس یکی از اعداد ۴،۳،۲،۱ یا ۵ آمده باشند، عبارت است از:

$$n(S)=۶\times ۶\times ۶=۲۱۶$$

$$\text{تعداد حالات}=\underset{\text{تاس اول}}{\boxed{۵}}\times\underset{\text{تاس دوم}}{\boxed{۵}}\times\underset{\text{تاس سوم}}{\boxed{۵}}\Rightarrow n(A')=۵\times ۵\times ۵=۱۲۵\Rightarrow P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{۱۲۵}{۲۱۶}$$

$$\Rightarrow P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۱۲۵}{۲۱۶}=\frac{۹۱}{۲۱۶}$$

۹۵- (۴) فضای نمونه‌ای متشکل از اعداد سه رقمی ساخته شده با ارقام ۴،۳،۲،۱،۰ است، پس:

$$n(S)=\underset{\text{به جز رقم صفر}}{\overset{\text{صدگان}}{\boxed{۴}}}\times\underset{\text{یک رقم انتخاب‌شده}}{\overset{\text{دهگان}}{\boxed{۴}}}\times\overset{\text{یکان}}{\boxed{۳}}=۴۸$$

توجه کنید که ارقام باید متمایز باشند.

روش اول: پیشامد A متشکل از اعداد سه رقمی زوج ساخته شده با این ارقام است. پس رقم یکان این اعداد باید ۰، ۲ یا ۴ باشد. حال به دلیل وجود عدد صفر در ارقام، هم‌چنین متمایز بودن ارقام، دو حالت زیر را درنظر می‌گیریم:

صدگان　دهگان　یکان

الف) تعداد حالات: رقم یکان صفر $= \boxed{۴} \times \boxed{۳} \times \boxed{۱} = ۱۲$

رقم صفر　ارقام ۱، ۲، ۳ یا ۴

صدگان　دهگان　یکان

ب) تعداد حالات: رقم یکان ۲ یا ۴ $= \boxed{۳} \times \boxed{۳} \times \boxed{۲} = ۱۸$

۲ یا ۴　یکی از ارقام انتخاب شده و صفر نیز نمی‌تواند قرار گیرد.

$$\Rightarrow n(A) = ۱۲ + ۱۸ = ۳۰ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳۰}{۴۸} = \frac{۵}{۸}$$

روش دوم: اگر A، پیشامد زوج بودن عدد ۳ رقمی ساخته شده باشد، متمم آن، پیشامد فرد بودن آن عدد ۳ رقمی است که محاسبه‌ی تعداد آن راحت‌تر است. بنابراین داریم:

صدگان　دهگان　یکان

$$n(A') = \boxed{۳} \times \boxed{۳} \times \boxed{۲} \Rightarrow \text{تعداد اعداد فرد} = ۱۸ \Rightarrow P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{۱۸}{۴۸} \Rightarrow P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{۱۸}{۴۸} = \frac{۳۰}{۴۸} = \frac{۵}{۸}$$

یکی از ارقام انتخاب شده و صفر نیز نمی‌تواند قرار بگیرد.　یکی از اعداد ۱ یا ۳

۹۶- (۳) دو پیشامد A و B مستقل هستند، پس طبق قانون جمع احتمالات داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \xrightarrow{P(A\cap B) = P(A)P(B)} \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۱۲} = \frac{۴ + ۳ - ۱}{۱۲} = \frac{۶}{۱۲}$$

۹۷- (۴) A و B دو پیشامد مستقل هستند، پس:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad (*)$$

$$\text{طبق فرض}: P(A \cap B) = [P(A)]^۲ \xRightarrow{(*)} P(A) \times P(B) = P(A) \times P(A) \xRightarrow{\text{پیشامد ناتهی } A \Rightarrow P(A) \neq ۰} P(B) = P(A) \quad (**)$$

از طرف دیگر اگر A' متمم A باشد، داریم:

$$P(A') = ۱ - P(A) \overset{(**)}{=\!=} ۱ - P(B)$$

۹۸- (۲) چون A و B دو پیشامد مستقل از هم هستند، لذا $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$، حال با توجه به قانون جمع احتمالات داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$\xrightarrow[P(A) = \frac{۱}{۳}]{P(A\cup B) = \frac{۵}{۶}} \frac{۵}{۶} = \frac{۱}{۳} + P(B) - \frac{۱}{۳}P(B) \Rightarrow \frac{۵}{۶} - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}P(B) \Rightarrow \frac{۳}{۶} = \frac{۲}{۳}P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow P(B') = ۱ - P(B) = ۱ - \frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۴}$$

۹۹- (۲)

$$P(A - B) = P(A \cap B') \xrightarrow[\text{پس } A \text{ و } B' \text{ نیز مستقل‌اند.}]{A \text{ و } B \text{ مستقل‌اند}} P(A) \times P(B') = P(A) \times (۱ - P(B)) = (۰/۴)(۱ - ۰/۳) = ۰/۴ \times ۰/۷ = ۰/۲۸$$

۱۰۰- (۴) طبق قانون جمع احتمالات داریم:

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') \qquad (*)$$

چون A و B مستقل هستند، نتیجه می‌گیریم A و B' هم مستقل هستند، در نتیجه:

$$P(A \cap B') = P(A) \times P(B') = P(A) \times (۱ - P(B)) \xrightarrow{P(B) = \frac{۱}{۳}} \frac{۱}{۲} \times (۱ - \frac{۱}{۳}) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

$$\xRightarrow{(*)} P(A \cup B') = \frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۳} - \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} = \frac{۵}{۶}$$

۱۰۱- (۲) با استفاده از قانون جمع احتمالات داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \xrightarrow{A \text{ و } B \text{ مستقل}} P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$\xrightarrow{P(B) = ۲P(A)} P(A \cup B) = P(A) + ۲P(A) - P(A) \times (۲P(A)) \xrightarrow{P(A\cup B) = \frac{۵}{۸}} \frac{۵}{۸} = ۳P(A) - ۲(P(A))^۲$$

