



# مەرجە مەتەتات



مۇلفان : رضاالسلامى ، كاظم اجالالى



انتەتارات خوتەن خولون



## فهرست

### فصل اول : نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی

- ۳- ۱-۱- نسبت مثلثاتی سینوس
- ۸- ۲-۱- نسبت مثلثاتی کسینوس
- ۱۰- ۳-۱- نسبت‌های مثلثاتی تانژانت و کتانژانت
- ۱۴- ۴-۱- رابطه‌ی بین شیب خط و تانژانت
- ۱۶- ۵-۱- چند مسئله کاربردی
- ۱۸- ۶-۱- نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم
- ۱۹- ۷-۱- روابط بین نسبت‌های مثلثاتی
- ۲۵- ۸-۱- تمرینات تکمیلی
- ۳۶- ۹-۱- سوالات چهارگزینه‌ای

### فصل دوم : روابط مثلثاتی در دایره مثلثاتی

- ۴۳- ۱-۲- زاویه و واحدهای اندازه‌گیری آن
- ۴۳- ۱-۱-۲- معرفی درجه
- ۴۴- ۲-۲- تعریف نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی
- ۴۵- ۲-۱-۲- معرفی رادیان
- ۴۸- ۳-۱-۲- تبدیل درجه و رادیان به یکدیگر
- ۵۴- ۳-۲- جدول مقادیر مثلثاتی زوایای مهم
- ۵۸- ۴-۲- تناوب نسبت‌های مثلثاتی
- ۵۹- ۵-۲- نسبت‌های مثلثاتی قرینه کمان
- ۵۹- ۶-۲- نسبت‌های مثلثاتی مکمل کمان
- ۶۲- ۷-۲- نسبت‌های مثلثاتی متمم کمان
- ۶۵- ۸-۲- تمرینات تکمیلی
- ۷۲- ۹-۲- سوالات چهارگزینه‌ای

### فصل سوم : توابع مثلثاتی

- ۷۹- ۱-۲- معرفی توابع مثلثاتی و ویژگی‌های آنها
- ۸۶- ۲-۲- نمودار توابع سینوس و کسینوس و انتقال آنها
- ۹۵- ۳-۲- نمودار توابع تانژانت و کتانژانت
- ۹۷- ۴-۲- قضیه‌ی سینوس‌ها و کسینوس‌ها



- ۱۰۳ ۵-۳- تمرینات تکمیلی  
۱۱۲ ۶-۳- سوالات چهارگزینه ای

#### فصل چهارم : نسبت های مثلثاتی زوایای مرکب

- ۱۶۱ ۴-۱- یادآوری چند اتحاد مثلثاتی  
۱۱۳ ۴-۲- سینوس و کسینوس مجموع و تفاضل دو کمان  
۱۱۶ ۴-۳- تانژانت و کتانژانت مجموع و تفاضل دو کمان  
۱۱۹ ۴-۴- نسبت های مثلثاتی دو برابر کمان  
۱۱۳۳ ۴-۵- نسبت های مثلثاتی نصف کمان  
۱۱۳۵ ۴-۶- تمرینات تکمیلی  
۱۱۳۹ ۴-۷- سوالات چهارگزینه ای

#### فصل پنجم : روابط تبدیل ضرب به جمع و جمع به ضرب

- ۱۴۵ ۵-۱- روابط تبدیل ضرب به جمع  
۱۴۸ ۵-۲- روابط تبدیل جمع به ضرب  
۱۵۱ ۵-۳- تمرینات تکمیلی  
۱۵۵ ۵-۴- سوالات چهارگزینه ای

#### فصل ششم : معادلات مثلثاتی

- ۱۶۱ ۶-۱- معادلات ساده ی مثلثاتی  
۱۶۲ ۶-۲- معرفی معکوس نسبت های مثلثاتی  
۱۶۷ ۶-۳- حل نمونه هایی از معادلات مثلثاتی  
۱۶۹ ۶-۴- معادلات کلاسیک  
۱۷۱ ۶-۵- تمرینات تکمیلی  
۱۷۵ ۶-۶- سوالات چهارگزینه ای

#### فصل هفتم : توابع معکوس مثلثاتی

- ۱۸۱ ۷-۱- توابع معکوس پذیر  
۱۸۴ ۷-۲- معکوس توابع سینوس و کسینوس  
۱۸۸ ۷-۳- ویژگی های توابع معکوس سینوس و کسینوس



۱۹۳	۷-۴- معکوس توابع تانژانت و کتانژانت
۱۹۶	۷-۵- ویژگی های توابع معکوس تانژانت و کتانژانت
۲۰۱	۷-۶- تمرینات تکمیلی
۲۰۷	۷-۷- سوالات چهارگزینه ای

