خشت اول

نگاهی عمیق به کتاب درسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

مؤلف

حسین شفیع‌زاده

انتشارات خوشخوان

فهرست مطالب

۱

دنباله‌ها

۱-۱ مقدمه

۱. دنباله تابعی است با دامنه‌ی اعداد طبیعی و هم‌دامنه‌ی اعداد حقیقی $(a:\mathbb{N}\to\mathbb{R})$.

۲. دنباله‌ی $a(n)$ را به صورت a_n نشان می‌دهیم به آن جمله‌ی nام گوییم.

۳. دنباله‌ی $a_۱, a_۲, \cdots, a_n, \cdots$ را به صورت $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ و یا $\{a_n\}_{n=۱}$ و یا $\{a_n\}$ نشان می‌دهند.

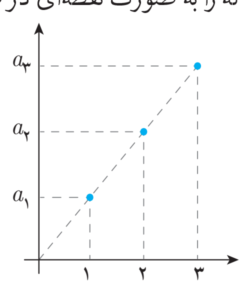
۴. دنباله‌ی $c_n = c$ را دنباله‌ی ثابت می‌نامند $c, c, c, \cdots, c, \cdots$.

۵. دنباله‌ای که تعداد جملات آن محدود است را دنباله‌ی متناهی می‌نامند.

۶. دنباله را به دو صورت نمایش می‌دهند.

۱) **محوری:** در این روش جملات دنباله روی محور اعداد حقیقی با یک نقطه متناظر می‌شود.

۲) **دکارتی:** در این روش جملات دنباله را به صورت نقطه‌ای در صفحه‌ی مختصات نشان می‌دهیم.



۱-۲ همگرایی دنباله‌ها

۷. دنباله‌ی $\{a_n\}$ دارای حد L است هرگاه برای هر عدد $\varepsilon > ۰$ عددی طبیعی مانند M وجود داشته باشد به طوری که برای هر عدد طبیعی n که $n \geq M$ نابرابری $|a_n - L| < \varepsilon$ برقرار باشد.

۸. دنباله‌ی $\{a_n\}$ دارای حد L است را به صورت $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$ می‌نویسند.

۹. دنباله‌ای که دارای حد باشد را همگرا می‌نامیم و در غیر این صورت واگرا می‌نامند.

۱۰. اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ همگرا به L باشد آن‌گاه دنباله‌ی $\{a_{n+k}\}$ نیز همگرا به L است.

۱۱. دنباله‌ی $\{a_n\}$ واگرا به $+\infty$ است هرگاه برای هر عدد مثبت و حقیقی k ، عددی طبیعی مانند M یافت شود به قسمی که هرگاه $n \geq M$ آن‌گاه $a_n > k$. $(\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty)$

۱۲. هرگاه برای هر عدد حقیقی منفی k، عددی طبیعی مانند M یافت شود به قسمی که از رابطه‌ی $n \geq M$ رابطه‌ی $a_n < k$ نتیجه شود آن‌گاه گوییم دنباله‌ی $\{a_n\}$ واگرا به $-\infty$ است. $(\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty)$

۱-۳ دنباله‌های کراندار و یکنوا

۱۳. تابع f را بر A از بالا کراندار می‌نامیم هرگاه عددی حقیقی مانند u یافت شود به طوری که برای هر $x \in A$، $f(x) \leq u$ باشد.

۱٤. دنباله‌ی $\{a_n\}$ از بالا کراندار است هرگاه عددی حقیقی مانند u یافت شود به طوری که برای هر عدد طبیعی n، $a_n \leq u$ باشد.

۱۵. تابع و دنباله‌ی کراندار از پایین به طور مشابه تعریف می‌شود.

۱۶. دنباله‌ی $\{a_n\}$ را کراندار گوییم هرگاه هم از پایین و هم از بالا کراندار باشد. یعنی عددی مثبت مانند u یافت شود به طوری که برای هر n رابطه‌ی $-u \leq a_n \leq u$ برقرار باشد.

۱۷. دنباله‌ی صعودی و نزولی به صورت زیر تعریف می‌شود. هرگاه برای هر عدد طبیعی n:

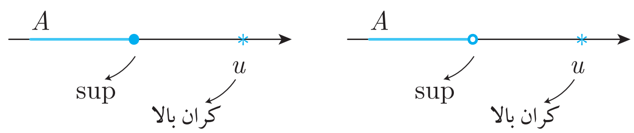
a_n صعودی است	۱) $a_n \leq a_{n+1}$
a_n صعودی اکید است	۲) $a_n < a_{n+1}$
a_n نزولی است	۳) $a_n \geq a_{n+1}$
a_n نزولی اکید است	۴) $a_n > a_{n+1}$

۱۸. دنباله‌ای که یا صعودی است یا نزولی، دنباله‌ی یکنوا نامیده می‌شود.