حال با فرض $P(A)=x$ داریم:

$$\frac{۵}{۸}=۳x-۲x^{۲} \Rightarrow ۲x^{۲}-۳x+\frac{۵}{۸}=۰ \Rightarrow x=\frac{-(-۳)\pm\sqrt{(-۳)^{۲}-۴(۲)(\frac{۵}{۸})}}{۲(۲)}=\frac{۳\pm\sqrt{۹-۵}}{۴}=\frac{۳\pm ۲}{۴} \Rightarrow x=\frac{۵}{۴} \text{ و } \frac{۱}{۴}$$

امّا چون x همان $P(A)$ بوده و می‌دانیم احتمال نمی‌تواند از یک بیشتر شود پس فقط $P(A)=x=\frac{۱}{۴}$ قابل قبول است. بنابراین $P(B)$ برابر می‌شود با:

$$P(B)=۲P(A)=۲(\frac{۱}{۴})=\frac{۱}{۲}$$

۱۰۲- (۴) **بررسی گزینه‌ها:**

گزینه‌ی (۱): اگر دو پیشامد A و B ناسازگار باشند باید $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ باشد، امّا در این سؤال داریم:

$$P(A\cup B)=۰/۸۶ \,،\, P(A)+P(B)=۰/۳+۰/۸=۱/۱ \Rightarrow P(A\cup B)\neq P(A)+P(B)$$

پس دو پیشامد A و B ناسازگار نمی‌باشند.

گزینه‌ی (۲): اگر $A\subset B$ باشد، آن‌گاه $A\cup B=B$ شده و در نتیجه $P(A\cup B)=P(B)$. حال آن‌که در این سؤال $P(A\cup B)=۰/۸۶$ و $P(B)=۰/۸$ است که مخالف هم هستند. پس A زیرمجموعه‌ی B نمی‌باشد.

گزینه‌ی (۳): اگر دو پیشامد A و B متمم هم باشند، باید جمع احتمال‌های آن‌ها برابر یک شود، در صورتی که در این سؤال $P(A)+P(B)=۰/۳+۰/۸=۱/۱$ شده که مخالف یک است. پس دو پیشامد A و B متمم یک‌دیگر نمی‌باشند.

گزینه‌ی (۴): اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، باید $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ باشد، یعنی $P(A\cap B)=۰/۳\times ۰/۸=۰/۲۴$ باید باشد، حال با استفاده از قانون جمع احتمالات با توجه به فرضیات مسأله $P(A\cap B)$ را به‌دست می‌آوریم اگر برابر ۰/۲۴ شد، پس A و B مستقل‌اند:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow ۰/۸۶=۰/۳+۰/۸-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cap B)=۱/۱-۰/۸۶=۰/۲۴$$

بنابراین A و B مستقل بوده و همین گزینه صحیح است.

۱۰۳- (۱) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس برابر $n(S)=۶\times ۶=۳۶$ است. حال دو پیشامد A و B را به‌دست می‌آوریم:

$$A=\{(۴,۱),(۴,۲),(۴,۳),(۴,۴),(۴,۵),(۴,۶)\} \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

$$B=\{(۱,۶),(۶,۱),(۲,۵),(۵,۲),(۳,۴),(۴,۳)\} \Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

$$A\cap B=\{(۴,۳)\} \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۱}{۳۶}$$

با توجه به آن‌که $A\cap B\neq ۰$ است، دو پیشامد A و B سازگارند. حال مستقل بودن دو پیشامد A و B را بررسی می‌کنیم:

$$P(A\cap B)\overset{?}{=}P(A)\times P(B) \Rightarrow \frac{۱}{۳۶}\overset{?}{=}\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶} \Rightarrow \frac{۱}{۳۶}=\frac{۱}{۳۶}$$

بنابراین دو پیشامد A و B مستقل هستند.

۱۰۴- (۱) قبولی شخص A مستقل از قبولی شخص B است. پس احتمال این‌که هر دو در این آزمون قبول شوند، یعنی احتمال $A\cap B$، طبق قانون ضرب احتمالات عبارت است از:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۳}=\frac{۲}{۵}$$

۱۰۵- (۲) پیشامدهای زیر را درنظر بگیرید:

A: شخص A پس از عمل بهبود بیابد. $\Rightarrow P(A)=\frac{۸۰}{۱۰۰}=۰/۸$

B: شخص B پس از عمل بهبود بیابد. $\Rightarrow P(B)=\frac{۶۰}{۱۰۰}=۰/۶$

حال اگر D پیشامدی باشد که در آن شخص B بهبود بیابد ولی شخص A بهبود نیابد، یعنی فقط شخص B بهبود پیدا کند که همان $B-A$ یا $B\cap A'$ است. از طرفی چون پیشامدهای بهبودی اشخاص A و B مستقل از هم هستند، لذا با توجه به درسنامه پیشامدهای A' و B نیز مستقل از هم می‌باشند، بنابراین داریم:

$$P(D)=P(B-A)=P(B\cap A')=P(B)\times P(A')=P(B)\times(۱-P(A))=۰/۶\times(۱-۰/۸)=۰/۶\times ۰/۲=۰/۱۲$$

از طرفی E پیشامدی است که در آن حداقل یکی از آن دو نفر بهبود یافته باشند، یعنی شخص A یا شخص B و یا هر دو بهبود یافته باشند که همان $A\cup B$ است. بنابراین با توجه به قانون جمع احتمالات داریم:

$$P(E)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-\underbrace{P(A\cap B)}_{\text{احتمال آن‌که هر دو بهبود بیابند.}}\xrightarrow{\text{مستقل } B \text{ و } A}P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$$

$$=۰/۸+۰/۶-(۰/۸)(۰/۶)=۱/۴-۰/۴۸=۰/۹۲$$

بنابراین:

$$\frac{P(D)}{P(E)}=\frac{۰/۱۲}{۰/۹۲}=\frac{۱۲}{۹۲}=\frac{۳}{۲۳}\Rightarrow P(D)=\frac{۳}{۲۳}P(E)$$