#### فصل هشتم : راهنمایی حل و جواب آخر تمرینات

۲۱۵	۸-۱- پاسخ تمرین های فصل اول
۲۲۷	۸-۲- پاسخ تمرین های فصل دوم
۲۳۳	۸-۳- پاسخ تمرین های فصل سوم
۲۴۴	۸-۴- پاسخ تمرین های فصل چهارم
۲۵۲	۸-۵- پاسخ تمرین های فصل پنجم
۲۶۲	۸-۶- پاسخ تمرین های فصل ششم
۲۷۷	۸-۷- پاسخ تمرین های فصل هفتم
۲۹۲	۸-۸- پاسخ سوالات چهارگزینه ای

# فصل

نسبت های مثلثی

در مثلث قائم الزاویه



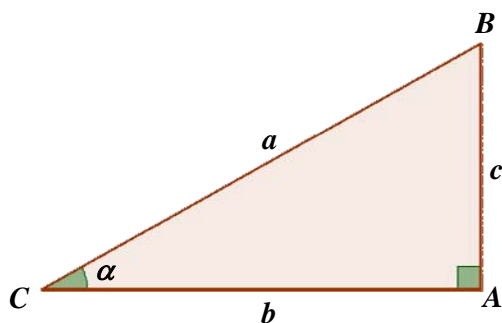
- ۱-۱- نسبت مثلثاتی سینوس ..... ۳
- ۱-۲- نسبت مثلثاتی کسینوس ..... ۸
- ۱-۳- نسبت‌های مثلثاتی تانژانت و کتانژانت ..... ۱۰
- ۱-۴- رابطه‌ی بین شیب خط و تانژانت ..... ۱۴
- ۱-۵- چند مسأله کاربردی ..... ۱۶
- ۱-۶- نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم ..... ۱۸
- ۱-۷- روابط بین نسبت‌های مثلثاتی ..... ۱۹
- ۱-۸- تمرینات تکمیلی ..... ۲۵
- ۱-۹- سوالات چهارگزینه‌ای ..... ۳۶

در این فصل نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه در مثلث قائم‌الزاویه را معرفی خواهیم کرد. شما خواهید آموخت که نسبت اندازه اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه با زوایای آن چه ارتباطی دارد و این ارتباط چه کاربردی می‌تواند داشته باشد. همچنین در مثالها و مسائل پایانی فصل مقدماتی را فراهم خواهیم کرد که در فصل‌های بعدی به شدت مورد استفاده قرار خواهند گرفت. مطالعه این فصل برای تمامی کسانی که می‌خواهند مثلثات را به عنوان یک ابزار محاسباتی بیاموزند، توصیه می‌شود. لازم به ذکر است که مطالب این فصل منطبق بر سرفصل‌های کتاب ریاضیات سال اول دبیرستان می‌باشد.



## ۱-۱- نسبت مثلثاتی سینوس

در مثلث قائم الزاویه  $\triangle ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ )، زاویه حاده  $\alpha$  را در نظر می‌گیریم. سینوس این زاویه حاده این گونه تعریف می‌شود:



$$\sin(\alpha) = \frac{\text{اندازهی ضلع مقابل به زاویه } \alpha}{\text{اندازهی وتر}} = \frac{c}{a}$$

از آنجا که در مثلث قائم الزاویه، طول وتر از سایر اضلاع بزرگ‌تر است، همواره حاصل تقسیم اندازهی ضلع مقابل به زاویه  $\alpha$  بر اندازهی وتر عددی کوچک‌تر از یک خواهد بود:

$$0 < \alpha < 90^\circ \Rightarrow 0 < \sin \alpha < 1$$



۳ دقیقه

اگر  $0 < \alpha < 90^\circ$  و  $\sin \alpha = \frac{m-3}{5}$  باشد،  $m$  چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟



حل

$0 < \sin \alpha < 1$ : زاویه‌ای حاده است:

$$\Rightarrow 0 < \frac{m-3}{5} < 1 \quad (\text{ضرب طرفین در } 5) \Rightarrow 0 < m-3 < 5 \quad (\text{جمع طرفین با } 3)$$

$$\Rightarrow 3 < m < 8 \quad (\text{مشخص کردن اعداد صحیح}) \Rightarrow m = 4, 5, 6, 7$$

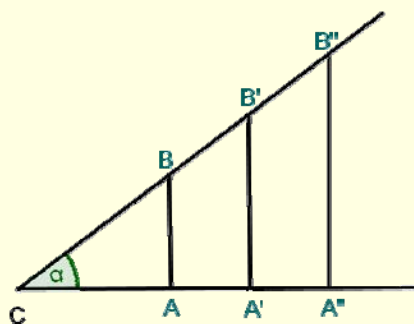
بنابراین ۴ مقدار صحیح وجود دارد.

