فصل ۱
استدلال ریاضی

استدلال‌های غیرعلمی

استدلال شهودی شهود یک دانش غریزی یا احساس بدون استدلال است. هر جا از حواس پنج‌گانه (بینایی، شنوایی، بویایی، چشایی و لامسه) استفاده کنیم، استدلال شهودی کرده‌ایم، مثلاً به طور شهودی حس می‌شود زمین صاف است؛ یا این طور که ما می‌بینیم، زمین ثابت است و خورشید به دور آن می‌چرخد؛ حس می‌کنیم فلزات سرد هستند؛ با دیدن طول سایه‌ی اجسام، به زمان روز پی می‌بریم (در زمان‌های نزدیک طلوع و غروب آفتاب، سایه بلندتر است و نزدیک ظهر، سایه کوتاه است)؛ برای جهت‌یابی هم از دیدن ستاره‌ی قطبی استفاده می‌کنیم.

وقتی از شهود استفاده می‌کنیم، احتمال این‌که نتیجه نادرست باشد خیلی زیاد است. در واقع شهود از نظر ریاضی اعتباری ندارد و با این روش فقط می‌توان حدس‌های احتمالی و موقتی زد اما برای یک استدلال حتمی، باید روش‌های دیگری را امتحان کنیم.

استدلال تمثیلی یا قیاسی در قیاس، سعی می‌کنیم نوعی مشابهت بین مفاهیم گوناگون پیدا کنیم؛ یعنی با زدن یک مثال، موضوع دیگری را بهتر درک و نتیجه‌گیری می‌کنیم. البته نمی‌توانیم همه‌ی مثال‌ها را بررسی کنیم و در برخی موارد اصلاً مثال وجود ندارد؛ پس تمثیل‌ها محدودیت دارند اما می‌توانند زمینه‌ی شهودی برای درک و اثبات مسئله را فراهم کنند.

استفاده از ضرب‌المثل‌ها معمولاً استدلال تمثیلی است، مثلاً برای رسیدن به این نتیجه که افراد موفق یا ثروتمند باید متواضع باشند، مثال می‌زنیم «درخت هر چه پربارتر باشد، افتاده‌تر است». در ماجرای طوطی و بقال، طوطی با دیدن فرد کچل، خودش را مثال زد، با او قیاس کرد و نتیجه گرفت که آن شخص هم به خاطر ریختن روغن کچل شده است!

استدلال استقرایی استقرا یعنی «قریه‌گردی» (قریه هم یعنی روستا). در استدلال استقرایی بر مبنای چند مثال یا مشاهده، یک نتیجه‌ی کلی می‌گیریم یا به عبارت دیگر شباهت نتایج این چند مثال ما را به نتیجه‌ی کلی می‌رساند. در علوم تجربی به این روش، روش علمی یا تجربی می‌گویند. مثلاً با بررسی چند بیمار نتیجه می‌گیریم نوشیدن عصاره‌ی گیاهی خاص برای بهبود گلودرد مناسب است؛ پس این روش، نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه‌ی محدودی از مشاهدات است.

گالیله با مشاهده‌ی نوسان آونگ‌ها، نتیجه گرفت زمان نوسان یک آونگ ثابت است و قانون هم‌زمانی نوسان‌ها را کشف کرد؛ انسان اولیه پس از مشاهده‌ی جوشیدن آب، یخ و برف، با استقرا نتیجه گرفت هر چیزی آن‌قدر می‌جوشد تا تمام شود؛ من با مشاهده‌ی امتحان نهایی جبر و احتمال در سال‌های اخیر نتیجه گرفته‌ام فصل احتمال مهم‌ترین فصل است.

در همه‌ی این موارد، اول چند مشاهده می‌کنیم و سپس نتیجه‌ی آن‌ها را به مواردی که ندیده‌ایم، تعمیم می‌دهیم؛ پس استقرا یعنی رسیدن از جزء به کل. مثلاً با حرارت‌دادن میله‌های فلزی مختلف در آزمایشگاه نتیجه می‌گیریم که همه‌ی فلزات در اثر گرما افزایش طول دارند. خب بدیهی است که ما همه‌ی فلزات را آزمایش نکرده‌ایم و این نتیجه‌گیری بر مبنای استقرا است.

در مسائل ریاضی هم می‌توانیم از استقرا استفاده کنیم:

$۱ \times ۸ + ۱ = ۹$

$۱۲ \times ۸ + ۲ = ۹۸$

$۱۲۳ \times ۸ + ۳ = ۹۸۷$

$\downarrow$ استقرا

$۱۲۳۴ \times ۸ + ۴ = ۹۸۷۶$

$۱۲۳۴۵ \times ۸ + ۵ = ۹۸۷۶۵$

عدد اول است $۳ = ۱ + ۲^{۱}$

عدد اول است $۵ = ۱ + ۲^{۲}$

$\downarrow$ استقرا

$۲^{n} + ۱$ عدد اول است.

$۱ = ۱^{۲}$

$۱ + ۳ = ۲^{۲}$

$۱ + ۳ + ۵ = ۳^{۲}$

$۱ + ۳ + ۵ + ۷ = ۴^{۲}$

$\downarrow$ استقرا

مجموع اعداد فرد متوالی از ۱ تا $۲n - ۱$، مربع کامل است

استدلال استقرایی هم ارزش علمی زیادی ندارد، چون نتایج آن همواره درست نیستند. همیشه امکان دارد شواهد جدیدی کشف شوند که نتیجه‌ی به دست آمده از مشاهدات قبلی را رد کنند؛ مثلاً گزاره‌ی «$۲^{n}+۱$ اول است» برای $n = ۳$ و خیلی اعداد دیگر درست نیست.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- اگر انسان از بلندی یا کوتاهی سایه‌ی اشیا در روز پی به موقعیت زمان ببرد، از کدام استدلال استفاده کرده است؟ *(نوایی ۸۸)*

۱) استقرایی ۲) تمثیلی ۳) شهودی ۴) استنتاجی

۲- معلمی به دانش‌آموزانش می‌گوید: «ماشین خیلی سخت از سربالایی بالا می‌رود اما در سرپایینی، ماشین خاموش هم که باشد، حرکت می‌کند و در نتیجه همواره پیش‌رفت سخت‌تر از پس‌رفت است.» در این‌جا معلم از چه استدلالی استفاده کرده است؟

۱) شهودی ۲) قیاسی ۳) استقرایی ۴) استنتاجی

۳- در متن زیر کدام‌یک از استدلال‌ها دیده می‌شود؟

«واردشدن آب به مخزن را عملی مثبت (+) و خارج‌شدن آب از مخزن را عملی منفی (−) در نظر می‌گیریم، هم‌چنین جلوبردن فیلم را عملی مثبت (+) و عقب‌بردن فیلم را عملی منفی (−) به‌حساب می‌آوریم. حال اگر فیلمی نمایش داده شود که در آن، آب در حال خروج از یک مخزن است (−) و فیلم را به عقب برگردانیم (−)، آب دوباره به مخزن برمی‌گردد (+)؛ یعنی منفی در منفی شد مثبت!»

۱) درک شهودی ۲) استدلال تمثیلی ۳) استدلال استقرایی ۴) استدلال استنتاجی

۴- روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه‌ی محدودی از مشاهدات، کدام نوع استدلال را بیان می‌کند؟ *(سراسری ۸۸)*

۱) قیاسی ۲) شهودی ۳) استقرایی ۴) استنتاجی

۵- کدام عبارت درباره‌ی استدلال استقرایی غلط است؟

۱) همواره با محدودیت همراه است.

۲) روش کلی این نوع نتیجه‌گیری، رسیدن از جزء به کل است.

۳) نتایج آن همواره درست نیست.

۴) در هیچ علمی کاربرد ندارد.

۶- انسان‌های اولیه با کدام روش استدلال فهمیدند که آب در اثر جوشیدن تمام می‌شود؟

۱) استقرایی ۲) تمثیلی ۳) استنتاجی ۴) شهودی

۷- بومیان یک منطقه، برخی از امراض خفیف را با گیاهان معالجه می‌کنند. روش معالجه‌ی آن‌ها بر مبنای کدام استدلال است؟

۱) شهودی ۲) استقرایی ۳) استقرای ریاضی ۴) تمثیلی

۸- انسان‌های اولیه با کدام روش نتیجه گرفتند هر چیز در اثر جوشیدن تمام می‌شود؟

۱) استقرایی ۲) تمثیلی ۳) شهودی ۴) استنتاجی

۹- اگر با مشاهده‌ی عبارات $۱۲۱ = ۱۱^{۲}$، $۱۳۳۱ = ۱۱^{۳}$ و $۱۴۶۴۱ = ۱۱^{۴}$ نتیجه بگیریم که $۱۵۱۰۱۰۵۱ = ۱۱^{۵}$ و ...، کدام روش استدلال به کار رفته است؟

۱) تمثیلی ۲) شهودی ۳) استقرایی ۴) مثال نقض

۱۰- با توجه به الگوی زیر، عدد حاصل از سطر پانزدهم کدام است؟

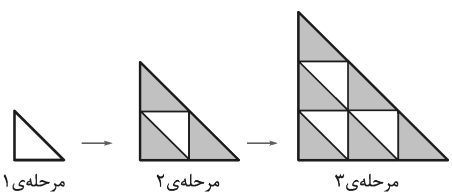
$$۱^{۲}+۲^{۲}-۱^{۲}=۴$$

$$۲^{۲}+۳^{۲}-۱^{۲}=۱۲$$

$$۳^{۲}+۴^{۲}-۱^{۲}=۲۴$$

۱) ۴۸۰ ۲) ۴۸۱ ۳) ۴۲۰ ۴) ۴۲۱

۱۱- با توجه به روند موجود در شکل مقابل و با استفاده از استدلال استقرایی، تعداد مثلث‌های سفید در مرحله‌ی ۱۰۰اُم کدام است؟



۱) ۱۰۱

۲) ۵۱۵۱

۳) ۵۰۵۰

۴) ۴۹۵۰

استقرای ریاضی

استقرای ریاضی با استدلال استقرایی فرق دارد! استدلال استقرایی روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای چند مشاهده‌ی محدود بود و ارزش ریاضی نداشت اما استقرای ریاضی یک اثبات اندیشمند ریاضی در اعداد طبیعی است.

در استقرای ریاضی برای اثبات حکمی که آن را $P(n)$ می‌نامیم، باید نشان دهیم $P(1)$ درست است و از درستی $P(k)$، درستی $P(k+1)$ نتیجه شود، آن‌گاه $P(n)$ برای تمام اعداد طبیعی درست خواهد بود. عملکرد استقرای ریاضی، مثل این است که اعداد طبیعی از ۱ تا ∞، در صف بایستند. پیغامی را به عدد ۱ می‌گوییم (این یعنی $P(1)$) و قرار می‌گذاریم که هر کس پیغام را شنید (این یعنی $P(k)$) به نفر پشت سرش بگوید (این یعنی $P(k+1)$). حالا نتیجه چیست؟ تمام صف پیغام را می‌شنوند (یعنی $P(n)$ برای تمام اعداد طبیعی درست است).

حالا چرا این کار فقط در اعداد طبیعی است؟ اگر دقت کنید در عملکرد استقرا، نفر اول و نفر بعدی مهم هستند، یعنی باید حتماً نفر اول مشخص باشد و هر عضو نیز دارای عضو بعدی مشخصی باشد. در سال چهارم و در درس گسسته می‌خوانید که این دو ویژگی را خوش‌ترتیبی می‌نامند که فقط در $\mathbb{N}$ برقرار است ... بگذریم.

سه مدل کلی در مسائل استقرا داریم:

الف) استقراهای مجموع: در این استقراها $P(n)$ گزاره‌ای به شکل $a(1)+a(2)+\cdots+a(n)=b(n)$ است؛ یعنی مجموع n جمله‌ی سمت چپ، برابر عبارتی در سمت راست شده است.

در این استقراها برای کنترل برقراری $P(1)$، به جای n، ۱ می‌گذاریم و گزاره را می‌نویسیم. عبارت حاصل حتماً درست خواهد بود. بعد به جای n ها، k می‌گذاریم و $P(k)$ را می‌نویسیم که فرض استقرا است؛ سپس به جای n ها، $k+1$ می‌گذاریم تا حکم استقرا یعنی $P(k+1)$ را ببینیم.

حتماً در استقراهای مجموع، وقتی $P(k+1)$ را می‌نویسید، علاوه بر $a(k+1)$، جمله‌ی قبلی یعنی $a(k)$ را نیز بیاورید.