تذکر: می‌توانستیم $P(E)$ را به کمک متمم پیشامد E نیز به‌صورت زیر بیابیم. E' پیشامدی است که هیچ کدام از دو شخص A و B بهبود پیدا نکرده باشند یعنی نه شخص A بهبود یافته باشد و نه شخص B که همان پیشامد $A'\cap B'$ است. بنابراین داریم:

$$P(E')=P(A'\cap B')\xrightarrow[\text{نیز مستقل‌اند.} B' \text{ و } A']{\text{مستقل پس } B \text{ و } A}P(A')\times P(B')=(۱-P(A))(۱-P(B))=(۱-۰/۸)\times(۱-۰/۶)=۰/۲\times ۰/۴=۰/۰۸$$

$$\Rightarrow P(E)=۱-P(E')=۱-۰/۰۸=۰/۹۲$$

۱۰۶- (۴) پیشامدهای زیر را درنظر می‌گیریم:

$A\to$ شخص A تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند. $\Rightarrow P(A)=۰/۶$

$B\to$ شخص B تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند. $\Rightarrow P(B)=۰/۷$

$A\cup B\to$ حداقل یکی از آن‌ها تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند ، $A\cap B\to$ هر دو تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کنند

روش اول: اگر D پیشامدی که در آن حداقل یکی از اشخاص مذکور تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی پیدا نکند، متمم D، پیشامدی است که در آن هر دو شخص A و B تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کنند. بنابراین داریم:

$$P(D')=P(A\cap B)\xrightarrow{\text{مستقل } B \text{ و } A}P(A)\times P(B)=۰/۶\times ۰/۷=۰/۴۲\Rightarrow P(D)=۱-P(D')=۱-۰/۴۲=۰/۵۸$$

روش دوم: پیشامد ناراحتی قلبی پیدا نکردن حداقل یکی از اشخاص A یا B یعنی پیشامد $A'\cup B'$ که با توجه به قانون جمع احتمالات برابر می‌شود با:

$$P(A'\cup B')=P(A')+P(B')-P(A'\cap B')\xrightarrow[\text{نیز مستقل‌اند.} B' \text{ و } A']{\text{مستقل پس } B \text{ و } A}P(A')+P(B')-P(A')\times P(B')$$

$$\xrightarrow[P(B)=۰/۷\Rightarrow P(B')=۱-۰/۷=۰/۳]{P(A)=۰/۶\Rightarrow P(A')=۱-۰/۶=۰/۴}P(A'\cup B')=۰/۴+۰/۳-(۰/۴\times ۰/۳)=۰/۷-۰/۱۲=۰/۵۸$$

۱۰۷- (۱) پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم:

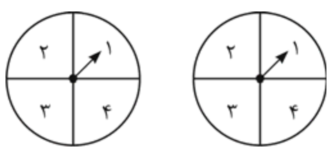
$A\to$ داشتن تحصیلات ابتدایی $\Rightarrow P(A)=\frac{۶۰}{۱۰۰}=۰/۶$ و $B\to$ داشتن مهارت قالی‌بافی $\Rightarrow P(B)=\frac{۲۵}{۱۰۰}=۰/۲۵$

$A\cup B\to$ داشتن مهارت قالی‌بافی یا تحصیلات ابتدایی $\Rightarrow P(A\cup B)=?$

دو پیشامد A و B مستقل از هم هستند، پس طبق قانون جمع احتمالات داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\xrightarrow{P(A\cap B)=P(A)P(B)}۰/۶+۰/۲۵-۰/۶\times ۰/۲۵=۰/۸۵-۰/۱۵=۰/۷$$

۱۰۸- (۲) چرخیدن عقربه‌ی هر صفحه مستقل از دیگری است. پس پیشامدهایی که مربوط به چرخیدن هر صفحه هستند، مستقل از پیشامدهای مربوط به صفحه‌ی دیگر می‌باشند. احتمال این‌که عقربه‌ها در نواحی هم‌شماره متوقف شوند، یعنی احتمال این‌که هر دو عقربه، شماره‌ی ۱ یا هر دو شماره‌ی ۲ یا هر دو شماره‌ی ۳ یا هر دو شماره‌ی ۴ را نشان دهند. از طرفی احتمال این‌که عقربه‌ی یک صفحه یک عدد مثلاً ۱ را نشان دهد، $\frac{۱}{۴}$ است. پس داریم:



P (هر دو عقربه هم شماره) $=P$ ((هر دو عقربه (۱)) $\overset{\text{یا}}{+}P$ ((هر دو عقربه (۲)) $\overset{\text{یا}}{+}...\overset{\text{یا}}{+}P$ ((هر دو عقربه (۴))

P (هر دو عقربه هم‌شماره) $=P$ ((اولی شماره‌ی (۱)) $\times P$ ((دومی شماره‌ی (۱)) $+...+P$ ((اولی شماره‌ی (۴)) $\times P$ ((دومی شماره‌ی (۴))

$$\Rightarrow P(\text{هر دو عقربه هم‌شماره})=(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4})=4(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4})=\frac{1}{4}$$

۱۰۹- (۱) اولاً احتمال این‌که یک نفر در این جامعه این نوع گروه خونی را نداشته باشد، برابر است با:

$$1-\frac{20}{100}=\frac{80}{100}$$

ثانیاً احتمال مورد نظر تست برابر است با:

$$P(\text{یک نفر گروه خونی موردنظر را داشته و دیگری نداشته باشد.})=P(\text{اولی داشته و دومی نداشته})\overset{\text{یا}}{+}P(\text{اولی نداشته و دومی داشته})$$

$$=P(\text{اولی داشته}\cap\text{دومی نداشته})\overset{\text{یا}}{+}P(\text{اولی نداشته}\cap\text{دومی داشته})$$

ثالثاً گروه خونی افراد مستقل از هم است، پس طبق قانون ضرب احتمالات داریم:

$$P(\text{یک نفر گروه خونی مورد نظر را داشته و دیگری نداشته باشد.})=P(\text{اولی داشته})\times P(\text{دومی نداشته})+P(\text{اولی نداشته})\times P(\text{دومی داشته})$$

$$=(\frac{80}{100})\times(\frac{20}{100})+(\frac{20}{100})\times(\frac{80}{100})=(0/8)(0/2)+(0/2)(0/8)=0/16+0/16=0/32$$

