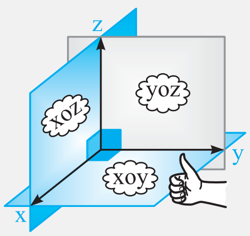
Detailed Solutions

پاسخ‌های تشریحی

A ۱ ۳

فضای $\mathbb{R}^3$



برای نمایش دستگاه مختصات سه‌بعدی در فضای $\mathbb{R}^3$، از سه محور مختصات دوبه‌دو عمود بر هم به نام‌های ox، oy و oz استفاده می‌شود. نحوه‌ی قرارگیری محورها به‌گونه‌ای است که کنج $o-xyz$ یک کنج راستگرد است، بدین معنی که اگر کف دست راست را در جهت محور ox باز کنیم و در جهت محور oy ببندیم، انگشت شست، در جهت محور oz قرار می‌گیرد.

همان‌طور که در شکل مقابل ملاحظه می‌کنید، محورهای مختصات، سه صفحه‌ی مختصات دوبه‌دو عمود بر هم xoy، xoz و yoz را ایجاد می‌کنند که فضای $\mathbb{R}^3$ توسط آن‌ها به ۸ ناحیه تقسیم می‌شود. امّا در صفحه‌ی کاغذ فقط یک ناحیه از آن ۸ ناحیه به نمایش درمی‌آید که آن را کنج مثبت دستگاه قائم می‌نامند.

نقطه در فضای $\mathbb{R}^3$: هر نقطه در فضای $\mathbb{R}^3$ با یک سه‌تایی مرتب مانند $A(x,y,z)$ نمایش داده می‌شود که x را طول، y را عرض و z را ارتفاع نقطه‌ی A می‌نامند.

تذکر *اگر نقطه‌ای روی یکی از محورها یا صفحات مختصات یا مبدأ مختصات (مکان‌های نام‌دار در فضا) قرار گیرد، هر مؤلفه‌ی غیرهم‌نام با نام آن‌ها در مختصات نقطه، صفر است.*

مثال: اگر نقطه‌ی $A(3-m, m+2, n-1)$ روی محور oy قرار داشته باشد، مقادیر m و n را به‌دست آورید.

پاسخ: وقتی نقطه‌ای روی محور oy قرار داشته باشد، مؤلفه‌های x و z آن حتماً صفر است. بنابراین:

$$3-m=0 \Rightarrow m=3$$
$$n-1=0 \Rightarrow n=1$$

فاصله‌ی دو نقطه در فضا: اگر $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ دو نقطه در فضا باشند، فاصله‌ی آن‌ها از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

ویژگی‌های فاصله:

۱ اگر $|AB|=0$ باشد، آن‌گاه $A=B$ خواهد بود و برعکس.

۲ همواره $|AB|=|BA|$ می‌باشد.

۳ به‌ازای هر نقطه‌ی دلخواه C در فضا، همواره نامساوی زیر برقرار است:

$$||AC|-|BC|| \le |AB| \le |AC|+|BC|$$

نتیجه ۱. کم‌ترین مقدار $|AC|+|BC|$ برابر $|AB|$ است و هنگامی اتفاق می‌افتد که نقطه‌ی C روی پاره‌خط AB باشد.

$$\mathrm{Min}(|AC|+|BC|)=|AB|$$

۲. بیشترین مقدار $||AC|-|BC||$ برابر $|AB|$ است و هنگامی اتفاق می‌افتد که نقطه‌ی C روی امتداد پاره‌خط AB باشد.

$$\mathrm{Max}||AC|-|BC||=|AB|$$

مثال: نقطه‌ی A به طول ۳ روی محور ox و نقطه‌ی B به عرض ۴ روی محور oy، دو رأس مربع ABCD هستند. محیط این مربع را به‌دست آورید.

پاسخ: نقطه‌ی A به مختصات $A(3,0,0)$ و نقطه‌ی B به مختصات $B(0,4,0)$ است. در مربع ABCD نقاط A و B دو سر یک ضلع مربع می‌باشند. پس:

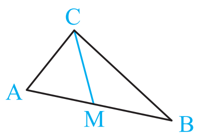
$$|AB|=\sqrt{9+16+0}=\sqrt{25}=5 \Rightarrow \text{محیط}=4\times 5=20$$

مختصات وسط پاره‌خط: اگر $A(x_۱،y_۱،z_۱)$ و $B(x_۲،y_۲،z_۲)$ دو نقطه در فضا باشند، آن‌گاه مختصات نقطه‌ی M وسط پـاره‌خط AB از رابطـه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\boxed{M=\frac{A+B}{۲}=\left(\frac{x_۱+x_۲}{۲},\frac{y_۱+y_۲}{۲},\frac{z_۱+z_۲}{۲}\right)}$$

مثال: نقاط $A(۱،۲،۳)$ ، $B(۳،-۴،-۱)$ و $C(۲،۳،۴)$ سه رأس مثلث ABC هستند. طول میانه‌ی CM را به‌دست آورید.