۱-۴ اصل موضوع تمامیت

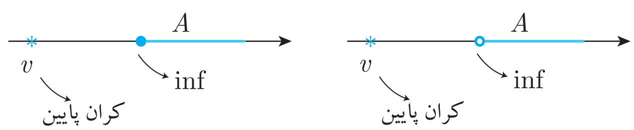
۱۹. عدد حقیقی u را یک کران بالای مجموعه‌ی ناتهی A می‌نامیم هرگاه برای هر $x \in A$، $x \leq u$ باشد.

۲۰. $a \in \mathbb{R}$ را کوچک‌ترین کران بالای A (سوپریموم: sup) نامیم هرگاه a یک کران بالای A بوده و برای هر کران بالای دیگر A مانند u، $a \leq u$ باشد.



۲۱. عدد حقیقی v را یک کران پایین مجموعه‌ی ناتهی A می‌نامیم هرگاه برای هر $x \in A$، $v \leq x$ باشد.

۲۲. $b \in \mathbb{R}$ را بزرگ‌ترین کران پایین A (اینفیموم: inf) نامیم هرگاه b یک کران پایین A بوده و برای هر کران پایین دیگر A مانند v، $v \leq b$ باشد.



۲۳. یک مجموعه‌ی ناتهی از اعداد حقیقی که دارای کران بالا باشد، دارای کوچک‌ترین کران بالا است. (اصل تمامیت)

۲۴. یک مجموعه‌ی ناتهی از اعداد حقیقی که دارای کران پایین باشد، دارای بزرگ‌ترین کران پایین است.

۲۵. هر دنباله‌ی صعودی و از بالا کراندار همگراست و هر دنباله‌ی نزولی و کراندار از پایین همگراست.

۲۶. هر دنباله‌ی همگرا کراندار است.

۲۷. هر عدد حقیقی حد دنباله‌ای از اعداد گویاست.

۲۸. اگر بسط اعشاری عدد گنگ u به صورت $u = u_0/u_1u_2u_3\cdots u_n\cdots$ باشد آن‌گاه دنباله‌ی با جملات گویای زیر به u همگراست.

$$r_1 = u_0/u_1$$

$$r_2 = u_0/u_1u_2$$

$$\vdots$$

$$r_n = u_0/u_1u_2\cdots u_n$$

$$\vdots$$

۱-۵ دنباله‌ی مهم $(1+\frac{1}{n})^n$

۲۹. دنباله‌های $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ و $\{(1-\frac{1}{n})^n\}$ صعودی و دنباله‌ی $\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\}$ نزولی است.

۳۰. دنباله‌ی $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ همگرا به e می‌باشد. عدد نپر e تقریباً برابر ۲٫۷۱۸۳ است.

۳۱. لگاریتمی که پایه‌ی آن e باشد لگاریتم طبیعی نامیده می‌شود $(\ln a = \log_e a)$.

۱-۶ جبر دنباله‌ها

۳۲. اگر دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ همگرا باشند دنباله‌های $\{a_n \pm b_n\}$ ، $\{a_n.b_n\}$ و $\{c.a_n\}$ (c عددی ثابت است) نیز همگرا می‌باشند و اگر $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n \neq 0$ آن‌گاه دنباله‌ی $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ نیز همگراست.

۳۳. فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله‌ی همگرا به L و $a_n \leq c_n \leq b_n$ در این صورت دنباله $\{c_n\}$ نیز همگرا به L است. (قضیه‌ی فشردگی)

۱-۷ مطالب مرتبط با فصل ۱ دیفرانسیل

۳۴. برای محاسبه‌ی حد دنباله‌ی $\{a_n\}$ از قوانین زیر استفاده می‌کنیم

۱. اگر a عددی ثابت باشد آن‌گاه

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} 0 & -1 < a < 1 \\ \infty & |a| > 1 \\ 1 & a = 1 \\ \text{نوسانی} & a = -1 \end{cases}$$

۲. اگر دنباله‌ی a_n همگرا به L باشد آن‌گاه در دنباله‌های بازگشتی برای یافتن حد، به جای a_n، a_{n+1} و ... عدد L را جایگزین می‌کنیم. به طور مثال اگر $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 10}$ آن‌گاه می‌نویسیم

$$L = \sqrt{3L+10} \xrightarrow{L\geq 0} L^2 = 3L + 10 \to L^2 - 3L - 10 = 0 \to L = 5$$