حالا در تشریحی باید از فرض به حکم برسید. معمولاً جمله‌ی $a(k+1)$ را به دو طرف فرض اضافه می‌کنند تا طرف چپ حکم ساخته شود. بعد $b(k)+a(k+1)$ را که در طرف راست مانده، ساده می‌کنند و به طرف راست حکم می‌رسند.

این مثال را ببینید:

$$P(n): \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

$$P(1): \frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{1+1} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$ درست است

معمولاً در این استقراها، $P(1)$ فقط جمله‌ی اول سمت چپ را می‌گیرد.

$$P(k): \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$ فرض استقرا

$P(k)$ همان صورت سؤال است! فقط به جای n ها، حرف k آمده است.

$$P(k+1): \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{\underbrace{k(k+1)}_{\text{جمله‌ی آخر فرض را هم می‌نویسیم}}}+\frac{1}{\underbrace{(k+1)(k+1+1)}_{\text{به جای n، k+1 قرار می‌دهیم}}}=\frac{k+1}{k+1+1}$$ حکم استقرا

حالا برای اثبات باید از فرض به حکم برسیم. گفتیم که جمله‌ی آخر حکم را به دو طرف فرض اضافه می‌کنند؛ پس الان باید $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ را به $P(k)$ افزود! ببینید:

$$P(k)+\frac{1}{(k+1)(k+2)}: \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

خب طرف چپ حکم ساخته شد. حالا طرف راست را هم ساده می‌کنیم تا به طرف راست حکم برسیم:

$$\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+2)k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}\xrightarrow{\text{k+1ها را بزنیم}}\frac{k+1}{k+2}=$$ طرف راست حکم

به این‌جا که برسیم اثبات کامل می‌شود.

اثبات استقرا جزو مسائل طولانی در امتحان نهایی است. حتماً بعد از نوشتن $P(1)$، $P(k)$ و $P(k+1)$، به مسیر اثبات فکر کنید و بعد آن را بنویسید.

در کتاب درسی، برای این احکام استقرا به کار می‌رود:

$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$: مجموع اعداد طبیعی

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$: مجموع مربعات اعداد طبیعی

$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2=(\dfrac{n(n+1)}{2})^2$: مجموع مکعب‌های اعداد طبیعی

$\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}=1-\dfrac{1}{2^n}$

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$: مجموع اعداد فرد

$1\times2+2\times3+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|\geq|x_1+x_2+\cdots+x_n|$

$1+r+r^2+\cdots+r^n=\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}\qquad(r\neq1)$

ب) استقراهای بخش‌پذیری: مثلاً $P(n)$ گزاره‌ای به شکل $k\,|\,a(n)$ است، یعنی می‌خواهیم ثابت کنیم عبارتی مانند $a(n)$ همواره بر عدد صحیح k بخش‌پذیر است. به عنوان مثال ثابت کنیم $4^{2n}-1$ همواره بر ۵ بخش‌پذیر است.

در این اثبات‌ها، در فرض و حکم به جای این‌که مثلاً بگوییم عبارت بر ۵ بخش‌پذیر است، می‌گوییم عبارت به صورت $5r$ است؛ پس داریم:

$P(1):4^{2\times1}-1=5r\Rightarrow 15=5r$ درست است

$P(k):4^{2k}-1=5r$ فرض

$P(k+1):4^{2(k+1)}-1=5r'$ حکم

حواستان هست که وقتی در $P(k)$، $5r$ نوشته‌ایم، در $P(k+1)$ باید $5r'$ بنویسیم؟!

حالا برای اثبات، طرف چپ حکم را می‌سازیم، یعنی برای رسیدن از 4^{2k} به 4^{2k+2}، دو طرف فرض را در 4^2 ضرب می‌کنیم:

$\xrightarrow{P(k)\times4^2}4^2(4^{2k}-1)=4^2(5r)\Rightarrow 4^{2k+2}-16=80r$

حالا به $4^{2k+2}-1$ نیاز داریم، پس به دو طرف ۱۵ تا اضافه می‌کنیم:

$\xrightarrow{+15}4^{2k+2}-1=80r+15=5(\underbrace{16r+3}_{r'})=5r'$

و حکم ثابت شد.

ج) استقراهای نامساوی: در این استقراها حکم به صورت $a(n)>b(n)$ بیان شده است. برای اثبات و رسیدن از $P(k)$ به $P(k+1)$، معمولاً یک طرف حکم را می‌سازیم و برای رسیدن به طرف دیگر، از اعمال ریاضی یا تغییر نامساوی کمک می‌گیریم. منظور از تغییر نامساوی این است:

در نامساوی $A>B$ اجازه داریم به جای A هر عدد بیشتر از آن و به جای B هر عدد کم‌تر از آن را بگذاریم؛ پس داریم:

$A>B\xrightarrow{C\geq A}C>B$

$A>B\xrightarrow{B\geq D}A>D$

مثلاً برای اثبات نامساوی $2^n\geq n+1$ به روش استقرا داریم:

$P(n):2^n\geq n+1$

$P(1):2^1\geq1+1\Rightarrow 2\geq2$ درست است

$P(k):2^k\geq k+1$ فرض

$P(k+1):2^{k+1}\geq k+1+1$ حکم

برای اثبات، طرفین فرض را در ۲ ضرب می‌کنیم تا از 2^k به 2^{k+1} برسیم:

$\xrightarrow{P(k)\times2}2(2^k)\geq2(k+1)\Rightarrow 2^{k+1}\geq2k+2$

حالا ما می‌خواهیم به $2^{k+1}\geq k+2$ برسیم. خب واضح است که $2k+2$ از $k+2$ بیشتر است، پس مشکلی نیست:

$2^{k+1}\geq2k+2\xrightarrow{2k+2>k+2}2^{k+1}\geq k+2$

د) استقراهای تعمیم‌یافته: در برخی مسائل، حکم $P(n)$ از $n=1$ درست نیست، بلکه حکم اساساً برای مقادیر $n\geq m$ درست است؛ یعنی شروع استقرا به جای ۱، از عدد طبیعی m خواهد بود.

مثل این است که اعداد طبیعی در صف باشند و پیغام را به جای شماره‌ی ۱، مثلاً به شماره‌ی ۵ بگوییم و هر کس به بعدی‌اش بگوید؛ پس فقط تمام شماره‌ها از ۵ به بعد مطلع می‌شوند.

مسیر اثبات استقرای تعمیم‌یافته به این صورت است که اولاً باید m مناسب را با جست‌وجو پیدا کنیم و $P(m)$ را کنترل کنیم و بعد $P(k)$ و $P(k+1)$ را بنویسیم و از $P(k)$ به $P(k+1)$ برسیم (این جایش مثل قبل است). دقت کنید که $k \ge m$ است و ممکن است در نظر داشتن این رابطه به اثبات کمک کند.

به m، پایه‌ی استقرا گفته می‌شود.

در کتاب درسی روابط $\underset{(n\ge 7)}{n! > 3^n}$، $\underset{(n\ge 5)}{2^n > n^2}$ و $\underset{(n\ge 4)}{n! > 2^n}$ با استقرای تعمیم‌یافته بررسی شده‌اند. هم‌چنین با استقرای تعمیم‌یافته در مورد مجموع زوایا و تعداد قطرهای n ضلعی $(n \ge 3)$ روابط $(n-2)\times 180^\circ$ و $\frac{n(n-3)}{2}$ را می‌توانیم ثابت کنیم.

این نمونه‌ی تشریحی را ببینید:

$P(n): 2^n > n^2$

$P(5): 2^5 > 5^2 \Rightarrow 32 > 25$ درست است

فرض $P(k): 2^k > k^2$

حکم $P(k+1): 2^{k+1} > (k+1)^2$

اثبات: $\xrightarrow{P(k)\times 2} 2(2^k) > 2k^2 \Rightarrow 2^{k+1} > 2k^2$

حالا باید به $2^{k+1} > (k+1)^2$ برسیم، پس کافی است $2k^2 > (k+1)^2$ باشد که این نامساوی برای $k \ge 5$ بدیهی است:

$2k^2 > k^2 + 2k + 1 \Leftrightarrow k^2 - 2k > 1 \Leftrightarrow k(k-2) > 1 \xrightarrow{k\ge 5}$ بدیهی است

پس داریم: $2^{k+1} > 2k^2 \xrightarrow{2k^2 > (k+1)^2} 2^{k+1} > (k+1)^2$

و به حکم مورد نظر می‌رسیم.

در تست کنکور ممکن است محل شروع اثبات استقرای تعمیم‌یافته، یعنی m سؤال شود. کافی است با سعی و خطا از کم‌ترین گزینه شروع کنیم.

قطعاً حفظ‌کردن مقادیر زیر مفید است:

$0! = 1$			
$1! = 1$	$2! = 2$	$3! = 6$	$4! = 24$
$5! = 120$	$6! = 720$	$7! = 5040$	$8! = 40320$
$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 4^2 = 16$	$2^5 = 32$
$2^6 = 4^3 = 8^2 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 4^4 = 256$	$2^9 = 8^3 = 512$
$2^{10} = 4^5 = 1024$	$2^{11} = 2048$	$2^{12} = 4^6 = 8^4 = 4096$	$2^{13} = 8192$
$3^4 = 81$	$3^5 = 243$	$3^6 = 729$	$6^3 = 216$
$6^4 = 1296$	$7^3 = 343$	$7^4 = 2401$	

سؤالات تستی استقرا استقرا یک روش نسبتاً طولانی در اثبات‌های تشریحی است. در تست‌های جدید کنکور، به‌خصوص از سال ۹۰ به بعد (و البته در کنکور خارج از کشور سال‌های قبل از آن) یک مدل جدید از سؤال استقرا داریم. سؤال این است که در اثبات یک حکم مثل $P(n)$، از کدام نامساوی بدیهی (یا کدام رابطه‌ی بدیهی) استفاده می‌شود؟ روش پیداکردن رابطه‌ی مورد نظر را یاد می‌گیریم:

برای پیداکردن رابطه‌ی مورد نظر باید $P(k)$ و $P(k+1)$ یعنی فرض و حکم را بنویسید و سپس حکم را منهای فرض کنید یا حکم را بر فرض تقسیم کنید تا رابطه‌ی مورد نظر را ببینید. این هم مثال‌هایش:

$$1\times 2 + 2\times 3 + \cdots + n(n+1) \le \frac{(n+1)^2(n+2)}{3}$$

فرض − حکم : رابطه‌ی بدیهی

$$\left.\begin{aligned} &P(k+1): 1\times 2 + 2\times 3 + \cdots + k(k+1) + (k+1)(k+2) \le \frac{(k+2)^2(k+3)}{3} \\ &P(k): 1\times 2 + 2\times 3 + \cdots + k(k+1) \le \frac{(k+1)^2(k+2)}{3} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{تفریق}} (k+1)(k+2) \le \frac{(k+2)^2(k+3)}{3} - \frac{(k+1)^2(k+2)}{3}$$

$\xrightarrow[\text{و در ۳ ضرب کنیم}]{\text{k+۲ها را بزنیم}} 3(k+1) \le \underbrace{(k+2)(k+3)}_{k^2+5k+6} - \underbrace{(k+1)^2}_{k^2+2k+1} \Rightarrow 3k+3 \le 3k+5$ که بدیهی است

$2^{n^2} > n!$

$\frac{\text{حکم}}{\text{فرض}}$: رابطه‌ی بدیهی

$\left.\begin{array}{l} P(k+1): 2^{(k+1)^2} > (k+1)! \\ P(k): 2^{k^2} > k! \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{2^{(k+1)^2}}{2^{k^2}} > \frac{(k+1)!}{k!} \Rightarrow 2^{(k+1)^2-k^2} > k+1 \Rightarrow 2^{2k+1} > k+1$ که بدیهی است

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۲- در اثبات تساوی $1\times2+2\times5+\cdots+n(3n-1)=n^2(n+1)$ به روش استقرا، طرفین فرض را با کدام عبارت جمع می‌کنیم؟ *(نهایی ۹۱)*

۱) $3k^2+5k+2$ ۲) $3k^2+4k-3$ ۳) $3k^2+2k-1$ ۴) $3k^2+5k+1$

۱۳- در اثبات نامساوی زیر به کمک استقرای ریاضی، حکم استقرا کدام است؟ *(تمرین صفحه‌ی ۱۴ کتاب درسی)*