پاسخ: ابتدا با توجه به شکل مقابل، مختصات نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB را به‌دست می‌آوریم:

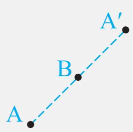


$$M=\frac{A+B}{۲}=(۲،-۱،۱)$$

حال طول میانه CM را به‌دست می‌آوریم:

$$|CM|=\sqrt{۰+۱۶+۹}=۵$$

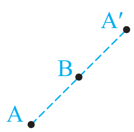
قرینه‌ی نقطه نسبت به نقطه: وقتی نقطه‌ی A نسبت به نقطه‌ی B قرینه می‌شود، نقطه‌ای مانند A' حاصل می‌شود. به‌طوری که نقطه‌ی B، دقیقاً وسط پاره‌خط AA' است. پس:



$$\Rightarrow B=\frac{A+A'}{۲}\Rightarrow ۲B=A+A'\Rightarrow \boxed{A'=۲B-A}$$

مثال: قرینه‌ی نقطه‌ی $A(۲،۳،۴)$ نسبت به نقطه‌ی $B(۱،۲،۱)$ را به‌دست آورید. این نقطه در کجای دستگاه مختصات قرار دارد؟

پاسخ:



$$\Rightarrow B=\frac{A+A'}{۲}\Rightarrow A'=۲B-A\Rightarrow A'=(۲،۴،۲)-(۲،۳،۴)\Rightarrow A'(۰،۱،-۲)$$

نقطه‌ی $A'(۰،۱،-۲)$ روی صفحه‌ی yoz قرار دارد، زیرا مؤلفه‌ی x آن صفر است.

باید عرض نقطه صفر باشد که در گزینه‌ها نقطه‌ی $(۴،۰،۳)$ چنین است.

A | ۲ | ۴

چون نقطه روی محور oz قرار دارد، پس x و y آن صفر است:

$$m+۲=۰\Rightarrow m=-۲$$
$$m-۲n=۰\Rightarrow n=-۱$$

A | ۳ | ۱

$$\begin{matrix}A(۲،۰،۰)\\B(۰،۴،۴)\end{matrix}\Rightarrow M=\frac{A+B}{۲}=(۱،۲،۲)\Rightarrow |OM|=\sqrt{۱+۴+۴}=۳$$

A+ | ۴ | ۱

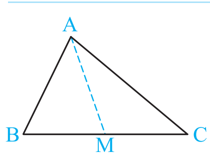
میانه‌ی بزرگ‌تر بر ضلع کوچک‌تر وارد می‌شود، بنابراین کافی است کوچک‌ترین ضلع را پیدا کنیم:

$$|AB|=\sqrt{(-۲)^۲+۰^۲+۱^۲}=\sqrt{۵}\ ،\ |AC|=\sqrt{۲^۲+(-۲)^۲+(-۱)^۲}=\sqrt{۹}\ ،\ |BC|=\sqrt{۴^۲+(-۲)^۲+(-۲)^۲}=\sqrt{۲۴}$$

بنابراین بزرگ‌ترین میانه بر ضلع AB وارد می‌شود.

B | ۵ | ۲

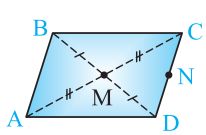
همان‌طور که در شکل می‌بینید رأس C قرینه‌ی B نسبت به M است:



$$C=۲M-B=(۶،۰،-۲)-(۳،۲،۱)=(۳،-۲،-۳)\Rightarrow |AC|=\sqrt{۲^۲+۳^۲+۶^۲}=\sqrt{۴۹}=۷$$

B | ۶ | ۲

می‌دانیم در متوازی الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می‌کنند یعنی C قرینه‌ی A نسبت بـه M و همچنـین D قرینـه‌ی B نسبت بـه M است، بنابراین:



$$\begin{cases}C=۲M-A=(۲،۶،۴)-(۱،۲،۳)=(۱،۴،۱)\\D=۲M-B=(۲،۶،۴)-(۳،۲،۱)=(-۱،۴،۳)\end{cases}\Rightarrow N=\frac{C+D}{۲}=(۰،۴،۲)$$

$$\Rightarrow |ON|=\sqrt{۰+۱۶+۴}=۲\sqrt{۵}$$

A+ | ۷ | ۴

$$|AB|=\sqrt{(m-۱)^۲+۳^۲+۴^۲}=\text{Min}\xrightarrow{\text{Min}(m-۱)^۲=۰}\text{Min}(|AB|)=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵$$

B | ۸ | ۱

$$|AC|+|BC|\geq |AB|\Rightarrow |AC|+|BC|\geq \sqrt{۲^۲+۱^۲+۲^۲}=۳$$

B ۹ ۳

نقطه‌ی $A(۰,-۱,۰)$ می‌باشد و $B(۱,۱,۲)$ هم که داده شده، بنابراین:

$$|AC|-|BC|\le|AB|\Rightarrow|AC|-|BC|\le\sqrt{۱^۲+۲^۲+۲^۲}=۳$$

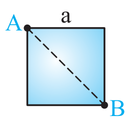
A ۱۰ ۴

وسط پاره‌خط BC را M می‌نامیم، بنابراین:

$$M=\frac{B+C}{۲}=\frac{(۱,۳,۲)+(-۱,۱,۰)}{۲}=(۰,۲,۱)$$

$$A'=۲M-A=۲(۰,۲,۱)-(۱,۱,۲)=(-۱,۳,۰)$$

A ۱۱ ۲



$$\Rightarrow AB=\sqrt{(۳-۱)^۲+(۰-۲)^۲+(۱-۱)^۲}=\sqrt{۴+۴+۰}=۲\sqrt{۲}$$

می‌دانیم قطر مربع $\sqrt{۲}$ برابر ضلع آن است، بنابراین:

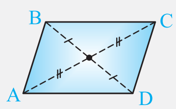
$$۲\sqrt{۲}=a\sqrt{۲}\Rightarrow a=۲\Rightarrow S=a^۲=۴$$

A+ ۱۲ ۳

نیم‌نگاه

می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می‌کنند. بنابراین اگر ABCD یک متوازی‌الاضلاع باشد، به‌سادگی معلوم می‌شود که:

$$\boxed{A+C=B+D}$$



$$A+C=B+D\Rightarrow(۱,۱,۳)+(۳,۲,۰)=(۴,۱,۱)+D\Rightarrow D=(۰,۲,۲)$$

حال طول قطرها را پیدا می‌کنیم تا ببینیم کدام بزرگ‌تر است:

$$AC=\sqrt{(۳-۱)^۲+(۲-۱)^۲+(۰-۳)^۲}=\sqrt{۴+۱+۹}=\sqrt{۱۴}$$

$$BD=\sqrt{(۴-۰)^۲+(۱-۲)^۲+(۱-۲)^۲}=\sqrt{۱۶+۱+۱}=\sqrt{۱۸}=۳\sqrt{۲}$$

iQ ۱۳ ۲

$$\text{محیط}=|AB|+|AC|+|BC|=\sqrt{۳^۲+۰^۲+a^۲}+\sqrt{۴^۲+(\sqrt{۲})^۲+a^۲}+\cancel{\sqrt{۱^۲+(\sqrt{۲})^۲+۰^۲}}=۹+\cancel{\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow\sqrt{۹+a^۲}+\sqrt{۱۸+a^۲}=۹\xRightarrow{\text{آزمون و خطا}}a=\sqrt{۷}$$ (البته $a=-\sqrt{۷}$ هم می‌تواند باشد امّا جواب مسأله تغییری نمی‌کند)

حال طول میانه‌ی وارد بر ضلع AB را پیدا می‌کنیم:

$$M=\frac{A+B}{۲}=\left(\frac{۱}{۲},۰,\frac{\sqrt{۷}}{۲}\right)\Rightarrow|CM|=\sqrt{\left(-\frac{۵}{۲}\right)^۲+(-\sqrt{۲})^۲+\left(-\frac{\sqrt{۷}}{۲}\right)^۲}=\sqrt{\frac{۲۵}{۴}+۲+\frac{۷}{۴}}=\sqrt{۱۰}$$

A ۱۴ ۴

همه‌چیز درباره‌ی محورها و صفحات مختصات

۱ تصویر

برای تصویر کردن هر نقطه روی محورها و صفحات مختصات کافی است، هر مؤلفه‌ی غیرهم‌نام با اسم محور یا صفحه را در مختصات نقطه، صفر کنیم.

الف) $A(۱,۲,۳)\xrightarrow[y\to ۰,z\to ۰]{\text{تصویر روی } ox}A'(۱,۰,۰)$

ب) $A(۲,۳,-۱)\xrightarrow[x\to ۰]{\text{تصویر روی } yoz}A'(۰,۳,-۱)$

۲ قرینه

برای قرینه کردن هر نقطه نسبت به محورها، صفحات و مبدأ مختصات کافی است، هر مؤلفه‌ی غیرهم‌نام با اسم آن‌ها را در مختصات نقطه، قرینه کنیم.

الف) $A(۱,۲,۳)\xrightarrow[x\to -x,z\to -z]{\text{قرینه نسبت به } oy}A''(-۱,۲,-۳)$

ب) $A(۲,۳,۴)\xrightarrow[z\to -z]{\text{قرینه نسبت به } xoy}A''(۲,۳,-۴)$

ج) $A(۱,-۲,۵)\xrightarrow[x\to -x,y\to -y,z\to -z]{\text{قرینه نسبت به مبدأ مختصات}}A''(-۱,۲,-۵)$

۳ فاصله

برای به‌دست آوردن فاصله‌ی یک نقطه از محورها و صفحات مختصات، یکی از راه‌ها این است که فاصله‌ی نقطه تا تصویرش بر محور یا صفحه را پیدا کنیم. این کار منجر به این نتیجه می‌شود که کافی است مجموع مربعات هر مؤلفه‌ی غیرهم‌نام را زیر رادیکال بنویسیم.

$$\boxed{\text{فاصله‌ی نقطه از محورها و صفحات مختصات}=\sqrt{\text{مجموع مربعات مؤلفه‌های غیرهم‌نام}}}$$

مثال: قرینه‌ی نقطه‌ی $A(۱,-۲,۴)$ را نسبت به محور ox نقطه‌ی B و تصویر آن بر صفحه‌ی xoy را نقطه‌ی C می‌نامیم. فاصله‌ی نقطه‌ی M وسط پاره‌خط BC را از محور oy به‌دست آورید.