۳. طبق قضیه‌ی پُرتوان داریم

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{an^k + bn^{k-1} + \cdots}{a'n^k + b'n^{k-1} + \cdots} = \frac{a}{a'}$$

۴. در عبارات رادیکالی از رابطه‌ی زیر کمک می‌گیریم

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[k]{an^k + bn^{k-1} + \cdots} \sim \lim_{n\to+\infty} \sqrt[k]{a}(n + \frac{b}{ak})$$

در حالت خاص $\sqrt{an^2 + bn + c} \sim \sqrt{a}(n + \frac{b}{2a})$

۵. سرعت رشد دنباله‌ها به سمت ∞ از چپ به راست زیاد می‌شود.

$$\log_a n < n^k < a^n < n! \qquad (k \geq 1, a > 1)$$

۶. اگر $a > b > 1$ آن‌گاه $\lim_{n\to+\infty}(a^n + b^n) \sim \lim_{n\to+\infty} a^n$

۳۵. برای بررسی یکنوایی یک دنباله می‌توان از مشتق توابع کمک گرفت و یا درستی نامساوی‌های $a_n \leq a_{n+1}$ و یا $a_n \geq a_{n+1}$ را بررسی نمود.

۳۶. در مورد عدد نپر روابط زیر برقرار است.

$$1)\ \lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{k}{n})^{mn} = e^{km}$$

$$2)\ \lim_{x\to a} f(x) = 1\ ,\ \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

$$f(x) \neq 1 \ \Rightarrow\ \lim_{x\to a} f^g = \lim_{x\to a} e^{(f-1)g}$$

۸-۱ تمرینات

۱. برای هر عدد $\varepsilon > ۰$ عددی طبیعی مانند M وجود دارد به طوری که برای هر عدد طبیعی n که $n \geq M$، نابرابری $|a_n - L| < \varepsilon$ برقرار است. در این صورت کدام ممکن است نادرست باشد؟

۱) $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = L$

۲) $\{a_n\}$ کراندار است.

۳) $\{a_n\}$ یکنواست.

۴) $\{a_n\}$ همگراست.

۲. اولین جمله‌ی دنباله‌ی $\{۳ - (\frac{۱}{۲})^n\}$ که در بازه‌ی متقارن ۳ به شعاع ε قرار دارد کدام است؟

۱) $\log_۲ \frac{۱}{\varepsilon}$

۲) $(\log_۲ \frac{۱}{\varepsilon}) + ۱$

۳) $[\log_۲ \frac{۱}{\varepsilon}]$

۴) $[\log_۲ \frac{۱}{\varepsilon}] + ۱$

۳. فرض کنید $\{P_n\}$ یک دنباله‌ی همگرا و $P_{n+۱} = \dfrac{bP_n}{a + P_n}$ که در آن a و b اعدادی ثابت‌اند. حد دنباله‌ی $\{P_n\}$ کدام است؟

۱) ۰ یا $a - b$

۲) ۰ یا $b - a$

۳) $a - b$ یا $b - a$

۴) $a^۲ - b^۲$

٤. در کدام مجموعه‌ی زیر، کوچک‌ترین کران بالای آن متعلق به خود مجموعه است؟

۱) $\{x \in \mathbb{Z} | x^۲ < ۲۵۰\}$

۲) $\{x \in \mathbb{Q} | x^۲ < ۵\}$

۳) (a, b)

۴) $[a, b)$

۵. دنباله‌ی $\{a_n\}$ با فرض $a_۱ = ۱$ و $a_{n+۱} = \sqrt{۷ + a_n}$ چگونه است؟

۱) همگرا به ۲

۲) همگرا به $\dfrac{۱ + ۲\sqrt{۲}}{۲}$

۳) همگرا به $\dfrac{\sqrt{۲۹} + ۱}{۲}$

۴) واگراست.

۶. کدام گزینه‌ی زیر نادرست است؟

۱) دنباله‌ی $\{(۱ - \frac{۱}{n})^n\}$ صعودی است.

۲) دنباله‌ی $\{(۱ + \frac{۱}{n})^n\}$ صعودی است.

۳) دنباله‌ی $\{(۱ + \frac{۱}{n})^{n+۱}\}$ نزولی است.

۴) دنباله‌ی $\{(۱ - \frac{۱}{n})^{n+۱}\}$ نزولی است.