$1+2+3+\cdots+n<\frac{1}{8}(2n+1)^2$

۱) $1+2+3+\cdots+k<\frac{1}{8}(2k+1)^2$ ۲) $1+2+3+\cdots+(k+1)<\frac{1}{8}(2k+2)^2$

۳) $1+2+\cdots+k+1<\frac{1}{8}(2k+3)^2$ ۴) $1+2+3+\cdots+k<\frac{1}{8}(2k+2)^2$

۱۴- عدد $4^{2n}-1$ به ازای هر عدد طبیعی n، همواره بر کدام‌یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است؟ *(تمرین صفحه‌ی ۱۲ کتاب درسی)*

۱) ۲ ۲) ۱۳ ۳) ۵ ۴) ۷

۱۵- حاصل عبارت $(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})\cdots(1-\frac{1}{n^2})$ به ازای $n\ge2$، برابر کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟

۱) $\frac{n+1}{2n}$ ۲) $\frac{n-1}{2n-2}$ ۳) $\frac{2n+1}{4n}$ ۴) $\frac{2n-2}{4n-3}$

۱۶- 3^n+4 به ازای تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از m، اول است. بزرگ‌ترین مقدار m کدام است؟ *(نهایی ۹۰)*

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۷- حاصل عبارت $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$ کدام است؟ *(تمرین صفحه‌ی ۱۵ کتاب درسی)*

۱) $\frac{n}{2n+1}$ ۲) $\frac{n}{n+1}$ ۳) $\frac{n}{n-1}$ ۴) $\frac{n-1}{n}$

۱۸- عبارت $6^n+20n+49$ برابر کدام‌یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟ $(n\in\mathbb{N})$

۱) ۷۹۲۵ ۲) ۹۶۱۰ ۳) ۱۰۳۱۰ ۴) ۹۲۳۵

۱۹- حکم $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\frac{5n}{12}$ برای اعداد طبیعی $n\ge m$ درست است. کوچک‌ترین مقدار m کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۰- در اثبات نامساوی $n!>3^n$، پایه‌ی استقرا کدام عدد است؟ *(مثال صفحه‌ی ۱۳ کتاب درسی)*

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۸

۲۱- در اصل استقرای تعمیم‌یافته برای حکم $4^n<(n+1)!$ ، $(n\ge m)$، عدد طبیعی مناسب m کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۲- برای هر کدام از گزینه‌های زیر، عدد طبیعی m وجود دارد که به ازای همه‌ی اعداد طبیعی بزرگ‌تر مساوی m، نامساوی برقرار است. m در کدام گزینه کوچک‌تر است؟ *(تمرین صفحه‌ی ۱۵ کتاب درسی)*

۱) $2^n>n^2$ ۲) $2^n<n!$

۳) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}<\frac{n}{2}$ ۴) $n!>3^n$

۲۳- در اثبات کدام‌یک از نامساوی‌های زیر، باید از استقرای تعمیم‌یافته استفاده کنیم؟

۱) $1+2+3+\cdots+n \le \frac{1}{8}(2n+1)^2$ ۲) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \le n+1$

۳) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2} \le \frac{2n}{n+1}$ ۴) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2} < 2-\frac{1}{n}$

۲۴- اگر P_n نمایانگر nاُمین عدد اول باشد و نامساوی $P_n > 2n+1$ به ازای $n \ge m$ برقرار شود، کوچک‌ترین مقدار m کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۲۵- در اثبات $2^n > n^2; n \ge 5$ با روش استقرای ریاضی، کدام نامساوی بدیهی به کار می‌رود؟ *(خارج از کشور ۸۶)*

۱) $k^2 > k$ ۲) $2k-1 > 5$ ۳) $(k-1)^2 > 2$ ۴) $(k+1)^2 > 2$

۲۶- در اثبات نامساوی $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2^n-1} < \frac{n}{2}; (n \ge 3)$ با کمک استقرای تعمیم‌یافته، از کدام نامساوی بدیهی استفاده شده است؟

۱) $2^k > k$ ۲) $2^{k+1} > 2$ ۳) $2^{k+1} > 3$ ۴) $2^k > k^2-1$ *(خارج از کشور ۹۱)*

۲۷- در اثبات نامساوی $1+2+3+\cdots+n < \frac{1}{8}(2n+1)^2; n \ge 1$، با کمک استقرای ریاضی، کدام رابطه‌ی بدیهی به کار می‌رود؟ *(سراسری ۹۰)*

۱) $k+1 < 2k$ ۲) $k+1 < 2k+3$

۳) $4(k^2+3k+2) < (2k+3)^2$ ۴) $4k^2+12k+9 = (2k+3)^2$

۲۸- در اثبات نامساوی مقابل به کمک استقرای ریاضی، حکم بدیهی در انتهای اثبات کدام است؟ $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} \le 2-\frac{1}{n}$

۱) $\frac{-1}{k(k+1)^2} \le 0$ ۲) $2-\frac{1}{k+1} \le 0$ ۳) $\frac{1}{(k+1)^2} \ge 0$ ۴) $\frac{-1}{k(k+1)} \le 0$

۲۹- حاصل عبارت $10^2+11^2+\cdots+20^2$ کدام است؟

۱) ۲۴۷۰ ۲) ۲۸۷۰ ۳) ۲۵۵۵ ۴) ۲۵۸۵

۳۰- اگر مجموع مکعب‌های اعداد طبیعی متوالی با شروع از ۱، برابر با مربع مجموع آن اعداد باشد، حاصل $10^3+12^3+14^3+\cdots+30^3$ کدام است؟ *(سراسری ۹۱)*

۱) ۱۱۴۱۰۰ ۲) ۱۱۴۲۰۰ ۳) ۱۱۴۳۰۰ ۴) ۱۱۴۴۰۰

۳۱- مجموع n عدد فرد متوالی با شروع از عدد یک، کدام عدد <u>نمی‌تواند</u> باشد؟

۱) ۱۰۸۹ ۲) ۳۲۴۹ ۳) ۱۰۲۴ ۴) ۲۸۴۰

۳۲- دنباله‌ای به صورت $1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,\ldots$ تعریف شده است. حاصل مجموع ۴۵ جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

۱) ۲۸۵ ۲) ۳۸۵ ۳) ۲۱۲۹۵ ۴) ۳۱۳۹۵

۳۳- حاصل عبارت $\frac{1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+10\times11}{1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2}$ کدام است؟ *(تمرین صفحه‌ی ۱۴ کتاب درسی)*

۱) $\frac{11}{10}$ ۲) $\frac{10}{11}$ ۳) $\frac{8}{7}$ ۴) $\frac{7}{8}$

استدلال استنتاجی، مثال نقض

استدلال استنتاجی همان اثبات ریاضی است؛ یعنی از فرض شروع می‌کنیم و با طی مراحل ریاضی درست، به حکم می‌رسیم. نتایج این روش استدلالی، همواره درست هستند. در این روش، نتیجه‌گیری کلی ما بر مبنای حقایقی است که درستی آن‌ها را از قبل پذیرفته‌ایم. در استدلال استنتاجی باید فرض صورت سؤال را به زبان ریاضی بیان کنیم. این‌ها را ببینید:

الف) مثلاً یک عدد زوج را $2k$ و عدد زوج دیگر را باید $2k'$ بگیریم. حالا دو عدد زوج متوالی $2k$ و $2k+2$ هستند.

ب) یک عدد فرد $2k+1$ است، عدد فرد دیگر $2k'+1$ است و دو عدد فرد متوالی $2k+1$ و $2k+3$ هستند.

ج) اگر n مضرب ۳ باشد و مضرب ۶ نباشد، حتماً n مضرب فرد ۳ است؛ پس داریم: $n = 3\times(2k+1) = 6k+3$

استدلال استنتاجی در کنکور قابل پرسش نیست اما حتماً مدل گزاره‌هایی را که با استدلال استنتاجی ثابت شده‌اند، به خاطر بسپارید.

مثال ثابت کنید مربع هر عدد فرد به صورت $8q+1$ است.

پاسخ عدد فرد $= 2k+1 \xrightarrow{\text{مربع}} (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 4k(k+1)+1$

حالا ضرب $k(k+1)$، حتماً زوج است؛ پس داریم: $(2k+1)^2 = 4\underbrace{k(k+1)}_{2q}+1 = 4(2q)+1 = 8q+1$

پس مربع هر عدد صحیح فرد، از مضرب ۸، یک واحد بیشتر است.

در مسیر استدلال از این ویژگی استفاده کردیم که ضرب دو عدد صحیح متوالی حتماً زوج است. در حالت کلی ضرب r عدد صحیح متوالی مضرب $r!$ است (پس مثلاً ضرب ۳ عدد صحیح متوالی، مضرب $3!$ یعنی ۶ است).

از این‌که مربع هر عدد صحیح فرد به صورت $8k+1$ است، نتیجه می‌شود اگر x و y دو عدد صحیح فرد باشند، همواره x^2-y^2 بر ۸ بخش‌پذیر است. (این در سراسری ۹۰ مورد سؤال بوده!)

مثال ثابت کنید جمع دو عدد گویا، گویا است.

پاسخ دو عدد گویا: $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \xrightarrow{\text{مجموع}} \frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} = \frac{e}{f}$ عدد گویا

مثال ثابت کنید اگر x مضرب ۳ باشد، $x(x-3)$ مضرب ۱۸ است.

پاسخ چون x مضرب ۳ است، می‌نویسیم $x = 3k$؛ پس داریم: $x(x-3) = 3k(3k-3) = 3k(3(k-1)) = 9k(k-1)$

حالا چون $k(k-1)$ ضرب دو عدد صحیح متوالی است، پس حتماً زوج است: $x(x-3) = 9\underbrace{k(k-1)}_{\text{زوج}=2q} = 9(2q) = 18q$

پس $x(x-3)$ مضرب ۱۸ است.

قضایای کلی احکامی که همیشه درست باشند قضیه‌ی کلی هستند. مثلاً رابطه‌ی فیثاغورس یا قضیه‌ی نامساوی مثلث یا $\sin^2 x+\cos^2 x = 1$ قضیه‌های کلی هستند.

مثال نقض بعضی از گزاره‌ها درست‌اند و بعضی از گزاره‌های دیگر، نادرست‌اند. مثلاً گزاره‌ی «هر عدد اول دورقمی، فرد است» درست است اما گزاره‌ی «مربع هر عدد مثبت از خودش بیشتر است» نادرست است. بهترین راه (و احتمالاً تنها راه!) برای نشان‌دادن نادرستی یک گزاره، آوردن یک مثال است. این مثال باید نشان دهد که آن نتیجه‌گیری کلی نیست و رد می‌شود. چنین مثالی را «مثال نقض» می‌نامیم. پس مثال نقض نشان می‌دهد یک نتیجه‌گیری کلی، نادرست است.

در کتاب درسی، برای احکام زیر مثال نقض خواسته شده است:

الف) اگر x گنگ و y گویا باشد، xy گنگ است. مثال نقض این حکم $x=\sqrt{2}$ و $y=0$ می‌تواند باشد که ضرب آن‌ها گویا است.

ب) همیشه ارتفاع مثلث درون آن است. مثال نقض، مثلثی با زاویه‌ی منفرجه است که دو ارتفاع آن بیرونش هستند.

ج) توان دوم یک عدد همیشه از آن بیشتر است. مثال نقض، اعداد بین ۰ و ۱ هستند که توان دوم آن‌ها از خودشان کم‌تر است.

د) اگر $x > 1$، آن‌گاه $x > 2$. مثال نقض، اعداد بین ۱ و ۲ هستند.

هـ) اگر $ab = ۰$، آن‌گاه $a = ۰$ و $b = ۰$. مثال نقض، $a = ۰$ و $b = ۱$ است. (در واقع کافی است که a یا b صفر باشند، نه هر دو.)

و) هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع ۳ مربع کامل نوشت. مثال نقض این حکم اعداد $۸k + ۷$ هستند. مثلاً ۷ یا ۱۵ یا ... را نمی‌توان به صورت جمع ۳ مربع کامل درآورد.

ز) هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت جمع اعداد طبیعی متوالی نوشت. مثال نقض این حکم اعداد ۲^n هستند.

این مثال نقض اخیراً دو بار در کنکور آمده است. پس دوباره تأکید کنیم:

اعداد ۲، ۴، ۸، ۱۶، ۳۲، ۶۴ و ... یعنی ۲^nها را نمی‌توان به صورت جمع اعداد طبیعی متوالی نوشت.