۱۱۰- (۳) دو دوست را A و B درنظر می‌گیریم، داریم:

$$\begin{cases}P(\text{قبول شود.}\ A)=0/4\Rightarrow P(\text{قبول نشود.}\ A)=1-0/4=0/6\\P(\text{قبول شود.}\ B)=0/6\Rightarrow P(\text{قبول نشود.}\ B)=1-0/6=0/4\end{cases}$$

$$P(\text{فقط یکی قبول شود.})=P(A\ \text{قبول شود و}\ B\ \text{قبول نشود.})\overset{\text{یا}}{+}P(A\ \text{قبول نشود و}\ B\ \text{قبول شود.})$$

$$=P(A\ \text{قبول شود}\cap B\ \text{قبول نشود.})+P(A\ \text{قبول نشود}\cap B\ \text{قبول شود.})$$

از طرفی قبول شدن یا نشدن این دو دوست در کنکور، مستقل از هم است. پس طبق قانون ضرب احتمالات داریم:

$$P(\text{فقط یکی قبول شود.})=P(A\ \text{قبول شود.})\times P(B\ \text{قبول نشود.})+P(A\ \text{قبول نشود.})\times P(B\ \text{قبول شود.})$$

$$=(0/4)\times(0/4)+(0/6)\times(0/6)=0/52$$

۱۱۱- (۳) اگر A پیشامدی باشد که در آن حداقل یک توپ از ۳ بار پرتاب وارد حلقه شود، متمم آن پیشامدی است که هیچ توپی وارد حلقه نشود. از طرفی اگر توپ با احتمال ۰/۳ وارد حلقه می‌شود، پس با احتمال $1-0/3=0/7$ توپ وارد حلقه نمی‌شود. بنابراین با توجه به آن‌که پرتاب‌ها مستقل از هم فرض شده‌اند، داریم:

$$P(A')=P(\text{پرتاب اول وارد حلقه نشود و پرتاب دوم وارد حلقه نشود و پرتاب سوم وارد حلقه نشود.})$$

$$\xrightarrow[\text{مستقل}]{\text{پرتاب‌ها}}P(\text{پرتاب اول وارد حلقه نشود.})\times P(\text{پرتاب دوم وارد حلقه نشود.})\times P(\text{پرتاب سوم وارد حلقه نشود.})=(0/7)\times(0/7)\times(0/7)=0/343$$

در نتیجه، احتمال آن‌که از ۳ بار پرتاب، حداقل یک توپ وارد حلقه شود برابر است با:

$$P(A)=1-P(A')=1-0/343=0/657$$

۱۱۲- (۱) پیشامد پرتاب سکه‌ها مستقل از هم می‌باشند، بنابراین مهم نیست که ۱۰۰ بار اول نتیجه‌ی پرتاب سکه چه بوده است. پس احتمال پشت آمدن سکه در ۱۰۱ اُمین بار همان $\frac{1}{2}$ است.

۱۱۳- (۲) اولاً چون هر سال، ۱۲ ماه دارد، احتمال این‌که یک نفر در ماه خرداد (یکی از ۱۲ ماه) متولد بشود، $\frac{1}{12}$ است. ثانیاً تولد هر فرد مستقل از دیگری است. پس طبق قانون ضرب احتمالات داریم:

$$P(\text{هر ۶ نفر در ماه خرداد متولد شوند.})=\frac{1}{12}\times\frac{1}{12}\times\frac{1}{12}\times\frac{1}{12}\times\frac{1}{12}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{12^6}$$

۱۱۴- (۱) ماه تولد مشخص نشده است، پس هر ۶ نفر می‌توانند در ماه فروردین یا در ماه اردیبهشت یا ... یا در ماه اسفند متولد شده باشند. طبق تست قبل، احتمال این‌که هر ۶ نفر در یک ماه معین متولد شده باشند، $\frac{1}{12^6}$ است. پس:

$$P(\text{هر ۶ نفر در یک ماه متولد شده باشند.})=\underset{\text{فروردین}}{\frac{1}{12^6}}\overset{\text{یا}}{+}\underset{\text{اردیبهشت}}{\frac{1}{12^6}}+\dots+\underset{\text{اسفند}}{\frac{1}{12^6}}=12\times\frac{1}{12^6}=\frac{1}{12^5}$$

۱۱۵- (۲) اگر A پیشامد یکسان بودن ماه تولد حداقل دو نفر از چهار دانش‌آموز یک کلاس باشد، متمم آن یعنی A' پیشامدی است که در آن ماه تولد هیچ دو نفری از آن ۴ نفر یکسان نمی‌باشد یعنی نفر اول می‌تواند در هر کدام از ۱۲ ماه سال متولد شده باشد ولی نفر دوم باید در هر

ماهی به جز ماه تولد نفر اول (یعنی در یکی از ۱۱ ماه باقی‌مانده) متولد شود و ... و نفر چهارم باید در هر ماهی به جز ماه تولد ۳ نفر دیگر (یعنی در یکی از ۹ ماه باقی‌مانده) متولد شود. لذا با توجه به آن‌که متولد شدن افراد در ماه‌های سال، پیشامدهای مستقل‌اند. پس احتمال‌ها را می‌توانیم در هم ضرب کنیم:

$$P(A')=\frac{\cancel{۱۲}}{\cancel{۱۲}}\times\frac{۱۱}{۱۲}\times\frac{۱۰}{۱۲}\times\frac{۹}{۱۲}=\frac{۵۵}{۹۶}\Rightarrow P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۵۵}{۹۶}=\frac{۴۱}{۹۶}$$

۱۱۶- (۱) جنسیت هر فرزند خانواده، مستقل از جنسیت فرزند دیگر است، پس طبق قانون ضرب احتمالات داریم:

$$P(\text{هر سه پسر})=P(\text{اولی پسر})\times P(\text{دومی پسر})\times P(\text{سومی پسر})=\frac{۴۰}{۱۰۰}\times\frac{۴۰}{۱۰۰}\times\frac{۴۰}{۱۰۰}=۰/۰۶۴$$

۱۱۷- (۳) **روش اول:** جنسیت فرزندان یک خانواده پیشامدهایی مستقل هستند لذا برای حل این سؤال از قانون ضرب احتمالات استفاده می‌کنیم:

بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌ی (۱): اگر A پیشامد یک در میان بودن فرزندان باشد، داریم:

$$A=\{(\text{پ ، د ، پ}),(\text{د ، پ ، د})\}$$

$$P(\text{یک در میان پسر و دختر})=P(\text{اولی دختر و دومی پسر و سومی دختر})\overset{\text{یا}}{+}P(\text{اولی پسر و دومی دختر و سومی پسر})$$

$$P(A)=P(\text{اولی دختر})\times P(\text{دومی پسر})\times P(\text{سومی دختر})+P(\text{اولی پسر})\times P(\text{دومی دختر})\times P(\text{سومی پسر})$$

$$P(A)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

گزینه‌ی (۲): اگر B پیشامد پسر بودن هر ۳ فرزند باشد، داریم:

$$B=\{(\text{پ ، پ ، پ})\}$$

$$P(\text{هر ۳ پسر})=P(\text{اولی پسر و دومی پسر و سومی پسر})=P(\text{اولی پسر})\times P(\text{دومی پسر})\times P(\text{سومی پسر})$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۸}$$

گزینه‌ی (۳): اگر C پیشامد دختر بودن فرزند سوم باشد، چون جنسیت فرزند سوم مستقل از سایر فرزندان قبل از خود است، لذا احتمال آن برابر است با: $P(C)=\frac{۱}{۲}$

گزینه‌ی (۴): تفاوت این گزینه با گزینه‌ی قبل در این است که وقتی می‌گوییم فرزند سوم دختر باشد، برای فرزندان اول و دوم خانواده شرطی قرار نداده‌ایم، لذا آن‌ها می‌توانند دختر یا پسر باشند و در نتیجه جنسیت آن‌ها در محاسبه‌ی احتمال نقشی ندارد. ولی وقتی کلمه‌ی «فقط» به پیشامد اضافه می‌شود، منظورمان این است که فرزندان اول و دوم نباید دختر باشند (یعنی باید پسر باشند) پس برای فرزندان اول و دوم شرط قرار داده‌ایم بنابراین در این حالت پیشامد به‌صورت روبه‌رو درمی‌آید:

$$D=\{(\text{پ ، پ ، د})\}$$

$$P(\text{فقط فرزند سوم دختر})=P(\text{اولی پسر و دومی پسر و سومی دختر})=P(\text{اولی پسر})P(\text{دومی پسر})P(\text{سومی دختر})$$

$$\Rightarrow P(D)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۸}$$

روش دوم: فضای نمونه‌ای تولد ۳ فرزند یک خانواده به‌صورت زیر است:

$$S=\{(\text{پ ، پ ، پ}),(\text{پ ، پ ، د}),(\text{پ ، د ، پ}),(\text{د ، پ ، پ}),(\text{پ ، د ، د}),(\text{د ، پ ، د}),(\text{د ، د ، پ}),(\text{د ، د ، د})\}$$

حال با توجه به فضای نمونه‌ای، پیشامدهای گزینه‌ها را نوشته و احتمال آن‌ها را به‌دست می‌آوریم:

بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌ی (۱):

$$A=\{(\text{پ ، د ، پ}),(\text{د ، پ ، د})\}\Rightarrow n(A)=۲\xrightarrow{n(S)=۸}P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

گزینه‌ی (۲):

$$B=\{(\text{پ ، پ ، پ})\}\Rightarrow n(B)=۱\xrightarrow{n(S)=۸}P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۱}{۸}$$

گزینه‌ی (۳): فرزند سوم باید دختر باشد ولی فرزندان اول و دوم می‌توانند دختر یا پسر باشند.

$$C=\{(\text{پ ، پ ، د}),(\text{پ ، د ، د}),(\text{د ، پ ، د}),(\text{د ، د ، د})\}\Rightarrow n(C)=۴\xrightarrow{n(S)=۸}P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

گزینه‌ی (۴):

$$D=\{(\text{پ ، پ ، د})\}\Rightarrow n(D)=۱\xrightarrow{n(S)=۸}P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{۱}{۸}$$

۱۱۸- (۲) در مورد فرزند سوم به بعد، حرفی زده نشده است، پس کاری با آن‌ها نداریم.

اما پیشامد این‌که فرزند اول و دوم هم‌جنس باشند، یعنی فرزند اول و دوم هر دو پسر یا هر دو دختر باشند، از طرفی جنسیت فرزندان مستقل از یک‌دیگر است، پس طبق قانون ضرب احتمالات داریم:

$$P(\text{هر دو هم‌جنس}) = P(\text{هر دو دختر}) \overset{\text{یا}}{+} P(\text{هر دو پسر})$$

$$\Rightarrow P(\text{هر دو هم‌جنس}) = P(\text{اولی دختر}) \times P(\text{دومی دختر}) + P(\text{اولی پسر}) \times P(\text{دومی پسر}) \qquad (*)$$

حال چون احتمال تولد پسر $\frac{۱}{۴}$ است، احتمال تولد دختر (پسر نباشد) برابر است با:

$$۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

$$\xrightarrow{(*)} P(\text{هر دو هم‌جنس}) = \frac{۳}{۴} \times \frac{۳}{۴} + \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۹}{۱۶} + \frac{۱}{۱۶} = \frac{۱۰}{۱۶} = \frac{۵}{۸}$$

۱۱۹- (۲) **روش اول:** در یک تاس داریم:

$$\begin{cases} \text{اعداد تاس} = \{۱،۲،۳،۴،۵،۶\} \\ \text{اعداد بین ۲ و ۵} = \{۳،۴\} \end{cases} \Rightarrow P(\text{عدد بین ۲ و ۵}) = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

اما در پرتاب دو تاس، پیشامدهای مربوط به هر تاس مستقل از پیشامدهای تاس دیگر است، پس:

$$P(\text{هر دو تاس بین ۲ و ۵}) = P(\text{تاس اول بین ۲ و ۵}) \times P(\text{تاس دوم بین ۲ و ۵}) = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۹}$$

روش دوم:

$$A \to \text{دو تاس بین ۲ و ۵} \Rightarrow A = \{(۳،۳)،(۳،۴)،(۴،۳)،(۴،۴)\} \xrightarrow{n(S)=۶\times۶=۳۶} P(A) = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$$