پاسخ:

$$\left.\begin{array}{l} A(۱,-۲,۴) \xrightarrow[y\to -y,\ z\to -z]{\text{قرینه نسبت به ox}} B(۱,۲,-۴) \\ A(۱,-۲,۴) \xrightarrow[z\to ۰]{\text{تصویر روی xoy}} C(۱,-۲,۰) \end{array}\right\} \Rightarrow M=\frac{B+C}{۲}=(۱,۰,-۲) \Rightarrow \text{oy فاصله از}=\sqrt{x^۲+z^۲}=\sqrt{۱+۴}=\sqrt{۵}$$

$$\left\{\begin{array}{l} A(۱,۱,۲) \xrightarrow[y\to ۰]{\text{تصویر روی xoz}} C(۱,۰,۲) \\ B(۲,۱,۳) \xrightarrow[y\to ۰]{\text{تصویر روی xoz}} D(۲,۰,۳) \end{array}\right. \Rightarrow |CD|=\sqrt{(۲-۱)^۲+(۰-۰)^۲+(۳-۲)^۲}=\sqrt{۲}$$

A ۱۵ ۲

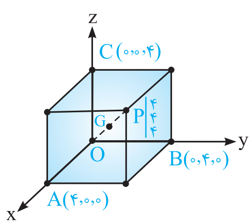
$$\left\{\begin{array}{l} A(۱,۱,۲) \xrightarrow[x\to -x,\ y\to -y]{\text{قرینه نسبت به oz}} C(-۱,-۱,۲) \\ B(۲,۳,-۱) \xrightarrow[y\to -y]{\text{قرینه نسبت به xoz}} D(۲,-۳,-۱) \end{array}\right. \Rightarrow |CD|=\sqrt{(۲+۱)^۲+(-۳+۱)^۲+(۲+۱)^۲}=\sqrt{۲۲}$$

A+ ۱۶ ۲

$$\left\{\begin{array}{l} A(۱,۲,۳) \xrightarrow[y\to ۰]{\text{تصویر روی xoz}} B(۱,۰,۳) \\ A(۱,۲,۳) \xrightarrow[y\to -y,\ z\to -z]{\text{قرینه نسبت به ox}} C(۱,-۲,-۳) \end{array}\right. \Rightarrow M=\frac{B+C}{۲}=(۱,-۱,۰) \Rightarrow |AM|=\sqrt{۰^۲+۳^۲+۳^۲}=۳\sqrt{۲}$$

B+ ۱۷ ۴

مرکز مکعب وسط هر کدام از قطرهای آن است، بنابراین $G=\frac{O+P}{۲}=(۲,۲,۲)$ می‌باشد.



$$\left\{\begin{array}{l} G(۲,۲,۲) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به oz}} D(-۲,-۲,۲) \\ G(۲,۲,۲) \xrightarrow{\text{تصویر بر xoy}} E(۲,۲,۰) \end{array}\right. \Rightarrow M=\frac{D+E}{۲}=(۰,۰,۱)$$

$$\Rightarrow |AM|=\sqrt{(-۴)^۲+۰^۲+۱^۲}=\sqrt{۱۷}$$

A ۱۸ ۳

تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{۱+۴}=\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{z^۲}=۳$

۳) $\sqrt{x^۲+z^۲}=\sqrt{۱+۹}=\sqrt{۱۰}$ ۴) $\sqrt{y^۲}=۲$

A ۱۹ ۱

$$M=\frac{A+B}{۲}=\frac{(۱,۱,۲)+(۳,۱,۲)}{۲}=(۲,۱,۲) \Rightarrow \text{oy فاصله از}=\sqrt{x^۲+z^۲}=\sqrt{۴+۴}=۲\sqrt{۲}$$

A ۲۰ ۲

مرکز مستطیل، وسط هر کدام از قطرهای آن است:

$$M=\frac{A+B}{۲}=\frac{(۱,۱,۲)+(۳,۱,۰)}{۲}=(۲,۱,۱) \Rightarrow \text{oz فاصله از}=\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}$$

A ۲۱ ۳

نیم‌نگاه

اگر نقاط A و B و C سه رأس مثلث ABC باشند، به سادگی می‌توان نشان داد که مختصات محل تلاقی میانه‌های مثلث (مرکز ثقل) از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\boxed{G=\frac{A+B+C}{۳}}$$

$$G=\frac{A+B+C}{۳}=\frac{(۱,۱,۲)+(۱,۰,۳)+(۱,۲,۱)}{۳}=\frac{(۳,۳,۶)}{۳}=(۱,۱,۲) \Rightarrow |OG|=\sqrt{۱+۱+۴}=\sqrt{۶}$$