ح) جمع دو عدد گنگ، گنگ است. مثال نقض این حکم می‌تواند $\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}$ باشد که جمع آن‌ها گویا است.

در حالت کلی اگر y و x هر دو گنگ باشند، در مورد گنگ‌بودن اعداد $x - y$، xy، $\frac{x}{y}$، $\log_y x$، x^y و ... هیچ حکمی نمی‌توان داد. تمام این اعداد می‌توانند گویا بشوند. مثلاً برای $x = \sqrt{۲}$ و $y = \sqrt{۲}$، مقادیر $x - y$، xy، $\frac{x}{y}$ و $\log_y x$ گویا می‌شوند. برای x^y هم $x = \sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ و $y = \sqrt{۲}$ مثال نقض هستند: $x^y = (\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}})^{\sqrt{۲}} = ۲$

چند مثال دیگر هم ببینید.

مثال **آیا حکم «اگر $n^۲$ مضرب ۱۲ باشد، n هم مضرب ۱۲ است»، درست است؟**

پاسخ اولاً دقت کنید که بحث مضرب‌بودن درباره‌ی اعداد صحیح مطرح است، پس اصلاً ذهنتان به طرف $\sqrt{۱۲}$ و ... نرود. این حکم درست نیست. با کمی دقت $n = ۶$ را پیدا می‌کنیم که $n^۲$ مضرب ۱۲ است اما n مضرب ۱۲ نیست.

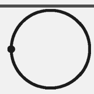
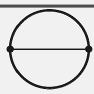
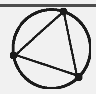
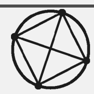
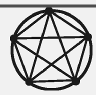
مثال **اگر n عدد طبیعی باشد، آیا $۴^n + ۳$ همواره اول است؟**

هیچ گزاره‌ای به شکل «... همواره اول است» درست نیست. در سطح دبیرستان اصلاً عبارتی که همواره اول باشد وجود ندارد.

پس این گزاره نادرست است و دنبال مثال نقض می‌گردیم. $۴^۱ + ۳$، $۴^۲ + ۳$، $۴^۳ + ۳$ و $۴^۴ + ۳$ همگی اول‌اند اما $۴^۵ + ۳$ می‌شود ۱۰۲۷ که اول نیست و به ۱۳ می‌خورد؛ پس به ازای $n = ۵$ نقض شد.

مثال **اگر n نقطه روی محیط دایره در نظر بگیریم و آن‌ها را دوبه‌دو به هم وصل کنیم، تعداد نواحی با توجه به $n = ۱,۲,۳,۴,۵$ برابر $۲^{n-۱}$ است. آیا این حکم درست است؟**

پاسخ

شکل					
تعداد نقطه	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد نواحی	۱	۲	۴	۸	۱۶

مثال نقض این حکم از $n = ۶$ به بعد است. یعنی برای ۶ نقطه، به جای $۳۲ = ۲^{۶-۱}$ ناحیه، ۳۱ ناحیه داریم و حکم رد می‌شود.

به کسی یاد ندهید که تعداد نواحی همواره $۱ + \binom{n}{۲} + \binom{n}{۴}$ است؛ پس مثلاً برای ۷ تا نقطه، $۵۷ = ۱ + \binom{۷}{۴} + \binom{۷}{۲}$ ناحیه داریم.

مثال **اگر α عددی گنگ باشد، آیا $\alpha^۲ - ۳\alpha$ همواره گنگ است؟**

پاسخ معمولاً بچه‌ها در مورد اعداد گنگ به سرعت سراغ $\sqrt{۲}$ و ... می‌روند. در این‌جا کمی دقت لازم است ...

اول مربع کامل بسازیم: $(\alpha^۲ - ۳\alpha) = (\alpha - \frac{۳}{۲})^۲ - \frac{۹}{۴}$

حالا واضح است که حکم مثلاً برای $\alpha = \frac{۳}{۲} + \sqrt{۲}$ نقض می‌شود.

اگر خیلی نکته دوست دارید، حفظ کنید که اگر x عددی گنگ باشد، حاصل $\frac{ax + b}{cx + d}$ به شرطی که $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ باشد، همواره گنگ است (a، b، c و d اعداد صحیح هستند و a یا c غیرصفرند).

قضیه‌ی شرطی و عکس آن در گزاره‌های شرطی، یک فرض و یک حکم داریم؛ یعنی عبارت به صورت «اگر ... باشد، آن‌گاه ... است» بیان می‌شود. قسمت اول فرض قضیه و قسمت دوم حکم آن است. مثلاً اگر $\underbrace{x\ \text{مضرب ۳ باشد}}_{\text{فرض قضیه}}$، آن‌گاه $\underbrace{x^{۲}\ \text{مضرب ۹ است}}_{\text{حکم قضیه}}$.

به زبان ریاضی می‌نویسیم $P \Rightarrow Q$ و می‌خوانیم «اگر P باشد، آن‌گاه Q هست». P را مقدمه و Q را نتیجه یا تالی می‌نامند. حالا اگر جای حکم و فرض را عوض کنیم، عکس یک گزاره‌ی شرطی به دست می‌آید. مثلاً «اگر $x^{۲}$ مضرب ۹ باشد، آن‌گاه x مضرب ۳ است» عکس گزاره‌ی بالاست.

ممکن است یک گزاره‌ی شرطی درست یا نادرست باشد و عکس آن هم می‌تواند درست یا نادرست باشد؛ مثلاً:

الف) گزاره‌ی «اگر x زوج باشد، آن‌گاه $x^{۲}$ مضرب ۴ است» درست است و عکس آن یعنی «اگر $x^{۲}$ مضرب ۴ باشد، آن‌گاه x زوج است» نیز درست است.

ب) گزاره‌ی «اگر $x > ۰$ باشد، آن‌گاه $x^{۲} > ۰$ است» درست است اما عکس آن «اگر $x^{۲} > ۰$ باشد، آن‌گاه $x > ۰$ است» درست نیست. (برای xهای منفی نقض می‌شود.)

ج) گزاره‌ی «اگر عددی مضرب ۳ و ۵ باشد، یکانش ۵ است» نادرست است و عکس آن «اگر یکان عددی ۵ باشد، آن‌گاه مضرب ۳ و ۵ است» نیز نادرست است. در خود قضیه عدد ۳۰ و در عکس آن عدد ۲۵ مثال نقض هستند.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۳۴- علی، احمد، کامران، داوود و ابراهیم عضو تیم بسکتبال مدرسه‌ی خود هستند. با توجه به شرایط زیر، کدام‌یک از آن‌ها از بقیه بلندتر است؟

الف) حداقل دو نفر از آن‌ها از علی کوتاه‌تر هستند. **ب) داوود از کامران کوتاه‌تر است.** *(تمرین صفحه‌ی ۲۶ کتاب درسی)*

پ) احمد کوتاه‌ترین پسر نیست. **ت) داوود از علی بلندتر است.**

۱) علی ۲) احمد ۳) کامران ۴) ابراهیم

۳۵- اگر x یک عدد صحیح سه‌رقمی و مضرب ۳ باشد، $x(x+۳)$ همواره مضربی از کدام عدد است؟ *(نهایی ۹۱)*

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۳۶- m و n دو عدد صحیح هستند. اگر $m+n$ بر ۷ و $m-n$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد، کدام عدد زیر همواره بر ۲۱ بخش‌پذیر است؟

۱) $(m+n)^{۲}$ ۲) $m^{۲}+n^{۲}$ ۳) $(m-n)^{۲}$ ۴) $m^{۲}-n^{۲}$

۳۷- چندتا از عبارات زیر درست است؟ *(نهایی ۹۱)*

الف) اگر a و b دو عدد صحیح فرد هر دو مضربی از ۵ باشند، آن‌گاه مجموع آن‌ها مضرب ۱۰ است.

ب) اگر a یک عددحقیقی و $a^{۲} > ۰$، آن‌گاه $a > ۰$ است.

پ) اگر a، b و c اعداد طبیعی باشند، آن‌گاه $b\sqrt{ac}$ یک عدد گنگ است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۸- اگر α و β هر دو گویا بوده و عدد $\frac{\alpha(\sqrt{۲}+۱)}{\sqrt{۲}-۱}-\frac{\beta(\sqrt{۲}-۱)}{\sqrt{۲}+۱}$ نیز گویا باشد، در این صورت:

۱) $\alpha-\beta=۰$ ۲) $\alpha+\beta=۰$ ۳) $\alpha\beta=۱$ ۴) $\alpha\beta=-۱$

۳۹- کدام عدد کلیت حکم «رقم یکان هر عددی که به پنج و سه قابل قسمت باشد، صفر است» را نقض می‌کند؟

۱) ۱۱۵ ۲) ۱۲۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۲۲۵

۴۰- کدام‌یک از گزینه‌های زیر، مثال نقضی برای حدس کلی «ارتفاع‌های هر مثلث در نقطه‌ای داخل یا خارج مثلث همرس‌اند.» می‌باشد؟

۱) مثلث حاده‌الزاویه ۲) مثلث متساوی‌الساقین ۳) مثلث قائم‌الزاویه ۴) مثلث منفرجه‌الزاویه

۴۱- کدام مورد یک مثال نقض برای حکم «حاصل‌ضرب هر دو ماتریس مخالف صفر، ماتریس مخالف صفر است»، نیست؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

۴۲- اعداد کدام گزینه کلیت حکم «حاصل‌ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است» را نقض می‌کند؟

۱) $\sqrt{۶}$ و $\sqrt{۲۱۶}$ ۲) $\sqrt{۶}$ و $\sqrt{۱۲}$ ۳) $\sqrt{۲۱۶}$ و $\sqrt{۱۸}$ ۴) $\sqrt{۱۶}$ و $\sqrt{۲۵}$

۴۳- اگر x عددی گنگ باشد، کدام عدد لزوماً گنگ است؟ ([ ] نماد جزءصحیح است.)

۱) $[x+۲]$ ۲) $(|x|+۳)^{۲}$ ۳) $x^{۲}+۲x$ ۴) $\frac{۲x+۱}{x-۱}$

۴۴- چندتا از عبارات زیر، مثال نقض دارند؟ *(تمرین صفحه‌ی ۲۷ کتاب درسی)*

الف) توان دوم یک عدد همیشه از آن بزرگ‌تر است. **ب) مجموع دو زاویه‌ی حاده کم‌تر از ۱۸۰° است.**

ج) همیشه ارتفاع یک مثلث داخل آن قرار می‌گیرد. **د) هر مستطیل یک مربع است.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۵- کدام گزینه‌ی زیر، مثال نقض دارد؟ *(سراسری ۸۰)*

۱) هر مربع یک لوزی است. ۲) هر عدد اول و بزرگ‌تر از ۲ فرد است.

۳) هر مثلث متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین است. ۴) توان دوم هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از توان سوم آن است.

۴۶- کدام‌یک از اعداد زیر را نمی‌توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۴۷- کدام عدد حکمیت «هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت» را نقض می‌کند؟ *(خارج از کشور ۸۸)*

۱) ۴۰ ۲) ۴۶ ۳) ۵۶ ۴) ۶۴

۴۸- نامساوی $n! < ۳^n$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی چند مثال نقض دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۴۹- کدام‌یک از اعداد زیر را نمی‌توان به صورت مجموع سه مربع کامل نوشت؟ *(تمرین صفحه‌ی ۲۷ کتاب درسی)*

۱) ۵۹ ۲) ۶۱ ۳) ۷۹ ۴) ۸۹

۵۰- «اگر n نقطه‌ی اختیاری روی محیط دایره انتخاب کرده و n ضلعی حاصل و قطرهای آن را رسم کنیم، دایره به $۲^{n-۱}$ ناحیه تقسیم می‌شود.»

کدام گزینه حدس بالا را نقض می‌کند؟ *(مثال صفحه‌ی ۲۱ کتاب درسی)*

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۳

۵۱- اگر α و β گنگ و C عددی گویا باشد، حاصل کدام گزینه همواره عددی گنگ است؟

۱) $\alpha - C\beta$ ۲) $\alpha + C$ ۳) $C\beta$ ۴) $\sqrt{\alpha}+\beta$

۵۲- کدام گزینه مثال نقض برای گزاره‌ی زیر است؟

«اگر x و y دو عدد گنگ بوده و $x+y$ گویا باشد، حتماً x قرینه‌ی y بوده است.»