۷. حد دنباله‌های $a_n = (۱ + \frac{۱}{n})^{۲n}$، $b_n = (۱ + \frac{۱}{n})^{۳n}$ و $c_n = (۱ + \frac{۱}{n})^{\frac{n}{۲}}$ به ترتیب A، B و C است. در این صورت کدام صحیح است؟

۱) $A < B < C$

۲) $C < A < B$

۳) $A < C < B$

۴) $B < C < A$

۸. چه تعداد از جملات زیر صحیح است؟

(الف) دنباله‌ی $\{n\cos\frac{n\pi}{۲}\}$ غیریکنوا، بی‌کران و واگراست.

(ب) دنباله‌ی $\{n\sin\frac{n\pi}{۲}\}$ غیریکنوا، بی‌کران و واگراست.

(ج) دنباله‌ی $\{n\cos\frac{(-۱)^n}{n}\}$ یکنوا، بی‌کران و واگراست.

(د) دنباله‌ی $\{\frac{sinn}{n}\}$ غیریکنوا، کران‌دار و همگراست.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱-۹ پاسخ تشریحی تمرینات فصل ۱ دیفرانسیل

۱. گزینه‌ی «۳» صحیح است.

$$\forall \varepsilon > ۰ \ \exists M \in \mathbb{N} \ : \ n \geq M \ \Rightarrow \ |a_n - l| < \varepsilon$$

با توجه به گزاره‌ی فوق $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ است و در نتیجه دنباله‌ی $\{a_n\}$ همگرا و کران‌دار است.

۲. گزینه‌ی «۴» صحیح است.

$$|a_n - ۳| < \varepsilon \ \Rightarrow \ |۳ - (\frac{۱}{۲})^n - ۳| < \varepsilon \ \Rightarrow \ \frac{۱}{۲^n} < \varepsilon \ \Rightarrow \ ۲^n > \frac{۱}{\varepsilon}$$
$$\Rightarrow \ \log_۲ ۲^n > \log_۲ \frac{۱}{\varepsilon} \ \Rightarrow \ n > \log_۲ \frac{۱}{\varepsilon} \ \Rightarrow \ n \geq [\log_۲ \frac{۱}{\varepsilon}] + ۱$$

دقت شود که چون تابع $y = \log_۲ x$ تابع اکیداً صعودی است (با توجه به نمودار تابع) پس

$$a > b \ \Rightarrow \ \log_۲ a > \log_۲ b$$

۳. گزینه‌ی «۲» صحیح است.

چون دنباله‌ی $\{P_n\}$ همگراست پس $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \lim\limits_{n\to\infty} P_{n+۱} = l$ در نتیجه:

$$\lim_{n\to\infty} P_{n+۱} = \lim_{n\to\infty} \frac{bP_n}{a+P_n} \ \Rightarrow \ l = \frac{bl}{a+l}$$
$$\Rightarrow l^۲ + al = bl \ \Rightarrow \ l = ۰ \ \text{یا} \ l = b - a$$

۴. گزینه‌ی «۱» صحیح است.

$$x^۲ < ۲۵۰ \ \Rightarrow \ -\sqrt{۲۵۰} < x < \sqrt{۲۵۰} \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} -۱۵ \leq x \leq ۱۵ \ \Rightarrow \ \sup = +۱۵$$

در گزینه‌ی (۲) سوپریمم مجموعه $\sqrt{۵}$ است که چون گویا نیست پس عضو مجموعه نمی‌باشد.
در گزینه‌های ۳ و ۴ سوپریمم مجموعه b است که در خود مجموعه نیست.

۵. گزینه‌ی «۳» صحیح است.

ابتدا چند جمله‌ی اول دنباله را می‌نویسیم:

$$۱, \sqrt{۸}, \sqrt{۷+\sqrt{۸}}, \cdots$$

سپس با فرض همگرا بودن دنباله داریم:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+۱} = \lim_{n\to\infty} a_n = l \ \Rightarrow \ l = \sqrt{۷+l} \overset{l\geq ۰}{\Rightarrow} l^۲ = ۷ + l$$

$$\Rightarrow l^{۲} - l - ۷ = ۰ \Rightarrow l = \frac{۱ - \sqrt{۲۹}}{۲} < ۰ \text{ غق} \quad , \quad l = \frac{۱ + \sqrt{۲۹}}{۲}$$

پس این دنباله یا همگرا به $\frac{۱ + \sqrt{۲۹}}{۲}$ است و یا واگراست که برای بررسی همگرا یا واگرا بودن دنباله نیاز به بررسی کران‌داری و یکنوایی است.