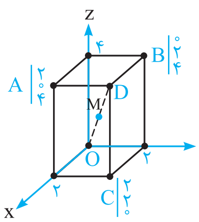
A+ ۲۲ ۲

$$\text{ox فاصله از}=\sqrt{y^۲+z^۲}=۲ \Rightarrow y^۲+z^۲=۴$$

$$\text{oy فاصله از}=\sqrt{x^۲+z^۲}=۶ \Rightarrow x^۲+z^۲=۳۶ \xRightarrow{+} ۲(x^۲+y^۲+z^۲)=۴۹ \Rightarrow |OA|=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}=\frac{۷}{\sqrt{۲}}$$

$$\text{oz فاصله از}=\sqrt{x^۲+y^۲}=۳ \Rightarrow x^۲+y^۲=۹$$

A+ ۲۳ ۳



$$\Rightarrow D(۲,۲,۴) \Rightarrow M = \frac{O+D}{۲} = \frac{(۰,۰,۰)+(۲,۲,۴)}{۲} = (۱,۱,۲)$$

$$\Rightarrow |OM| = \sqrt{۱+۱+۴} = \sqrt{۶}$$

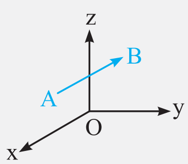
A+ ۲۴ ۲

$$oy \text{ فاصله از } = \sqrt{x^۲+z^۲} = \sqrt{m^۲+۹} = ۵ \Rightarrow m^۲+۹ = ۲۵ \Rightarrow m^۲ = ۱۶$$

$$oz \text{ فاصله از } = \sqrt{x^۲+y^۲} = \sqrt{m^۲+۴} = \sqrt{۱۶+۴} = ۲\sqrt{۵}$$

A ۲۵ ۳

مقدمات بردار



پیکان: پاره‌خط جهت‌داری است که دارای ابتدا و انتهای مشخص می‌باشد. مانند پیکان $\overrightarrow{AB}$ در شکل مقابل.

دو پیکان هم‌ارز: دو پیکان را هم‌ارز می‌نامند هرگاه موازی، هم‌جهت و هم‌اندازه باشند.

بردار: در یک مجموعه پیکان هم‌ارز، فقط یک پیکان وجود دارد که ابتدای آن مبدأ مختصات است که از این به بعد این پیکان را بردار می‌نامیم.

از آن‌جایی که ابتدای همه‌ی بردارها مبدأ مختصات است، پس برای معرفی بردار کافی است فقط نقطه‌ی انتهایی آن معلوم شود. هر بردار در فضای $\mathbb{R}^۳$، با یک سه‌تایی مرتب مانند $v = (a,b,c)$ مشخص می‌شود که نقطه‌ی $A(a,b,c)$ نقطه‌ی انتهایی بردار است. در ضمن به اعداد a، b و c تصاویر بردار گفته می‌شود که معرف اندازه‌ی علامت‌دار تصویر بردار بر محورهای مختصات هستند.

تذکر اگر A و B دو نقطه در فضا باشند، مؤلفه‌های بردار هم‌ارز با پیکان $\overrightarrow{AB}$ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$

توجه کنید از آن‌جایی که هرپیکانی مانند $\overrightarrow{AB}$ برداری هم‌ارز با خود دارد، از این پس برای سادگی به جای آن‌که بگوییم بردار هم‌ارز با پیکان $\overrightarrow{AB}$ به اختصار می‌گوییم بردار $\overrightarrow{AB}$.

اندازه‌ی بردار: اندازه‌ی بردار $a = (x,y,z)$ را با نماد $|a|$ نشان می‌دهند و برابر است با:

$$|a| = \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$$

تساوی دو بردار: دو بردار $a = (x,y,z)$ و $b = (x',y',z')$ را مساوی می‌نامند اگر و تنها اگر:

$$x = x', y = y', z = z'$$

مثال: نقاط $A(۱,۱,۴)$، $B(-۱,۲,۳)$ و $C(۲,۰,-۱)$ مفروض‌اند. اگر $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ باشد، اندازه‌ی بردار $\overrightarrow{AD}$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

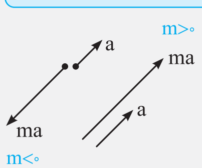
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow B - A = D - C \Rightarrow D = B - A + C \Rightarrow D(۰,۱,-۲)$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A \Rightarrow \overrightarrow{AD} = (-۱,۰,-۶) \Rightarrow |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{۱+۰+۳۶} = \sqrt{۳۷}$$

ضرب عدد در بردار: اگر m یک عدد حقیقی و $a = (x,y,z)$ یک بردار باشد، آن‌گاه ضرب عدد m در بردار a را به‌صورت ma نشان می‌دهند و داریم:

$$ma = (mx, my, mz)$$

ویژگی‌ها:



۱ اگر $m > ۰$ باشد، بردار ma موازی و هم‌جهت با بردار a است و اگر $m < ۰$ باشد، بردار ma موازی و درخلاف جهت a می‌باشد.

۲ $|ma| = |m||a|$

۳ شرط لازم و کافی برای آن‌که دو بردار، موازی هم باشند، آن است که دو بردار مضرب هم باشند. بنابراین دو بردار $a(x,y,z)$ و $b = (x',y',z')$ موازی‌اند اگر و تنها اگر:

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$$

توجه اگر مؤلفه‌ای در یکی از دو بردار موازی صفر باشد، مؤلفه‌ی نظیر در بردار دیگر هم باید صفر باشد.