۱) $x=\sqrt{۳}$ و $y=-\sqrt{۳}$ ۲) $x=\sqrt{۳}$ و $y=\sqrt{۲}$

۳) $x=\sqrt{۲}-۱$ و $y=\sqrt{۲}+۱$ ۴) $x=\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۵}}$ و $y=\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۵}}$

۵۳- اگر α و β دو عدد گنگ باشند، کدام همواره درست است؟

۱) α^{β} عددی گنگ است. ۲) $\alpha+\beta$ عددی گنگ است. ۳) $\sqrt[۳]{\alpha}-\sqrt{\beta}$ عددی گنگ است. ۴) $\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}+\beta$ ممکن است گویا باشد.

۵۴- فرض کنید a عددی گنگ باشد. کدام‌یک از گزاره‌های زیر لزوماً درست است؟

۱) دست‌کم یکی از $a^۳$ و $a^۴-۱$ گنگ است. ۲) دست‌کم یکی از $a^۳-۱$ و $a^۶$ گنگ است.

۳) دست‌کم یکی از $a^۲$، $a^۳$ و $a^۵$ گویا است. ۴) حداکثر یکی از $a^۳+۱$ و $a^۴$ گنگ است.

۵۵- کدام‌یک از حکم‌های زیر، یک قضیه‌ی کلی است؟

۱) هر عدد اول، فرد است. ۲) هر لوزی یک مربع است.

۳) هر مستطیل یک لوزی است. ۴) هر مثلث متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین است.

۵۶- عکس کدام‌یک از قضایای زیر، یک قضیه نیست؟

۱) در مثلث قائم‌الزاویه عمودمنصف اضلاع، بر روی وتر، متقاطع هستند. ۲) در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع و میانه‌ی یک ضلع، بر هم منطبق هستند.

۳) در مثلث قائم‌الزاویه یکی از میانه‌ها نصف وتر است. ۴) در هر مثلث، ضلع مقابل به زاویه‌ی ۹۰°، بزرگ‌ترین ضلع است.

۵۷- کدام‌یک از گزینه‌های زیر، یک قضیه‌ی دوشرطی است؟ *(تمرین صفحه‌ی ۲۷ کتاب درسی)*

۱) اگر $x>۲$، آن‌گاه $x>۱$.

۲) اگر $(x-۱)^۲=۰$، آن‌گاه $x=۱$.

۳) اگر $ab=۰$، آن‌گاه $a=۰$ و $b=۰$.

۴) حاصل‌ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربع‌های آن‌هاست.

استدلال بازگشتی

برای اثبات استنتاجی نامساوی‌ها در اعداد حقیقی و یا برای اثبات برخی احکام در مورد مجموعه‌ها، از خود حکم شروع می‌کنند. (قرار بود از فرض شروع کنیم و به حکم برسیم!) ماجرا از این قرار است که چون نمی‌دانیم از چه فرضی باید شروع کنیم تا به حکم برسیم، از خود حکم شروع کرده و با مراحل استنتاجی به یک رابطه‌ی درست یا بدیهی یا فرض قضیه می‌رسیم. البته این اثبات‌ها کامل نیستند و برای تکمیل اثبات باید نشان دهیم که تمام مراحل طی‌شده بازگشت‌پذیر هستند. در کتاب درسی، دو مثال و تمرین مهم به روش استدلال بازگشتی اثبات می‌شوند:

الف) میانگین حسابی هر دو عدد مثبت، بیشتر یا مساوی واسطه‌ی هندسی آن‌ها است: $\dfrac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$

ب) حاصل‌ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن‌ها است: $\dfrac{x^2+y^2}{2} \ge xy$

البته در واقع این دو گزاره یکسان‌اند! (چرا؟)

حالا چه کارهایی در اثبات ممکن است انجام بدهیم که بازگشت‌پذیر نیستند؟ مهم‌ترین اعمال بازگشت‌ناپذیر عبارت‌اند از:

الف) به توان ۲ رساندن طرفین تساوی یا نامساوی

ب) جمع دوتا تساوی با هم

از کودکستان! هم می‌دانید که اگر بخواهیم عبارتی را از دو طرف ساده کنیم، باید مطمئن باشیم آن عبارت صفر نیست.

در امتحان نهایی، معمولاً باید یک نامساوی را اثبات کرد. شما از خود حکم شروع کنید و فلش‌ها را به صورت $\Leftrightarrow$ بزنید؛ به این معنی که تمام مراحل بازگشت‌پذیر هستند. باید تمام عبارت‌ها را به یک طرف بیاورید و یک یا چند اتحاد نوع اول (مربع کامل) بسازید. حواستان باشد که حق استفاده از روش‌های حسابان یا دستور Δ را ندارید!

چندتا اثبات بازگشتی ببینید:

الف) $ab<0 \Rightarrow \dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} \le -2$

اثبات: $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} \le -2 \xleftrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \dfrac{a^2+b^2}{ab} \le -2 \xleftrightarrow[\text{جهت عوض می‌شود}]{\text{در } ab \text{ ضرب می‌کنیم}} a^2+b^2 \ge -2ab$

$\xleftrightarrow{\text{همه به طرف چپ}} a^2+b^2+2ab \ge 0 \Leftrightarrow (a+b)^2 \ge 0$ رابطه درست است

ب) $a\,,\,b>0 \Rightarrow a^4+b^4 \ge a^3b+ab^3$

$\xleftrightarrow{\text{همه به طرف چپ}} a^4-a^3b+b^4-ab^3 \ge 0$

$\xleftrightarrow[\text{فاکتور}]{a \text{ و } b \text{ مثبت هستند}} a^3(a-b)+b^3(b-a) \ge 0 \xleftrightarrow{\text{از } (a-b) \text{ فاکتور}} (a^3-b^3)(a-b) \ge 0$

$\xleftrightarrow{\text{تجزیه}} (a-b)(a^2+ab+b^2)(a-b) \ge 0 \Leftrightarrow \underbrace{(a-b)^2}_{\text{مثبت یا صفر}}\underbrace{(a^2+ab+b^2)}_{\text{مثبت}} \ge 0$ رابطه درست است

ج) $a,b>0 \Rightarrow \dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2} \ge \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

$\xleftrightarrow{\text{همه به طرف چپ}} \dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}-\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b} \ge 0 \xleftrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \dfrac{a^3+b^3-ab^2-a^2b}{a^2b^2} \ge 0$

$\xleftrightarrow{\text{فاکتور}} \dfrac{a^2(a-b)+b^2(b-a)}{a^2b^2} \ge 0 \xleftrightarrow[\text{از } (a-b)]{\text{فاکتور}} \dfrac{(a-b)(a^2-b^2)}{a^2b^2} \ge 0$

$\xleftrightarrow{\text{مزدوج}} \dfrac{(a-b)(a-b)(a+b)}{a^2b^2} = \dfrac{(a-b)^2(a+b)}{a^2b^2} \ge 0$ چون a و b مثبت‌اند، این رابطه درست است.

د) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}} \ge \dfrac{4}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \qquad a,b>0$

در طرف چپ مخرج‌مشترک می‌گیریم: $\dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{b}} \ge \dfrac{4}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \xleftrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{در } \sqrt{a}+\sqrt{b}} \dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}} \ge 4$

$\xleftrightarrow[\text{و مخرج‌مشترک می‌گیریم}]{\text{۴ را به طرف چپ می‌بریم}} \dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-4\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}} \ge 0$ رابطه درست است

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۵۸- فائزه برای اثبات ۶ = ۴ از این روش استفاده کرده است:

الف) ۴ = ۶

ب) ۶ = ۴

ج) «الف» و «ب» **با جمع طرفین** $۴+۶=۶+۴ \Rightarrow ۱۰=۱۰$ **همواره درست است**

نتیجه‌گیری فائزه غلط است، زیرا:

۱) از استدلال استقرایی استفاده کرده است.
۲) از استدلال قیاسی استفاده کرده است.
۳) برای حل سؤال، مثال زده است.
۴) مراحل اثبات بازگشت‌ناپذیرند.

۵۹- در اثبات نامساوی زیر به کمک استدلال بازگشتی، به کدام حکم بدیهی زیر می‌رسیم؟ *(نهایی ۹۱)*

$$a^۲+b^۲+c^۲+۳\ge ۲(a+b+c)$$

۱) $a^۲+b^۲+c^۲\ge ۰$
۲) $(a+۱)^۲+(b+۱)^۲+(c+۱)^۲\ge ۰$
۳) $a^۲+b^۲+c^۲+۳\ge ۰$
۴) $(a-۱)^۲+(b-۱)^۲+(c-۱)^۲\ge ۰$

۶۰- گر a و b دو عدد حقیقی باشند که $a+b>۰$، آن‌گاه در اثبات رابطه‌ی مقابل به کمک استدلال بازگشتی، به کدام نامساوی بدیهی زیر می‌رسیم؟ $\dfrac{a^۳+b^۳}{a+b}\ge ab$

۱) $a^۲+b^۲\ge ۰$
۲) $(a+b)^۲\ge ۰$
۳) $(a-۱)^۲+(b-۱)^۲\ge ۰$
۴) $(a-b)^۲\ge ۰$
(نهایی ۹۰)

۶۱- در اثبات نامساوی $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\le -۲$ به روش بازگشتی، شرط برقراری نامساوی و رابطه‌ی بدیهی که در آخر به آن می‌رسیم، به‌ترتیب کدام‌اند؟ *(نهایی ۹۱)*

۱) a و b منفی باشند، $(a+b)^۲\ge ۰$
۲) $ab<۰$ باشد، $(a+b)^۲\ge ۰$
۳) a و b منفی باشند، $(a-b)^۲\ge ۰$
۴) $ab<۰$ باشد، $(a-b)^۲\ge ۰$

۶۲- در اثبات نامساوی $(۱+\sqrt{۳})^n\ge ۱+n\sqrt{۳}$ به کمک .... به نامساوی بدیهی .... می‌رسیم. *(نهایی ۹۱)*

۱) استقرای تعمیم‌یافته، $k\ge ۰$
۲) بازگشتی، $۳k^۲\ge ۰$
۳) استقرای ریاضی، $۳k\ge ۰$
۴) بازگشتی، $\sqrt{k}\ge ۰$

برهان خلف

برهان خلف یک روش اثبات غیرمستقیم است، یعنی به جای این‌که ثابت کنیم خود حکم درست است، نشان می‌دهیم خلاف حکم نمی‌تواند درست باشد؛ پس خود حکم درست است. مراحل اثبات برهان خلف به این ترتیب است:

ابتدا فرض می‌کنیم حکم درست نباشد (به قول قدیمی‌ها «فرض خلف» می‌کنیم یا «نقیض حکم» را در نظر می‌گیریم.) مثلاً اگر بخواهیم ثابت کنیم: عددی گنگ است؛ عددی به ۳ می‌خورد؛ فقط یک خط وجود دارد و یا عددی فرد است، باید به ترتیب فرض کنیم: آن عدد گویاست؛ به ۳ نمی‌خورد؛ بیش از یک خط وجود دارد و یا این‌که آن عدد زوج است. سپس با استدلال استنتاجی ثابت می‌کنیم که با این فرض به تناقض می‌رسیم (تناقض با داده‌های مسئله یا با اطلاعات و اصول ریاضی). حالا که به تناقض رسیده‌ایم، معلوم می‌شود فرض اولیه غلط است؛ پس حکم باید درست باشد.

چه‌طور به تناقض می‌رسیم؟ مثلاً اگر فرض سؤال این است که: $n^۲$ به ۳ می‌خورد؛ $\sqrt{۳}$ گنگ است؛ $n^۲$ فرد است و یا a و b عامل مشترکی ندارند، ما بعد از فرض خلف به این نتایج خواهیم رسید: $n^۲$ به ۳ نمی‌خورد؛ $\sqrt{۳}$ گویا است؛ $n^۲$ زوج است و یا این‌که a و b عامل مشترک دارند.

گاهی هم با اصول خودمان به مشکل می‌خوریم، مثلاً مثلث با دو زاویه‌ی قائمه وجود ندارد! دو خط موازی یکدیگر را قطع نمی‌کنند و ... .

در مثال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی، برای این احکام از برهان خلف استفاده شده است:

الف) $\sqrt{۲}$ گنگ است. ($\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ نیز در تمرین‌ها هست!)

ب) اگر $n^۲$ فرد (یا زوج) باشد، عدد صحیح n نیز فرد (یا زوج) است.

ج) اگر $n^۲$ مضرب ۳ (یا ۱۰) باشد، n نیز مضرب ۳ (یا ۱۰) است.