۱۲۰- (۲) پیشامد این‌که لااقل یکی از اعداد رو شده مضرب ۳ باشد، متمم این پیشامد است که در هیچ یک از تاس‌ها عدد مضرب ۳ ظاهر نشود. پس احتمال پیشامد متمم را می‌یابیم:

$$P(\text{لااقل یکی مضرب ۳}) = ۱ - P(\text{هیچ‌کدام مضرب ۳ نباشد.}) \quad (*)$$

در یک تاس داریم:

$$\begin{cases} \text{اعداد تاس} = \{۱،۲،۳،۴،۵،۶\} \\ \text{اعدادی که مضرب ۳ نیستند.} = \{۱،۲،۴،۵\} \end{cases} \Rightarrow P(\text{تاس مضرب ۳ نباشد.}) = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

پیشامدهای مربوط به هر تاس مستقل از پیشامدهای تاس دیگر هستند، پس:

$$P(\text{هیچ‌کدام مضرب ۳ نباشد.}) = P(\text{اولی مضرب ۳ نباشد.}) \times P(\text{دومی مضرب ۳ نباشد.}) = \frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۴}{۹}$$

$$\xrightarrow{(*)} P(\text{لااقل یکی مضرب ۳}) = ۱ - \frac{۴}{۹} = \frac{۵}{۹}$$

۱۲۱- (۱) در پرتاب یک تاس، فضای نمونه‌ای $S = \{۱،۲،...،۶\}$ و پیشامد این‌که عدد تاس مضرب ۳ نباشد، $A = \{۱،۲،۴،۵\}$ می‌باشد. پس احتمال این‌که عدد تاس مضرب ۳ نباشد، برابر است با:

$$P(A) = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳} \qquad (*)$$

از طرفی وقتی ۳ تاس با هم پرتاب می‌شوند، پیشامدهایی که هر یک مضرب ۳ نباشد، مستقل از هم هستند. پس داریم:

$$P(\text{هر سه مضرب ۳ نباشند.}) = P(\text{اولی مضرب ۳ نباشد.}) \times P(\text{دومی مضرب ۳ نباشد.}) \times P(\text{سومی مضرب ۳ نباشد.}) \overset{(*)}{=} \frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۸}{۲۷}$$

۱۲۲- (۴) A را پیشامد «پشت» آمدن سکه و B را پیشامد عدد ۴ آمدن تاس درنظر می‌گیریم. این دو پیشامد مستقل از هم هستند و مطلوب تست $P(A \cup B)$ است. داریم:

$$P(A) = \frac{۱}{۲}\ ,\ P(B) = \frac{۱}{۶} \xrightarrow[\text{مستقل}]{B،A} P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۱۲}$$

$$\text{قانون جمع احتمالات}: P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۱۲} = \frac{۶+۲-۱}{۱۲} = \frac{۷}{۱۲}$$

تذکر: می‌توان با نوشتن اعضای پیشامد $A \cup B$ نیز احتمال آن را حساب کرد. (به عهده‌ی خودتان)

۱۲۳- (۲) پیشامد A را متفاوت بودن دو سکه و پیشامد B را زوج بودن عدد تاس درنظر می‌گیریم. این دو پیشامد مستقل از هم هستند و مطلوب تست، $P(A \cap B)$ است. پس داریم:

$$\left.\begin{matrix} \text{پرتاب دو سکه}: \begin{cases} S_۱ = \{(\text{پ}،\text{پ})\ ,\ (\text{پ}،\text{ر})\ ,\ (\text{ر}،\text{پ})\ ,\ (\text{ر}،\text{ر})\} \\ A = \{(\text{پ}،\text{ر})\ ,\ (\text{ر}،\text{پ})\} \end{cases} \Rightarrow P(A) = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲} \\ \text{پرتاب یک تاس}: \begin{cases} S_۲ = \{۱،۲،۳،۴،۵،۶\} \\ B = \{۲،۴،۶\} \end{cases} \Rightarrow P(B) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲} \end{matrix}\right\} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

۱۲۴- (۳) پیشامد A را حداقل یک «رو» در پرتاب دو سکه و پیشامد B را مضرب ۳ بودن عدد تاس درنظر می‌گیریم. این دو پیشامد مستقل از هم هستند و مطلوب تست، $P(A\cap B)$ است. لذا داریم:

در پرتاب دو سکه: $\begin{cases} n(S)=۲\times ۲=۴ \\ A=\{(ر,ر)\,,\,(ر,پ)\,,\,(پ,ر)\} \end{cases} \Rightarrow P(A)=\dfrac{۳}{۴}$

در پرتاب یک تاس: $\begin{cases} n(S)=۶ \\ B=\{۳,۶\} \end{cases} \Rightarrow P(B)=\dfrac{۲}{۶}=\dfrac{۱}{۳}$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۴}$$

۱۲۵- (۲) اگر A پیشامدی باشد که در آن حداکثر یکی از دو نوزاد با چشم‌هایی به رنگ روشن متولد می‌شود، در پیشامد متمم آن یعنی A'، هر دو نوزاد با چشم‌هایی به رنگ روشن متولد می‌شوند و چون تولد نوزاد در خانواده‌های A و B مستقل از هم می‌باشد، بنابراین داریم:

$P(A') = P$ (نوزاد از خانواده‌ی A چشم روشن و نوزاد از خانواده‌ی B چشم روشن)

$= P$ (نوزاد از خانواده‌ی A چشم روشن) $\times P$ (نوزاد از خانواده‌ی B چشم روشن)

$$\Rightarrow P(A')=\frac{۲۰}{۱۰۰}\times\frac{۷۵}{۱۰۰}=۰/۲\times ۰/۷۵=۰/۱۵ \Rightarrow P(A)=۱-P(A')=۱-۰/۱۵=۰/۸۵$$

۱۲۶- (۴) پیشامد متفاوت بودن رنگ دو مهره، متمم پیشامد یکسان بودن رنگ دو مهره است و محاسبه‌ی احتمال همرنگ بودن مهره‌ها راحت‌تر است، پس احتمال همرنگ بودن مهره‌ها را محاسبه می‌کنیم و داریم:

P (متفاوت بودن رنگ) $=۱-P$ (هم‌رنگ بودن) $\quad (*)$

P (همرنگ بودن) $=P$ (هر دو سفید) $\overset{یا}{+} P$ (هر دو سبز)

از طرفی چون دو مهره از دو ظرف جدا از هم خارج می‌شوند، پس پیشامدهای مربوط به رنگ مهره‌های خارج شده از این دو ظرف مستقل از هم هستند و داریم:

P (همرنگ بودن) $=P$ ((سفید از ظرف (۱)) $\times P$ (سفید از ظرف (۲))) $+P$ ((سبز از ظرف (۱)) $\times P$ (سبز از ظرف (۲)))

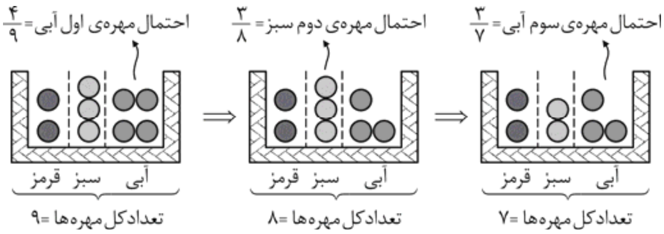
$$\Rightarrow P\ (\text{همرنگ بودن})=\left(\frac{۴}{۴+۵+۱}\right)\times\left(\frac{۶}{۶+۲}\right)+\left(\frac{۱}{۴+۵+۱}\right)\times\left(\frac{۲}{۶+۲}\right)=\left(\frac{۴}{۱۰}\right)\left(\frac{۶}{۸}\right)+\left(\frac{۱}{۱۰}\right)\left(\frac{۲}{۸}\right)=\frac{۳}{۱۰}+\frac{۱}{۴۰}=\frac{۱۳}{۴۰}$$

$$\xrightarrow{(*)} P\ (\text{متفاوت بودن رنگ})=۱-\frac{۱۳}{۴۰}=\frac{۲۷}{۴۰}$$

۱۲۷- (۱) مهره‌ی اول خارج شده و پس از جایگذاری آن در ظرف، مهره‌ی دوم خارج شده است، پس پیشامدهای مربوط به رنگ این دو مهره مستقل از هم هستند و تعداد کل مهره‌ها هنگام انتخاب مهره‌ها ثابت و برابر ۹ مهره است. از طرفی پیشامد این که دو مهره همرنگ نباشند، یعنی یکی آبی و دیگری قرمز باشد، پس:

P (همرنگ نباشند.) $=P$ (اولی آبی) $\times P$ (دومی قرمز) $\overset{یا}{+} P$ (اولی قرمز) $\times P$ (دومی آبی) $=\dfrac{۴}{۹}\times\dfrac{۵}{۹}+\dfrac{۵}{۹}\times\dfrac{۴}{۹}=\dfrac{۴۰}{۸۱}$

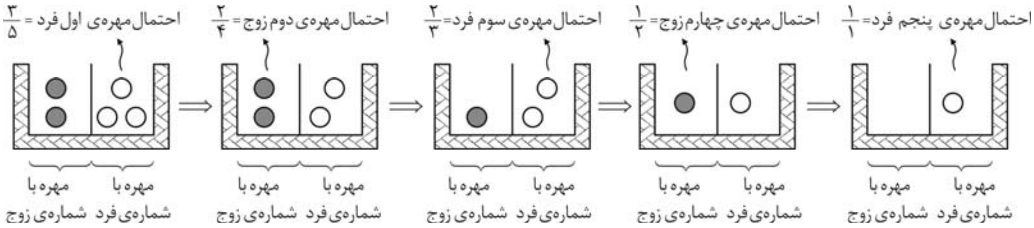
۱۲۸- (۲) چون انتخاب به‌صورت پی‌درپی و بدون جایگذاری صورت گرفته است پس تعداد کل مهره‌ها در هر مرحله برداشتن یک مهره، یک عدد کم می‌شود. بنابراین با توجه به شکل داریم:



$$P=\frac{۴}{۹}\times\frac{۳}{۸}\times\frac{۳}{۷}=\frac{۱}{۱۴}$$

۱۲۹- (۱) برای آن‌که دو مهره با شماره‌ی فرد متوالیاً خارج نشود باید آرایش مهره‌های خروجی به‌صورت زیر باشد:

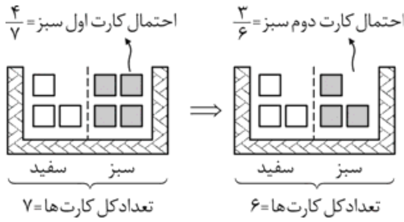
از طرفی چون مهره‌ها به‌صورت پی‌درپی و بدون جایگذاری خارج می‌شوند، تعداد کل مهره‌ها در هر مرحله برداشتن یک مهره، یک عدد کم می‌شود. بنابراین با توجه به شکل داریم:



$$\Rightarrow P = \frac{۳}{۵} \times \frac{۲}{۴} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱۰} = ۰/۱$$

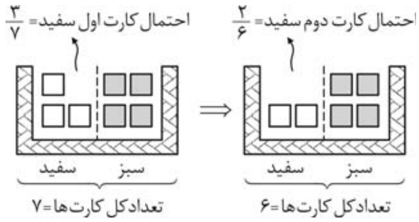
تذکر: اگر مهره‌ی خروجی اول دارای شماره‌ی زوج باشد، چون تنها دو مهره با شماره‌های زوج در داخل کیسه موجود است. به‌طور قطع، مهره‌های چهارم و پنجم متوالیاً دارای شماره‌های فرد خواهند بود که با فرض سؤال تناقض دارد. بنابراین حتماً باید شروع با مهره‌ای باشد که روی آن عدد فرد حک شده است و سپس مهره‌ها با شماره‌های زوج در میان مهره‌ها با شماره‌های فرد قرار بگیرند.