مثال: اگر دو بردار $a=(۱,m,-۳)$ و $b=(n,۲,۶)$ موازی باشند، مقادیر m و n را به‌دست آورید.

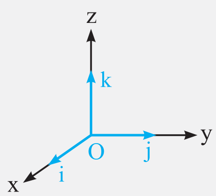
پاسخ:

$$a\parallel b\Rightarrow \frac{۱}{n}=\frac{m}{۲}=-\frac{۳}{۶}\Rightarrow\begin{cases}\frac{۱}{n}=-\frac{۳}{۶}\Rightarrow -۳n=۶\Rightarrow n=-۲\\ \frac{m}{۲}=-\frac{۳}{۶}\Rightarrow ۶m=-۶\Rightarrow m=-۱\end{cases}$$

بردار یکه (بردار جهت)

بردار یکه‌ی $a=(x,y,z)$ که آن را با e_a نشان می‌دهند، برداری است به طول ۱ در راستا و جهت بردار a که به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$e_a=\frac{۱}{|a|}a=\left(\frac{x}{|a|},\frac{y}{|a|},\frac{z}{|a|}\right)$$



تذکر بردارهای یکه‌ی محورهای مختصات را با $i=(۱,۰,۰)$ ، $j=(۰,۱,۰)$ و $k=(۰,۰,۱)$ نشان می‌دهند و هر بردار دلخواه را می‌توان برحسب ترکیب خطی از i ، j و k نوشت. یعنی:

$$a=(x,y,z)\Leftrightarrow a=xi+yj+zk$$

مثال: بردار جهت بردار $a=۲i+j-۲k$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$a=(۲,۱,-۲)\Rightarrow |a|=\sqrt{۴+۱+۴}=۳\Rightarrow e_a=\left(\frac{۲}{۳},\frac{۱}{۳},-\frac{۲}{۳}\right)=\frac{۲}{۳}i+\frac{۱}{۳}j-\frac{۲}{۳}k$$

طرفین تساوی را باز می‌کنیم و از حالت برداری به نقطه‌ای تبدیل می‌کنیم:

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}\Rightarrow C-A=D-B\Rightarrow D=C+B-A=(۲,۱,۵)+(-۲,۰,-۱)-(۱,۲,۴)=(۰,۱,۴)-(۱,۲,۴)=(-۱,-۱,۰)$$

$$\overrightarrow{AD}=D-A=(-۱,-۱,۰)-(۱,۲,۴)=(-۲,-۳,-۴)\Rightarrow|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{۴+۹+۱۶}=\sqrt{۲۹}$$

A+ ۲۶ ۱

$$\overrightarrow{AM}=\frac{۲}{۳}\overrightarrow{AB}\Rightarrow M-A=\frac{۲}{۳}(B-A)\Rightarrow ۳M-۳A=۲B-۲A$$

$$\Rightarrow ۳M=۲B+A\Rightarrow M=\frac{۲B+A}{۳}=\frac{(-۲,۴,۸)+(۵,-۴,۱)}{۳}=\frac{(۳,۰,۹)}{۳}=(۱,۰,۳)\Rightarrow|OM|=\sqrt{۱+۰+۹}=\sqrt{۱۰}$$

A ۲۷ ۴

ابتدا تساوی داده شده را باز می‌کنیم تا مختصات نقطه‌ی D پیدا شود:

$$\overrightarrow{AD}=۲\overrightarrow{BC}\Rightarrow D-A=۲(C-B)\Rightarrow D=۲C+A-۲B=(۴,۲,۲)+(۱,۲,۴)-(۶,۲,۰)=(-۱,۲,۶)$$

حال با پیدا شدن D می‌توانیم بردار $\overrightarrow{CD}$ را تشکیل دهیم:

$$\overrightarrow{CD}=D-C=(-۱,۲,۶)-(۲,۱,۱)=(-۳,۱,۵)\xrightarrow[y\to ۰]{\text{تصویر بر } xoz}(-۳,۰,۵)$$

$$\Rightarrow \text{اندازه‌ی تصویر}=\sqrt{۹+۲۵}=\sqrt{۳۴}$$

A ۲۸ ۳

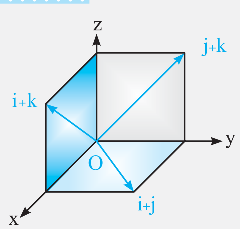
باید نسبت مؤلفه‌های (تصاویر) دو بردار یکسان باشد؛ و اگر یکی از مؤلفه‌ها صفر بود، مؤلفه‌ی نظیر آن در دیگری نیز صفر شود:

$$\begin{matrix}a=(-۲,m-۱,۱)\\ b=(۴,۰,n+۱)\end{matrix}\Rightarrow\frac{-۲}{۴}=\frac{m-۱}{۰}=\frac{۱}{n+۱}\Rightarrow\begin{cases}n+۱=-۲\Rightarrow n=-۳\\ m-۱=۰\Rightarrow m=۱\end{cases}\Rightarrow m+n=-۲$$

A ۲۹ ۴

نیم‌نگاه

بردارهای نیمساز ناحیه‌ی اول صفحه‌های xoy ، xoz ، yoz را به‌صورت‌های مقابل در شکل می‌بینید.