د) از نقطه‌ای خارج یک خط، فقط یک خط بر آن عمود می‌شود (در صفحه).

ه) دو خط موازی با یک خط، با هم موازی‌اند.

و) اگر x گویا و y گنگ باشد، $x+y$ گنگ است.

ز) عدد $N+۱$ ، $N=۲\times۳\times\cdots\times p$ (حاصل‌ضرب تمام اعداد اول کوچک‌تر یا مساوی p را با ۱ جمع کنیم) یا اول است یا عامل اول بزرگ‌تر از p دارد.

چند نمونه از اثبات‌های نهایی را هم ببینید:

مثال **با برهان خلف ثابت کنید $\sqrt{۳}$ گنگ است.**

پاسخ **اثبات:** فرض می‌کنیم $\sqrt{۳}$ گویا است، پس $\sqrt{۳}=\frac{a}{b}$ و کسر $\frac{a}{b}$ تا حد امکان ساده شده است یا به قول ریاضی‌دان‌ها $(a,b)=۱$ است (ب‌م‌م a و b برابر با ۱ است)؛ حالا داریم:

$$\sqrt{۳}=\frac{a}{b} \Rightarrow ۳=\frac{a^۲}{b^۲} \Rightarrow a^۲=۳b^۲$$

پس $a^۲$ مضرب ۳ است؛ بنابراین a هم مضرب ۳ است و داریم:

$$\xrightarrow{a=۳k} (۳k)^۲=۳b^۲ \Rightarrow ۹k^۲=۳b^۲ \Rightarrow b^۲=۳k^۲$$

این یعنی $b^۲$ هم مضرب ۳ است و در نتیجه b نیز مضرب ۳ است اما این نتیجه با فرض $(a,b)=۱$ در تناقض است؛ پس فرض اولیه نادرست و $\sqrt{۳}$ گنگ است.

مثال **اگر $n^۲$ مضرب ۵ باشد، n نیز مضرب ۵ است.**

پاسخ **برهان خلف:** فرض کنیم n مضرب ۵ نیست؛ پس باقی‌مانده‌ی تقسیم n بر ۵ یکی از اعداد ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ است و داریم:

$$n=۵k+۱ \Rightarrow n^۲=۲۵k^۲+۱۰k+۱=۵q+۱ \quad , \quad n=۵k+۲ \Rightarrow n^۲=۲۵k^۲+۲۰k+۴=۵q+۴$$

$$n=۵k+۳ \Rightarrow n^۲=۲۵k^۲+۳۰k+\underbrace{۹}_{۵+۴}=۵q+۴ \quad , \quad n=۵k+۴ \Rightarrow n^۲=۲۵k^۲+۴۰k+\underbrace{۱۶}_{۱۵+۱}=۵q+۱$$

همان‌طور که می‌بینید، $n^۲$ مضرب ۵ نیست اما فرض سؤال این بود که $n^۲$ مضرب ۵ باشد؛ پس به تناقض رسیده‌ایم و این یعنی فرض اولیه نادرست بوده و n مضرب ۵ است.

مثال **اگر n عدد طبیعی و $۷n-۵$ زوج باشد، n فرد است.**

پاسخ **برهان خلف:** فرض کنیم n زوج است؛ پس $n=۲k$ و داریم:

$$۷n-۵=۷(۲k)-۵=۱۴k-۵=\underbrace{۱۴k-۶}_{۲(۷k-۳)}+۱=۲k'+۱=\text{عدد فرد}$$

با این فرض، $۷n-۵$ عددی فرد می‌شود. اما فرض سؤال این بود که $۷n-۵$ زوج است؛ پس به تناقض رسیدیم و n فرد است.

مثال **اگر $\sqrt{۳}$ عددی گنگ باشد، ثابت کنید $\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۳}}$ نیز گنگ است.**

پاسخ **برهان خلف**: فرض کنیم $\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۳}}$ گویا است؛ پس داریم:

$$\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۳}}=\frac{a}{b}\xrightarrow{\text{به‌توان ۳}}۲+\sqrt{۳}=\frac{a^۳}{b^۳}\Rightarrow\sqrt{۳}=\frac{a^۳}{b^۳}-۲=\frac{a^۳-۲b^۳}{b^۳}$$

عبارت $\frac{a^۳-۲b^۳}{b^۳}$ گویا است اما $\sqrt{۳}$ گنگ است؛ پس تساوی آخر تناقض دارد و این یعنی فرض اول ما غلط بوده و $\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۳}}$ نمی‌تواند گویا باشد (گنگ است).

دو مثال زیر را با هم مقایسه کنید.

مثال **می‌دانیم $\sqrt{۶}$ گنگ است. ثابت کنید $۲\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$ نیز گنگ است.**

پاسخ **برهان خلف**: فرض کنیم $۲\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$ گویا است:

$$۲\sqrt{۲}-\sqrt{۳}=\frac{p}{q}$$

باید به چه تناقضی برسیم؟ فرض سؤال درباره‌ی $\sqrt{۶}$ بود ...

$$\xrightarrow{\text{به‌توان ۲}}(۲\sqrt{۲}-\sqrt{۳})^۲=(\frac{p}{q})^۲\Rightarrow ۸+۳-۴\sqrt{۶}=\frac{p^۲}{q^۲}\Rightarrow\frac{۱۱-\frac{p^۲}{q^۲}}{۴}=\sqrt{۶}$$

این تساوی آخر تناقض است. چون عبارت سمت چپ گویا و $\sqrt{۶}$ (طبق فرض سؤال) گنگ است؛ پس فرض اولیه نادرست است و $۲\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$ گنگ است.

مثال **می‌دانیم $\sqrt{۲}$ گنگ است. ثابت کنید $۲\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ گنگ است.**

پاسخ **برهان خلف**: فرض کنیم $۲\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ گویا است:

$$۲\sqrt{۳}-\sqrt{۲}=\frac{p}{q}$$

این بار باید به چه تناقضی برسیم؟ فرض سؤال درباره‌ی $\sqrt{۲}$ است؛ پس باید $\sqrt{۲}$ بماند و $\sqrt{۳}$ از بین برود.

$$۲\sqrt{۳}=\sqrt{۲}+\frac{p}{q}\xrightarrow{\text{به‌توان ۲}}(۲\sqrt{۳})^۲=(\sqrt{۲}+\frac{p}{q})^۲\Rightarrow ۴\times۳=۲+\frac{p^۲}{q^۲}+۲\sqrt{۲}\frac{p}{q}\Rightarrow ۱۰-\frac{p^۲}{q^۲}=۲\frac{p}{q}\sqrt{۲}\Rightarrow\underbrace{\sqrt{۲}}_{\text{گنگ}}=\frac{۱۰-\frac{p^۲}{q^۲}}{\underbrace{۲\frac{p}{q}}_{\text{گویا}}}$$

عبارت آخر تناقض است؛ پس فرض اولیه درست نیست و $۲\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ گنگ است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۶۳- در اثبات به کمک برهان خلف ....

۱) ثابت می‌کنیم که نمی‌شود فرض قضیه نادرست باشد.
۲) ثابت می‌کنیم که نمی‌شود چیزی به‌جز حکم درست باشد.
۳) ثابت می‌کنیم که نمی‌شود عکس حکم درست نباشد.
۴) ثابت می‌کنیم که می‌شود حکم درست باشد.

۶۴- برای اثبات حکم زیر به کمک برهان خلف، فرض خلف کدام است؟ *(تمرین صفحه‌ی ۳۰ کتاب درسی)*

«اگر سه خط راست d، d' و d'' دوبه‌دو متمایز باشند و نیز $d \parallel d'$ و $d' \parallel d''$، آن‌گاه $d \parallel d''$.»

۱) $d \parallel d'$ و $d' \parallel d''$
۲) $d \parallel d''$
۳) $d \nparallel d''$
۴) $d \nparallel d'$

۶۵- در اثبات حکم زیر به روش برهان خلف، به کدام تناقض زیر می‌رسیم؟ *(تمرین صفحه‌ی ۳۰ کتاب درسی)*

«حاصل‌ضرب تمام اعداد اول کوچک‌تر یا مساوی P به اضافه‌ی یک، یا اول است و یا عامل اول بزرگ‌تر از P دارد.»

۱) یک مضرب یکی از اعداد اول است.
۲) تعداد عددهای اول متناهی است.
۳) $۳<۵$
۴) ضرب اعداد اول، اول است.

۶۶- اثبات کدام قضیه‌ی زیر احتیاج به استدلال به روش برهان خلف ندارد؟ *(سراسری ۸۶)*

۱) عدد $\sqrt{۵}$ گنگ است.
۲) از یک نقطه فقط یک خط موازی خط مفروض می‌توان رسم کرد.
۳) در یک صفحه از نقطه‌ی مفروض فقط یک خط می‌توان بر خط مفروض عمود کرد.
۴) مربع هر عدد طبیعی فرد، از مضرب ۸ یک واحد بیشتر است.

۶۷- در اثبات عکس قضیه‌ی لولا به کمک برهان خلف، با کدام‌یک از مفاهیم زیر به تناقض می‌رسیم؟

۱) فرض قضیه
۲) اصول بدیهی ریاضی
۳) اصول هندسه
۴) نتایج قضایای دیگر هندسه

اصل لانه‌کبوتری

اگر تعداد افراد از تعداد حالت‌های ممکن بیشتر باشد، حداقل ۲ نفر باید حالت یکسانی داشته باشند. این بیان ساده‌ی اصل لانه‌کبوتری است که آن را اصل کشوی دیریکله یا اصل حجره‌ها نیز می‌نامند.

پس مثلاً اگر ۱۳نفر داشته باشیم (چون ۱۲ماه بیشتر نداریم) حداقل دوتا از آن‌ها باید متولد یک ماه باشند. هم‌چنین اگر ۴۰ تا عدد صحیح داریم (چون باقی‌مانده‌ی اعداد بر ۳۶، فقط ۳۶ حالت دارد) حداقل دوتا از آن‌ها باید بر ۳۶ باقی‌مانده‌ی یکسان داشته باشند.

بیان رسمی اصل لانه‌کبوتری: اگر m کبوتر، n لانه را اشغال کنند و $m > n$ باشد، حداقل یک لانه وجود دارد که در آن دست‌کم دو کبوتر باشند. اصل لانه‌کبوتری از نظر شهودی بدیهی است اما می‌توان آن را با برهان خلف ثابت کرد.

خیلی دقت کنید که در اصل لانه‌کبوتری، فقط تضمین می‌شود که در «یک لانه» بیش از یک کبوتر باشد اما معلوم نیست کدام لانه؛ یعنی هیچ تضمینی وجود ندارد که در یک لانه‌ی خاص، حتی ۱ کبوتر باشد. مثلاً در بین ۱۳ نفر، نمی‌توان مطمئن بود که حتی یک نفر متولد فروردین باشد.

چند مدل مسئله‌ی اصل لانه‌کبوتری داریم:

۱ در ساده‌ترین مسائل باید ثابت کنیم حداقل دو عضو، حالت یکسانی دارند. برای حل باید تعداد کبوترها (m) و تعداد لانه‌ها (n) را معرفی کنیم (قطعاً $m > n$ است) سپس با اصل لانه‌کبوتری کار تمام می‌شود.

در این مسائل اگر چند ویژگی مختلف افراد مطرح شده باشد، تعداد لانه‌ها با اصل ضرب به دست می‌آید.

پس در بین ۳۴ نفر؛ ۲۰ عدد صحیح؛ ۱۵ دانش‌آموز، حداقل ۲ تا وجود دارند که به ترتیب حرف اول نام آن‌ها؛ باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۱۷؛ ماه تولد آن‌ها یکسان باشد، چون ۳۴ نفر و ۳۲ حرف داریم؛ ۲۰ عدد و ۱۷ باقی‌مانده داریم؛ ۱۵ دانش‌آموز و ۱۲ ماه داریم.

مثال حداقل چند نفر در یک مهمانی باید باشند تا مطمئن باشیم در بین آن‌ها دو نفر وجود دارند که حرف اول نام و ماه تولد و جنسیت یکسان دارند؟

پاسخ حرف اول نام ۳۲ حالت، ماه تولد ۱۲حالت و جنسیت ۲ حالت دارد. پس طبق اصل ضرب $۳۲\times۱۲\times۲ = ۷۶۸$ حالت مختلف (لانه) داریم؛ بنابراین طبق اصل لانه‌کبوتری باید $m > ۷۶۸$ باشد. یعنی حداقل ۷۶۹ نفر لازم است.