۱۳۰- (۳) انتخاب به‌صورت پشت سر هم و بدون جایگذاری بوده است، لذا تعداد کل کارت‌ها در هنگام برداشتن کارت دوم یک عدد کم شده است. از طرفی همرنگ بودن کارت‌های انتخابی به معنی آن است که دو کارت انتخابی هر دو سبز و یا هر دو سفید باشند. حال احتمال هر کدام از آن‌ها را حساب کرده و در نهایت جوابشان را با هم جمع می‌کنیم:



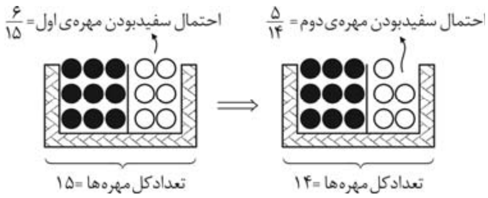
$$\Rightarrow P(\text{هر دو کارت سبز}) = \frac{۴}{۷} \times \frac{۳}{۶} = \frac{۲}{۷}$$

$$\Rightarrow P(\text{هر دو همرنگ}) = \frac{۲}{۷} + \frac{۱}{۷} = \frac{۳}{۷}$$

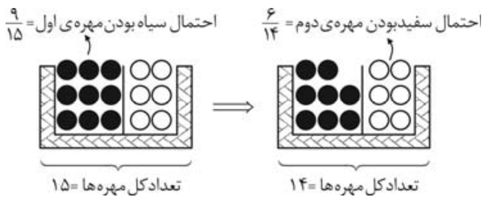


$$\Rightarrow P(\text{هر دو کارت سفید}) = \frac{۳}{۷} \times \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۷}$$

۱۳۱- (۳) **روش اول:** چون از رنگ مهره‌ی اول صحبتی نشده است. هر دو حالت سفید یا سیاه بودن رنگ آن را درنظر می‌گیریم و چون مهره‌ها متوالیاً و بدون جایگذاری از جعبه بیرون آورده شده‌اند، تعداد کل مهره‌ها در هر مرحله انتخاب یک مهره، یک عدد کم می‌شود، بنابراین داریم:



$$\Rightarrow P(\text{اولی سفید و دومی سفید}) = \frac{۶}{۱۵} \times \frac{۵}{۱۴} = \frac{۱}{۷}$$



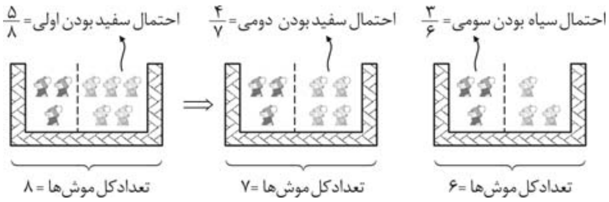
$$\Rightarrow P(\text{اولی سیاه و دومی سفید}) = \frac{۹}{۱۵} \times \frac{۶}{۱۴} = \frac{۹}{۳۵}$$

$$\Rightarrow P(\text{دومی سفید}) = P(\text{اولی سفید و دومی سفید}) \overset{\text{یا}}{+} P(\text{اولی سیاه و دومی سفید}) = \frac{۱}{۷} + \frac{۹}{۳۵} = \frac{۱۴}{۳۵} = \frac{۲}{۵}$$

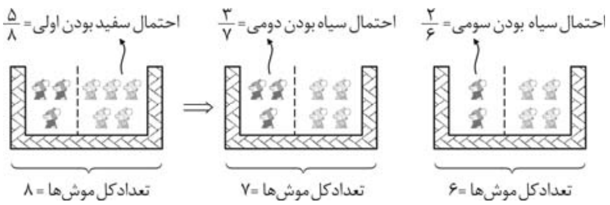
روش دوم: چون از رنگ اولین مهره‌ی انتخابی صحبتی نشده است، فرض می‌کنیم اصلاً مهره‌ی اول بیرون نیامده است و فقط می‌خواهیم مهره‌ای به تصادف انتخاب کنیم که سفید باشد. به عبارت دیگر مهره‌ی اول تأثیری در جواب مسأله ندارد.

$$P\,(\text{دومی سفید}) = \frac{۶}{۱۵} = \frac{۲}{۵}$$

۱۳۲- (۴) **روش اول:** چون از رنگ موش دوم صحبتی نشده است. هر دو حالت سفید یا سیاه بودن رنگ آن را درنظر می‌گیریم و چون موش‌ها به‌صورت متوالی و بدون جایگذاری انتخاب شده‌اند، تعداد کل موش‌ها در هر مرحله‌ی انتخاب ۱ موش، یک عدد کم می‌شود. بنابراین داریم:



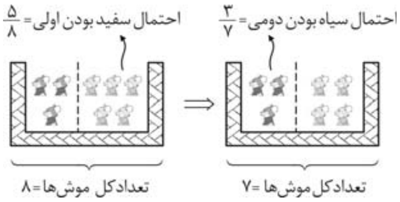
$$\Rightarrow P\,(\text{اولی سفید و دومی سفید و سومی سیاه}) = \frac{۵}{۸} \times \frac{۴}{۷} \times \frac{۳}{۶} = \frac{۱۰}{۵۶}$$



$$\Rightarrow P\,(\text{اولی سفید و دومی سیاه و سومی سیاه}) = \frac{۵}{۸} \times \frac{۳}{۷} \times \frac{۲}{۶} = \frac{۵}{۵۶}$$

$$\Rightarrow P\,(\text{اولی سفید و سومی سیاه}) = P\,(\text{اولی سفید و دومی سفید و سومی سیاه}) \overset{\text{یا}}{+} P\,(\text{اولی سفید و دومی سیاه و سومی سیاه}) = \frac{۱۰}{۵۶} + \frac{۵}{۵۶} = \frac{۱۵}{۵۶}$$

روش دوم: چون در مورد موش دوم صحبتی در مسأله نشده و فقط احتمال سفید بودن موش اول و سیاه بودن موش سوم خواسته شده، بنابراین فرض می‌کنیم موش دومی انتخاب نشده و فقط می‌خواهیم ۲ موش را به گونه‌ای انتخاب کنیم که اولی سفید و دومی سیاه باشد. به عبارت دیگر موش دوم تأثیری در جواب مسأله ندارد.



$$\Rightarrow P = \frac{۵}{۸} \times \frac{۳}{۷} = \frac{۱۵}{۵۶}$$