$$\overrightarrow{AB}=B-A=(m-۲،۱،۳)-(۱،n،۱)=(m-۳،۱-n،۲)$$

بردار نیمساز ناحیه‌ی اول صفحه‌ی xoz به‌صورت $i+k=(۱،۰،۱)$ می‌باشد، بنابراین:

$$\frac{m-۳}{۱}=\frac{۱-n}{۰}=\frac{۲}{۱}\Rightarrow\begin{cases}m-۳=۲\Rightarrow m=۵\\ ۱-n=۰\Rightarrow n=۱\end{cases}\Rightarrow m+n=۶$$

A ۳۰ ۴

اندازه‌ی هر بُردار جهت همواره برابر ۱ است:

$$\sqrt{\frac{۱}{۹}+m^۲+\frac{۴}{۹}}=۱\Rightarrow m^۲+\frac{۵}{۹}=۱\Rightarrow m^۲=\frac{۴}{۹}\Rightarrow m=\pm\frac{۲}{۳}$$

A ۳۱ ۱

ابتدا مختصات نقطه‌ی M وسط پاره‌خط BC را پیدا می‌کنیم:

$$M=\frac{B+C}{۲}=\frac{(-۱،۳،۰)+(۳،۳،۴)}{۲}=(۱،۳،۲)$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AM}=M-A=(۱،۳،۲)-(۳،۴،۰)=(-۲،-۱،۲)\Rightarrow e_{\overrightarrow{AM}}=\frac{\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AM}|}=\frac{۱}{۳}(-۲،-۱،۲)$$

A+ ۳۲ ۴

ابتدا مختصات نقطه‌ی C را از تساوی داده شده پیدا می‌کنیم.

$$\overrightarrow{AC}=\frac{۱}{۳}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=۳\overrightarrow{AC}\Rightarrow B-A=۳(C-A)\Rightarrow ۳C=۲A+B$$

$$\Rightarrow ۳C=۲(-۲،۱،۰)+(۱،۴،۶)=(-۳،۶،۶)\Rightarrow C=(-۱،۲،۲)$$

حال بردار $\overrightarrow{BC}$ را می‌توانیم بسازیم:

$$\overrightarrow{BC}=C-B=(-۱،۲،۲)-(۱،۴،۶)=(-۲،-۲،-۴)$$

بنابراین بردار جهت $\overrightarrow{BC}$ برابر است با:

$$e_{\overrightarrow{BC}}=\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{۱}{\sqrt{۴+۴+۱۶}}(-۲،-۲،-۴)=\frac{۱}{۲\sqrt{۶}}(-۲،-۲،-۴)=\frac{-۱}{\sqrt{۶}}(۱،۱،۲)$$

A+ ۳۳ ۳

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(۳،۰،۳)-(۱،۲،-۱)=(۲،-۲،۴)$$

می‌دانیم بردار جهت یک بردار، موازی و هم‌جهت با خود بردار است، بنابراین با هر ضریب مثبتی از بردار موازی و هم‌جهت است. که گزینه‌ی (۳) ضریب مثبتی از $\overrightarrow{AB}$ است.

B ۳۴ ۳

می‌دانیم بردار هم‌ارز با یک پیکان، موازی، هم‌جهت و هم‌اندازه با آن است، بنابراین:

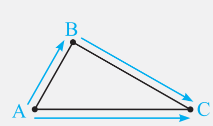
$$e_{\overrightarrow{AB}}=\frac{۱}{۳}i-\frac{۲}{۳}j-\frac{۲}{۳}k\xRightarrow{|\overrightarrow{AB}|=۳}\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|e_{\overrightarrow{AB}}=i-۲j-۲k$$

$$\overrightarrow{AB}=B-A\Rightarrow(۱،-۲،-۲)=B-(-۲،۳،۱)\Rightarrow B=(۱،-۲،-۲)+(-۲،۳،۱)=(-۱،۱،-۱)\Rightarrow|OB|=\sqrt{۱+۱+۱}=\sqrt{۳}$$

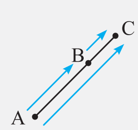
B+ ۳۵ ۳

نیم‌نگاه

اگر سه نقطه‌ی A و B و C روی یک خط راست نباشند، مانند شکل مقابل، بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}$ هیچ‌کدام با هم موازی نیستند.



اما اگر این سه نقطه روی یک خط راست باشند، بردارهای فوق، دو به دو با هم موازی‌اند:



با این سه نقطه دو بردار تشکیل می‌دهیم و آن‌ها را موازی قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=B-A=(۱،m+۱،n)-(۳،۶،-۳)=(-۲،m-۵،n+۳)\\ \overrightarrow{AC}&=C-A=(۲،۴،-۱)-(۳،۶،-۳)=(-۱،-۲،۲)\end{aligned}\Rightarrow\underbrace{\frac{-۲}{-۱}=\frac{m-۵}{-۲}}_{m=۱}=\frac{n+۳}{۲}$$

$$\underbrace{\frac{m-۵}{-۲}=\frac{n+۳}{۲}}_{n=۱}$$

حال با معلوم شدن مقادیر m و n می‌توانیم بردار $\overrightarrow{BC}$ را تشکیل دهیم و بردار جهت آن را پیدا کنیم:

$$\overrightarrow{BC}=C-B=(۲،۴،-۱)-(۱،۲،۱)=(۱،۲،-۲)\Rightarrow e_{\overrightarrow{BC}}=\frac{۱}{۳}(۱،۲،-۲)=\frac{۱}{۳}i+\frac{۲}{۳}j-\frac{۲}{۳}k$$