مثال حداقل چند نقطه‌ی (x, y) با مختصات صحیح برداریم تا مطمئن باشیم مختصات وسط دوتا از این نقاط نیز عدد صحیح است؟

این قبلاً سؤال المپیاد بود اما در سراسری خارج از کشور۸۹ و سراسری۹۲ آمد! ماجرا از این قرار است که باید دوتا نقطه‌ی (x_1, y_1) و (x_2, y_2) طوری باشند که $\frac{x_1 + x_2}{2}$ و $\frac{y_1 + y_2}{2}$ اعداد صحیح شوند؛ پس هم $x_1 + x_2$ و هم $y_1 + y_2$ زوج‌اند، یعنی x_1 و x_2 باید هر دو زوج یا هر دو فرد و نیز y_1 و y_2 باید هر دو زوج یا هر دو فرد باشند و در نتیجه مختصات دو نقطه، از نظر زوج یا فرد بودن مختص‌های متناظر، مثل هم است. حالا برای این‌که مختص‌های متناظر دو نقطه از لحاظ زوج یا فرد بودن مثل هم باشند، طبق اصل لانه‌کبوتری باید تعداد نقاط از تعداد حالت‌ها بیشتر باشد.

هر نقطه از نظر زوج یا فرد بودن مختص‌ها، ۴ حالت دارد:

$\underset{\text{فرد یا زوج}}{x}\ ,\ \underset{\text{فرد یا زوج}}{y}\ :\ ۲\times۲ = ۴$

پس وجود حداقل ۵ نقطه لازم است. سخت بود!

مثال حداقل چند عدد طبیعی متمایز داشته باشیم تا مطمئن باشیم حداقل ۲ تا از آن‌ها رقم یکان یکسان و باقی‌مانده‌ی یکسان بر ۷ دارند؟

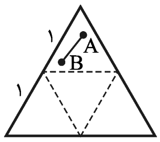
این فعلاً به درس شما مربوط نمی‌شود که رقم یکان عدد ربطی به باقی‌مانده‌ی آن بر ۷ ندارد، پس الآن با خیال راحت می‌گوییم ده حالت برای یکان و ۷ حالت $\{۰, ۱, ۲, \ldots, ۶\}$ برای باقی‌مانده بر ۷ داریم؛ یعنی $۷۰ = ۷\times۱۰$ لانه داریم و بنابراین باید حداقل ۷۱ عدد طبیعی داشته باشیم.

۲ در مسائل هندسی اصل لانه‌کبوتری، تعدادی نقطه درون یک سطح یا حجم داریم و باید آن سطح یا حجم را طوری قسمت‌بندی کنیم که از تعداد نقاط کم‌تر باشد. بعد طبق اصل لانه‌کبوتری نتیجه بگیریم حداقل دوتا از نقطه‌ها در یک قسمت قرار می‌گیرند و فاصله‌ی آن‌ها از عدد خاصی کم‌تر است. (تا حالا در کنکور از این‌ها سؤال نیامده است.)

این «عدد خاص» در قسمت‌های مربع و مستطیل‌شکل، برابر قطر آن‌ها است، در مثلث متساوی‌الاضلاع برابر ضلع و در دایره معمولاً برابر شعاع است.

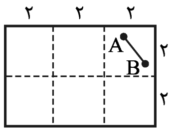
این نمونه‌ها را با دقت دنبال کنید:

الف) درون مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲، پنج نقطه داریم:



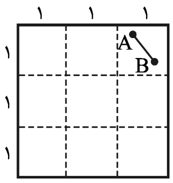
پس سطح مثلث را ۴ قسمت می‌کنیم. چون ۵ نقطه داریم، طبق اصل لانه‌کبوتری حداقل ۲ نقطه در یک ناحیه می‌افتند و فاصله‌ی آن‌ها از ضلع مثلث کوچک یعنی ۱ کم‌تر است. $\Rightarrow \boxed{AB < ۱}$

ب) درون مستطیل به ابعاد ۶×۴، هفت نقطه داریم:



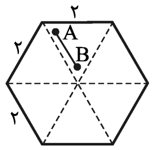
پس سطح مستطیل را ۶ قسمت می‌کنیم. با ۷ نقطه طبق اصل لانه‌کبوتری مطمئن هستیم ۲ نقطه در یک قسمت‌اند و فاصله‌ی آن‌ها از قطر مربع کوچک، کم‌تر است. $\Rightarrow \boxed{AB < ۲\sqrt{۲}}$

ج) درون مربع به ضلع ۳، یازده نقطه داریم:



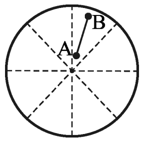
بنابراین سطح مربع را ۹ قسمت می‌کنیم. چون ۱۱ نقطه داریم (۹ < ۱۱) طبق اصل لانه‌کبوتری حداقل ۲ نقطه هم‌ناحیه هستند و فاصله‌ی آن‌ها از قطر مربع کوچک، کم‌تر است. $\Rightarrow \boxed{AB < \sqrt{۲}}$

د) درون شش‌ضلعی منتظم به ضلع ۲، هفت نقطه داریم:



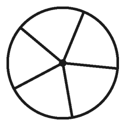
سطح شش‌ضلعی را به ۶ مثلث تفکیک می‌کنیم. حداقل دوتا از ۷ نقطه در یک مثلث‌اند و در نتیجه: $\Rightarrow \boxed{AB < ۲}$

هـ) درون دایره به شعاع R، ۹ نقطه داریم:



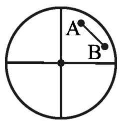
اگر سطح دایره را ۸ قسمت کنیم، چون ۹ تا نقطه داریم حداقل دوتا از آن‌ها در یک قطاع دایره قرار می‌گیرند و فاصله‌ی آن‌ها از شعاع دایره کم‌تر است: $\Rightarrow \boxed{AB < R}$

در مورد دایره دقت کنید که اگر تعداد نواحی کم‌تر از ۶ تا باشد، حداکثر فاصله‌ی دو نقطه R نیست:



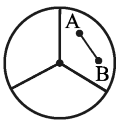
پنج قسمت

$AB < ۲R\sin ۳۶^\circ$



چهار قسمت

$AB < R\sqrt{۲}$

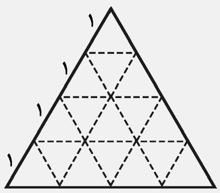


سه قسمت

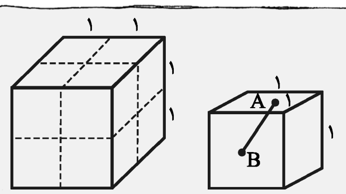
$AB < R\sqrt{۳}$

مثال **درون مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴، حداقل چند نقطه برداریم تا مطمئن باشیم فاصله‌ی دوتا از آن‌ها از ۱ کم‌تر است؟**

پاسخ چون فاصله‌ی دوتا از نقاط کم‌تر از ۱ است، پس باید دو نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ باشند و بنابراین سطح شکل را به مثلث‌های متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ تقسیم می‌کنیم؛ پس ۱۶ ناحیه داریم و باید حداقل ۱۷ نقطه برداریم.



مثال **درون مکعبی به ضلع ۲، نُه نقطه داریم. فاصله‌ی دوتا از نقاط حتماً از چه عددی کم‌تر است؟**



پاسخ چون نُه نقطه داریم، حجم مکعب را هشت قسمت می‌کنیم و ۸ تا مکعب به ابعاد ۱ داریم که حداقل در یکی از آن‌ها دوتا نقطه هست و فاصله‌ی آن‌ها از قطر مکعب یعنی $\sqrt{۳}$ کم‌تر است: $AB < \sqrt{۳}$

مسائل تعمیم اصل لانه‌کبوتری تا این‌جا به کمک اصل لانه‌کبوتری نشان می‌دادیم «حداقل ۲ عضو» در یک لانه هستند. حالا اگر سؤال بخواهد ثابت کنیم که حداقل ۳ عضو یا بیشتر در یک لانه قرار می‌گیرند، از تعمیم اصل لانه‌کبوتری می‌رویم. ماجرا این‌طوری است:

اگر m کبوتر در n لانه قرار بگیرند و $m > k \times n$ باشد (k عددی طبیعی است)، آن‌گاه در حداقل یک لانه، دست‌کم $k+۱$ کبوتر وجود دارد.

k خارج‌قسمت تقسیم تعداد کبوتر بر لانه است. البته اگر باقی‌مانده‌ی این تقسیم صفر بود، فقط می‌گوییم در حداقل یک لانه، k کبوتر داریم. پس دو حالت داریم:

الف) اگر $m = kn$ باشد، یعنی تعداد کبوترها دقیقاً k برابر لانه‌ها است (باقی‌مانده‌ی تقسیم صفر است) و آن‌گاه در حداقل یک لانه دست‌کم k کبوتر وجود دارد.

ب) اگر $m = kn + \underset{r\neq 0}{r}$ باشد، یعنی در تقسیم تعداد کبوتر بر لانه، باقی‌مانده هم داریم و آن‌گاه در حداقل یک لانه دست‌کم $k+1$ کبوتر وجود دارد.

پس مثلاً در بین ۸۰ نفر
۵۰ عدد صحیح
۴۹ دانش‌آموز چون $۸۰ > ۲\times۳۲$
$۵۰ > ۳\times۱۶$
$۴۹ > ۴\times۱۲$ ، می‌گوییم حداقل ۳ نفر
حداقل ۴ عدد
حداقل ۵ دانش‌آموز دارای حرف اول نام یکسان
باقی‌مانده‌ی یکسان بر ۱۶
ماه تولد یکسان هستند.

مثال **حداقل چند عدد صحیح لازم است تا به یقین دست‌کم ۳ تا از آن‌ها بر ۷ هم‌باقی‌مانده باشند؟**

پاسخ باقی‌مانده‌ی تقسیم بر ۷ دارای ۷ حالت است: $r = ۰,۱,۲,\dots,۶$

پس برای این‌که دست‌کم ۳ تا بر ۷ هم‌باقی‌مانده باشند باید $m > ۲\times۷$ یعنی $m > ۱۴$ باشد؛ پس حداقل ۱۵ عدد صحیح لازم است.

مثال **مردان و زنان ورزشکار در رشته‌های والیبال، هندبال و بسکتبال از تهران، اصفهان، شیراز و مشهد به اردو دعوت شده‌اند. حداقل چند نفر باشند تا مطمئن باشیم در بین آن‌ها حداقل ۵ نفر هم‌رشته، هم‌جنس و همشهری وجود دارد؟**

پاسخ ۲ حالت برای جنسیت، ۳ ورزش و ۴ شهر داریم، پس $n = ۲\times۳\times۴ = ۲۴$ لانه وجود دارد. برای این‌که حداقل ۵ نفر در یک لانه باشند، باید $m > ۴\times۲۴$ باشد یعنی حداقل ۹۷ نفر.

مثال **۶۵ عدد صحیح متمایز را بر ۲۱ تقسیم می‌کنیم. تعداد عضوهای هم‌باقی‌مانده چگونه است؟**

پاسخ با $m = ۶۵$ عدد و $n = ۲۱$ حالت باقی‌مانده، داریم:

$$\begin{array}{r|l} ۶۵ & ۲۱ \\ \cline{2-2} ۶۳ & ۳ \\ \cline{1-1} ۲ & \end{array}$$

پس $۲۱\times۳ < ۶۵$ و بنابراین حداقل $۳+۱=۴$ عضو هم‌باقی‌مانده داریم.

مسائل بدترین حالت (استراتژی آقای همساده!): در برخی مسائل می‌پرسند: «حداقل چند عضو از یک مجموعه (یا چند مهره از کیسه) باید برداریم تا اطمینان داشته باشیم که در بین اعضای انتخاب‌شده، ویژگی خاصی وجود دارد؟» در این مسائل خودتان را (موقتاً) به جای بدشانس‌ترین آدم دنیا بگذارید ... مثلاً آقای همساده در سریال کلاه‌قرمزی! یعنی بدترین حالت ممکن را در نظر بگیرید که اتفاق مورد نظر ـ تا حد ممکن ـ دیر رخ دهد.

مثال **از مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,\dots,۱۸\}$ حداقل چند عضو انتخاب شود تا مطمئن باشیم:**

الف) در بین اعداد انتخابی مضرب ۳ هست.