مشخص است که اگر $a_n = \frac{۱ + \sqrt{۲۹}}{۲}$ باشد آن‌گاه $a_{n+۱} = \frac{۱ + \sqrt{۲۹}}{۲}$ است و حال چون $\frac{۱ + \sqrt{۲۹}}{۲} > ۱ = a_۱$ پس $a_۲ < \frac{۱ + \sqrt{۲۹}}{۲}$ و در نتیجه $a_۳ < \frac{۱ + \sqrt{۲۹}}{۲}$ و $\dots$.

پس $a_n < \frac{۱ + \sqrt{۲۹}}{۲}$ یعنی $۱ \le a_n < \frac{۱ + \sqrt{۲۹}}{۲}$ و دنباله‌ی $\{a_n\}$ کران‌دار است. برای بررسی یکنوایی از $a_{n+۱} - a_n$ استفاده می‌شود.

$$a_{n+۱} - a_n = \sqrt{۷ + a_n} - a_n = \frac{۷ + a_n - a_n^{۲}}{\sqrt{۷ + a_n} + a_n}$$

با توجه به محدوده‌ی a_n $(۱ \le a_n < \frac{۱ + \sqrt{۲۹}}{۲})$:

$$a_{n+۱} - a_n \ge ۰ \Rightarrow \{a_n\} \text{ صعودی است}$$

چون دنباله کران‌دار و صعودی است پس همگراست و گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

۶. گزینه‌ی «۴» صحیح است.

$$\begin{array}{llll}
\text{گزینه‌ی ۱} : & \{(۱ - \frac{۱}{n})^{n}\} & \rightarrow & ۰, (\frac{۱}{۲})^{۲}, (\frac{۲}{۳})^{۳}, \cdots \\
\text{گزینه‌ی ۲} : & \{(۱ + \frac{۱}{n})^{n}\} & \rightarrow & ۲, (\frac{۳}{۲})^{۲}, (\frac{۴}{۳})^{۳}, \cdots \\
\text{گزینه‌ی ۳} : & \{(۱ + \frac{۱}{n})^{n+۱}\} & \rightarrow & ۲^{۲}, (\frac{۳}{۲})^{۳}, (\frac{۴}{۳})^{۴}, \cdots \\
\text{گزینه‌ی ۴} : & \{(۱ - \frac{۱}{n})^{n+۱}\} & \rightarrow & ۰, (\frac{۱}{۲})^{۳}, (\frac{۲}{۳})^{۴}, \cdots
\end{array}$$

پس گزینه‌ی ۴ نزولی نیست.

۷. گزینه‌ی «۲» صحیح است.

می‌دانیم برای رفع ابهام حالت مبهم $(۱_{\text{حدی}})^{\infty}$ باید از الگوی زیر استفاده کرد:

$$\lim_{x \to a} (f(x))^{g(x)} = e^{\lim_{x \to a} (f(x) - ۱) g(x)}$$

$$A = \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} (۱ + \frac{۱}{n})^{۲n} = e^{\lim_{n \to \infty} (۱ + \frac{۱}{n} - ۱) \cdot ۲n} = e^{\lim_{n \to \infty} \frac{۱}{n} \cdot ۲n} = e^{۲}$$

$$B = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (۱ + \frac{۱}{n})^{۳n} = e^{\lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n}-۱)\cdot ۳n} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n}\cdot ۳n} = e^{۳}$$

$$C = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} (۱ + \frac{۱}{n})^{\frac{n}{۲}} = e^{\lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n}-۱)\cdot \frac{n}{۲}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n}\cdot \frac{n}{۲}} = e^{\frac{۱}{۲}}$$

پس: $C < A < B$.

۸. گزینه‌ی «۴» صحیح است.

$$\{n\cos\frac{n\pi}{۲}\} \to ۰, -۲, ۰, ۴, ۰, -۶, ۰, \cdots$$

$$\{n\sin\frac{n\pi}{۲}\} \to ۱, ۰, -۳, ۰, ۵, ۰, \cdots$$

با توجه به جملات دنباله‌ها، دنباله‌های $\{n\sin\frac{n\pi}{۲}\}$ و $\{n\cos\frac{n\pi}{۲}\}$ غیریکنوا، بی‌کران و واگرا هستند.

دنباله‌های $\{n\}$ و $\{\cos\frac{۱}{n}\} = \{\cos\frac{(-۱)^n}{n}\}$ هر دو صعودی و مثبتند بنابراین ضرب آن‌ها صعودی است و در ضمن $\lim_{n\to+\infty} n\cos\frac{۱}{n} = +\infty$.

دنباله‌ی $\{\frac{\sin n}{n}\}$ همگرا به صفر است و چون علامت $\sin n$ بین $+$ و $-$ در نوسان است پس غیریکنوا است.