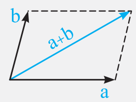
A ۳۶ | ۱

جمع و تفریق بردارها

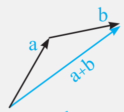
اگر $a=(x،y،z)$ و $b=(x'،y'،z')$ دو بردار در فضا باشند، مجموع و تفاضل آن‌ها به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$a \pm b=(x \pm x'،y \pm y'،z \pm z')$$

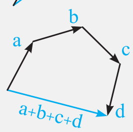
تعبیر هندسی جمع دو بردار:



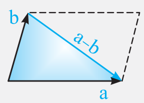
۱ روش متوازی‌الاضلاع: اگر a و b دو بردار هم‌ابتدا باشند، $a+b$ قطر متوازی‌الاضلاعی است که روی دو بردار a و b ساخته می‌شود و هم‌ابتدا با بردارهای a و b است.



۲ روش مثلث: اگر دو بردار a و b به‌گونه‌ای باشند که ابتدای یکی بر انتهای دیگری منطبق باشد، $a+b$ برداری است که ابتدای اولی را به انتهای دومی وصل می‌کند.



تذکر *روش مثلث برای بیش از دو بردار هم قابل تعمیم است.*



تعبیر هندسی تفریق دو بردار: اگر a و b دو بردار هم‌ابتدا باشند، $a-b$ برداری است که انتهای دو بردار را به هم وصل می‌کند و از b به‌سمت a می‌باشد. در واقع $a-b$ ضلع سوم مثلثی است که روی بردارهای a و b ساخته می‌شود.

تذکر *همان‌طور که ملاحظه کردید $a+b$ و $a-b$ قطرهای متوازی‌الاضلاع بنا شده بر روی دو بردار a و b هستند.*

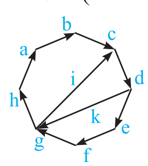
مثال: **اندازه‌ی قطرهای متوازی‌الاضلاع بنا شده بر دو بردار $a=(۱،۲،۳)$ و $b=(۲،-۱،۴)$ را به‌دست آورید.**

پاسخ: می‌دانیم قطرهای متوازی‌الاضلاع بنا شده بر دو بردار a و b، بردارهای $a+b$ و $a-b$ هستند. بنابراین:

$$a+b=(۳،۱،۷) \Rightarrow |a+b|=\sqrt{۹+۱+۴۹}=\sqrt{۵۹}$$

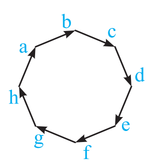
$$a-b=(-۱،۳،-۱) \Rightarrow |a-b|=\sqrt{۱+۹+۱}=\sqrt{۱۱}$$

مثال: **در شکل مقابل، مجموع همه‌ی بردارهای موجود را برحسب یکی از بردارها به‌دست آورید.**



پاسخ: اگر چند بردار تشکیل یک حلقه‌ی بسته بدهند، مجموع آن‌ها صفر است.

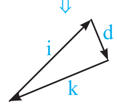
پس:



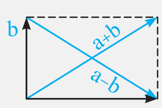
$$\Rightarrow a+b+c+d+e+f+g+h=\overline{o}$$

بنابراین مجموع همه‌ی بردارهای موجود برابر است با:

$$\underbrace{a+b+c+d+e+f+g+h}_{\overline{O}}+\underbrace{i+k}_{\Downarrow}=\overline{o}+(-d)=-d$$

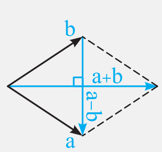


دو حالت خاص در مجموع و تفاضل دو بردار:



۱ اگر بردارهای a و b بر هم عمود باشند، متوازی‌الاضلاع ساخته شده بر روی دو بردار تبدیل به مستطیل می‌شود و در نتیجه $a+b$ و $a-b$ هم‌اندازه می‌شوند و برعکس.

$$a \perp b \Leftrightarrow |a+b|=|a-b|$$



۲ اگر بردارهای a و b هم‌اندازه باشند، متوازی‌الاضلاع ساخته شده بر روی دو بردار تبدیل به لوزی می‌شود و در نتیجه $a+b$ بر $a-b$ عمود می‌شود و برعکس.

$$|a|=|b| \Leftrightarrow (a+b) \perp (a-b)$$

مثال: **دو بردار a و b بر هم عمودند و اندازه‌ی مجموع آن‌ها برابر ۳ می‌باشد. اگر $a-b=(۱،m،-۲)$ باشد، مقدار m را به‌دست آورید.**

پاسخ: چون a و b بر هم عمودند، پس $|a+b|=|a-b|$؛ بنابراین داریم:

$$\sqrt{۱+m^۲+۴}=۳ \Rightarrow m^۲=۴ \Rightarrow m=\pm ۲$$