در بدترین حالت، مضارب ۳ در انتها انتخاب می‌شوند یعنی اول ۱,۲,۴,۵,۷,۸,۱۰,۱۱,۱۳,۱۴,۱۶,۱۷ خارج می‌شوند (۱۲ تا عدد) و سپس در عدد سیزدهم به مضرب ۳ می‌رسیم؛ پس حداقل ۱۳ تا عضو باید انتخاب شود.

ب) در بین اعداد انتخابی عدد اول هست.

اگر بدشانس باشیم تمام عددهای غیراول را برمی‌داریم: ۱,۴,۶,۸,۹,۱۰,۱۲,۱۴,۱۵,۱۶,۱۸

یعنی ۱۱ عدد و سپس در عدد دوازدهم، اولین عدد اول درمی‌آید؛ پس حداقل ۱۲ عضو باید برداشت.

ج) در بین اعداد انتخابی دو عدد با مجموع ۱۷ است. (این در سراسری ۹۲ خارج از کشور سؤال بوده)

گروه‌های مجموع ۱۷ عبارت‌اند از: (۸,۹)، (۷,۱۰)، (۶,۱۱)، (۵,۱۲)، (۴,۱۳)، (۳,۱۴)، (۲,۱۵)، (۱,۱۶)

در بدترین حالت اول از هر گروه فقط یک عضو برمی‌داریم، ۱۷ و ۱۸ را هم انتخاب می‌کنیم. ۱۰ تا عضو داریم و هنوز ۲ عدد با مجموع ۱۷ نداریم؛ پس انتخاب حداقل ۱۱ عدد ضروری است.

د) در بین اعداد انتخابی دو عدد هست که نسبت به هم اول نباشند.

اگر بخت یاری نکند، تا حد امکان اعدادی انتخاب می‌شوند که نسبت به هم اول‌اند.

این هم در سراسری ۸۹ و هم در سراسری ۹۳ آمده است؛ پس دقت بیشتری می‌طلبد!

در بدترین حالت، ۱,۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷ را انتخاب می‌کنیم و سپس در عدد نهم دو عدد خواهیم داشت که نسبت به هم اول نباشند.

بعضی‌ها به خاطر می‌سپارند که اگر از مجموعه‌ی $\{1,2,3,\ldots,2n\}$ زیرمجموعه‌ای با $n+1$ عضو برداریم، قطعاً در بین اعضای انتخابی:

۱ دو عضو با مجموع $2n+1$ هست؛ ۲ دو عضو متوالی هست؛ ۳ دو عدد هست که یکی بر دیگری بخش‌پذیر باشد.

یک مثال هم با انتخاب مهره‌ها می‌بینیم: (مانند سراسری خارج از کشور ۹۱)

مثال از کیسه‌ای شامل ۳ مهره‌ی سفید، ۴ مهره‌ی قرمز، ۵ مهره‌ی سبز و ۷ مهره‌ی آبی حداقل چند مهره برداریم تا با اطمینان در بین مهره‌های انتخابی:

الف) حداقل یک مهره‌ی قرمز باشد.

در بدشانس‌ترین حالت، اول تمام مهره‌های سفید، سبز و آبی انتخاب می‌شوند ($15 = 7 + 5 + 3$) سپس در مهره‌ی شانزدهم به مهره‌ی قرمز می‌رسیم.

ب) حداقل دو مهره‌ی هم‌رنگ باشد.

در بدترین حالت، اول از هر رنگ یک مهره برمی‌داریم و سپس در مهره‌ی پنجم، به دو مهره‌ی هم‌رنگ می‌رسیم.

ج) حداقل ۵ مهره‌ی هم‌رنگ باشد.

در بدترین حالت، اول از هر رنگ ۴ مهره برمی‌داریم. البته ۴ تا سفید نداریم و ۳ تا برمی‌داریم، پس $3+4+4+4$ یعنی ۱۵ مهره برداشته‌ایم و هنوز ۵ مهره‌ی هم‌رنگ نداریم اما در مهره‌ی شانزدهم قطعا حداقل ۵ تا هم‌رنگ داریم.

د) حداقل یکی از هر رنگ باشد.

در بدترین حالت، مهره‌ی سفید (که از همه کم‌تر است) در آخر بیرون می‌آید؛ یعنی همه‌ی سبزها، آبی‌ها و قرمزها انتخاب می‌شوند ($4+7+5=16$مهره) و سپس در مهره‌ی ۱۷اُم سفید بیرون می‌آید و از هر مهره یک رنگ خواهیم داشت.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۶۸- در یک کلاس ۳۰ نفری، حداقل چند دانش‌آموز در یک روز هفته متولد شده‌اند؟ *(نهایی ۹۲)*

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۶۹- مدرسه‌ای ۶۰۱ دانش‌آموز دارد. حداقل چند نفر از آن‌ها ماه تولدشان یکسان است؟ *(نهایی ۹۱)*

۱) ۵۱ ۲) ۵۲ ۳) ۴۹ ۴) ۵۰

۷۰- در یک کلاس ۵۴ نفری، دست‌کم چند نفر دارای ماه تولد یکسان هستند؟ *(سراسری ۸۳)*

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۷۱- در یک کلاس ۲۹ نفره، حداقل چند نفر در روز شنبه به دنیا آمده‌اند؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) صفر

۷۲- آمار نشان می‌دهد که تعداد تارهای موی سر افراد از ۳۰۰۰۰۰ کم‌تر است. در یک شهر، حداقل چند نفر ساکن باشند، می‌توان مطمئن بود که حداقل ۲ نفر از شهروندان تعداد تارهای مویشان با هم مساوی است؟ *(تمرین صفحه‌ی ۳۳ کتاب درسی)*

۱) ۳۰۰۰۰۰ ۲) ۶۰۰۰۰۰ ۳) ۳۰۰۰۰۱ ۴) ۶۰۰۰۰۱

۷۳- ۶۵ کبوتر در حداکثر چند لانه‌ی کبوتر قرار بگیرند تا حداقل در یک لانه بیش از دو کبوتر قرار داشته باشد؟ *(سراسری ۸۱)*

۱) ۳۱ ۲) ۳۲ ۳) ۳۳ ۴) ۳۴

۷۴- کم‌ترین تعداد افرادی که حداقل دو نفر از آن‌ها در یک ماه از سال و در یک روز از هفته متولد شده‌اند، کدام است؟ *(سراسری ۸۲)*

۱) ۷۵ ۲) ۷۸ ۳) ۸۵ ۴) ۸۸

۷۵- ۵۰ عدد طبیعی متمایز را در نظر گرفته و هر یک از این اعداد را بر ۲۴ تقسیم کرده‌ایم. حداقل چندتا از آن‌ها باقی‌مانده‌ی یکسانی بر ۲۴ خواهند داشت؟ *(نهایی ۹۱)*

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۷۶- مجموعه‌ی S دارای ۵۰ عضو از اعداد طبیعی است. در تقسیم عضوهای S بر ۱۲ حداقل چند عضو، باقی‌مانده‌ی یکسان دارند؟ *(سراسری ۹۰)*

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۷۷- اگر S یک زیرمجموعه‌ی ۵۰عضوی از اعداد طبیعی باشد، در تقسیم هر یک از اعضای S بر عدد ۱۶، تعداد عضوهای هم‌باقی‌مانده چگونه است؟

۱) درست ۳ عضو ۲) دست‌کم ۳ عضو ۳) کم‌تر از ۴ عضو ۴) دست‌کم ۴ عضو *(خارج از کشور ۸۸)*

۷۸- حداقل چند عدد داشته باشیم تا مطمئناً ۲ تا از آن‌ها هم در تقسیم بر ۷ و هم در تقسیم بر ۵ باقی‌مانده‌ی یکسان داشته باشند؟

۱) ۱۳ ۲) ۳۵ ۳) ۳۶ ۴) ۶۹

۷۹- کتابی ۵۰۰ صفحه دارد و هر صفحه‌اش حداقل ۲۲۰ و حداکثر ۲۴۰ کلمه دارد. حداقل چند صفحه در این کتاب است که تعداد کلمات آن‌ها یکسان باشد؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۳ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

۸۰- در یک آزمون کیفی از دانش‌آموزان رشته‌های ریاضی، تجربی و انسانی، امتیاز آزمون یکی از چهار حالت عالی، خوب، متوسط و ضعیف را می‌تواند داشته باشد. حداقل چند دانش‌آموز انتخاب کنیم تا مطمئناً سه نفر از یک رشته با امتیاز یکسان انتخاب شوند؟

۱) ۱۳ ۲) ۲۴ ۳) ۲۵ ۴) ۸

۸۱- در کدام مجموعه حداقل دو عضو دارای باقی‌مانده‌ی یکسان بر ۱۰ هستند؟

۱) $\{a^{10}, a^{10}+1, \dots, a^{10}+9\}$ ۲) $\{a-9, a-8, \dots, a\}$

۳) $\{a+b, a+b+11, \dots, a+b+99\}$ ۴) $\{a, a+1, \dots, a+10\}$

۸۲- ۵۰ ورزشکار مرد در رشته‌های فوتبال، والیبال و بسکتبال از شهرهای تهران، مشهد، اصفهان و بوشهر در یک اردوی ورزشی شرکت کرده‌اند. حداقل چند ورزشکار هم‌رشته و هم‌شهری هستند؟ *(نوایی ۸۷)*

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۸۳- m عدد به دلخواه از بین اعداد سه‌رقمی انتخاب می‌شوند و مطمئنیم که حداقل ۵ عدد وجود دارد که در تقسیم بر ۱۱، دارای باقی‌مانده‌های یکسان‌اند. حداقل m کدام است؟

۱) ۴۵ ۲) ۵۵ ۳) ۵۶ ۴) ۶۶

۸۴- ۱۰ مهره به رنگ‌های آبی، قرمز و زرد داخل جعبه‌ای قرار دارند. حداقل چند مهره خارج کنیم تا مطمئن باشیم دست‌کم دو مهره‌ی هم‌رنگ خارج شده‌اند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۸۵- کیسه‌ای حاوی ۵ مهره‌ی قرمز، ۸ مهره‌ی آبی، ۱۰ مهره‌ی سفید، ۱۲ مهره‌ی سبز و ۷ مهره‌ی زرد است. دست‌کم چند مهره باید انتخاب کنیم تا مطمئن شویم حداقل ۴ مهره‌ی هم‌رنگ خارج شده است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۳۶

۸۶- در جعبه‌ای ۳ گوی قرمز، ۵ گوی سفید، ۷ گوی آبی و ۹ گوی زرد موجود است. حداقل چند گوی خارج کنیم، تا مطمئن باشیم دست‌کم ۶ گوی خارج‌شده هم‌رنگ باشند؟ *(خارج از کشور ۹۰)*

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

۸۷- در یک کلاس ۴۰ نفری، ۷ نفر نامزد انتخاب مشاوره با امور مدرسه‌اند. انتخاب‌شونده باید رأی بیشتر از سایرین داشته باشد، حداقل رأی انتخاب‌شونده، کدام است؟ *(سراسری ۸۸)*

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۷

۸۸- ۱۴ مسابقه بین ۹ تیم فوتبال انجام شده است. حتماً یک تیم وجود دارد که .... بازی انجام داده است.

۱) حداقل ۴ ۲) حداکثر ۴ ۳) حداقل ۳ ۴) حداکثر ۵

۸۹- حداقل چند زوج مرتب به صورت (a,b)، با مختص‌های اعداد صحیح و مثبت انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم در دو زوج انتخابی، جمع مختص‌های اول و جمع مختص‌های دوم، اعداد زوج هستند؟ *(سراسری ۹۲)*

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۹۰- در فضای سه‌بعدی، حداقل چند نقطه با مختصات صحیح به صورت (x,y,z) انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل در دو نقطه‌ی انتخابی، جمع مختص‌های اول، جمع مختص‌های دوم و جمع مختص‌های سوم، اعداد زوج هستند؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۹۱- حداقل چند عدد لازم است تا مطمئن شویم که جمع ۳ تای آن‌ها بر ۳ بخش‌پذیر است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۱۰

۹۲- حداقل چند عضو از مجموعه‌ی $S=\{1,2,\dots,9\}$ باید برداریم تا مطمئن شویم که بین اعضای انتخابی، دو عضو متمایز وجود دارد که مجموع آن‌ها برابر ۱۰ می‌شود؟ *(نوایی ۹۰)*

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۹۳- هر زیرمجموعه‌ی n عضوی از مجموعه‌ی $A=\{1,2,3,\dots,8\}$، مطمئناً ۲ عضو دارد که تفاضل آن‌ها برابر ۴ است. حداقل n کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