در مورد زاویه‌ی مشخص و حاده  $\alpha$  می‌توان گفت  $\sin \alpha$  نیز عددی مشخص است. یعنی در مثلث‌های قائم الزاویه‌ی متفاوت که یک زاویه‌ی حاده  $\alpha$  دارند، نسبت اندازهی ضلع مقابل  $\alpha$  به اندازهی وتر، عددی ثابت است. به شکل زیر توجه کنید:



شبیه سازی

کد: ۱۰۱



طبق قضیه‌ی تالس می‌توان گفت که در مثلث‌های  $ABC$  و  $A'B'C$  و  $A''B''C$  اضلاع باهم متناسب می‌باشند و حاصل نسبت اندازهی ضلع مقابل  $\alpha$  بر اندازهی وتر در هر سه مثلث باهم برابر است.

$$\sin \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C} = \frac{A''B''}{B''C}$$



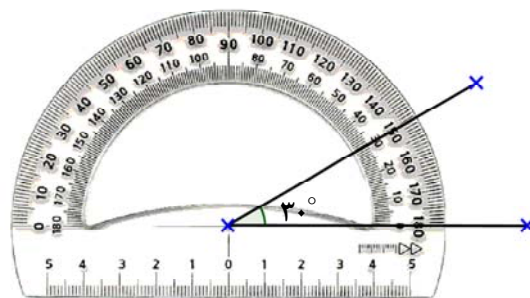
هر یک از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی زیر را رسم کرده و مقدار  $\sin 30^\circ$  را در آن‌ها حساب کنید.

الف)  $\hat{A} = 90^\circ$  و  $\hat{C} = 30^\circ$  و  $BC = 4\text{ cm}$

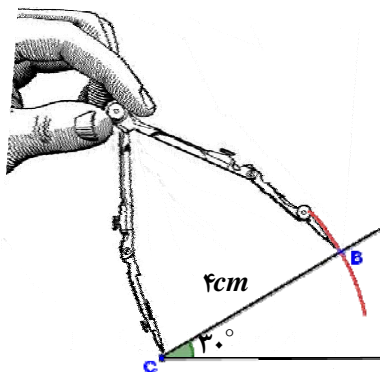
ب)  $\hat{A} = 90^\circ$  و  $\hat{C} = 30^\circ$  و  $BC = 3\text{ cm}$

حل الف)

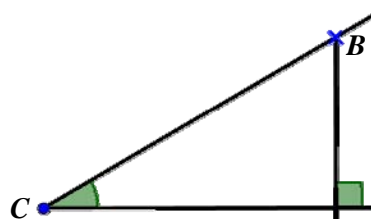
۱ رسم زاویه‌ی  $\hat{C} = 30^\circ$  به کمک نقاله



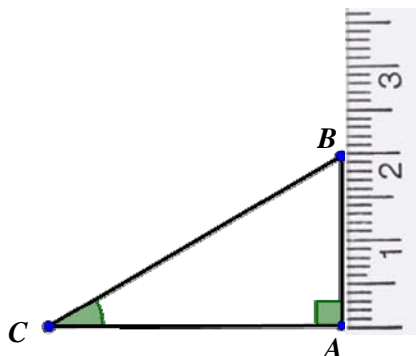
۲ مشخص کردن ضلع  $BC$  به کمک پرگار



۳ رسم عمود از  $B$  به کمک گونیا



۴ اندازه‌گیری ضلع  $AB$  به کمک خط کش

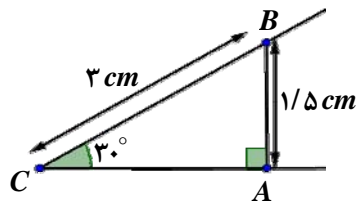


۵ محاسبه‌ی  $\sin 30^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{4}$

حل ب)

اگر قسمت الف را تکرار کنیم، مثلث  $ABC$  این گونه رسم می‌شود:

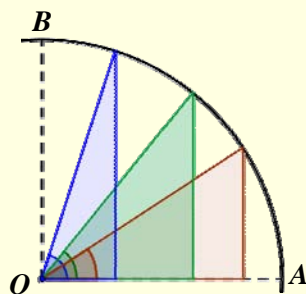
$$\sin 30^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{1/5}{3} = \frac{1}{6}$$







شبه سازی  
کد: ۱۰۲



هرچه زاویه‌ی  $\alpha$  از صفر تا  $90^\circ$  درجه بزرگتر گردد، مقدار  $\sin \alpha$  نیز بزرگ‌تر می‌شود. همان‌طور که در دایره‌ی روبه‌رو مشخص شده، در تمامی مثلث‌های قائم‌الزاویه، طول وتر یکسان است و با زیاد شدن زاویه‌ی  $\alpha$ ، اندازه‌ی ضلع مقابل بزرگ‌تر می‌شود و در نتیجه مقدار  $\sin \alpha$  بیشتر می‌شود.



۳ دقیقه

سینوس زوایای  $30^\circ$ ،  $60^\circ$  و  $45^\circ$  را به روش هندسی به دست آورده و با هم مقایسه کنید.



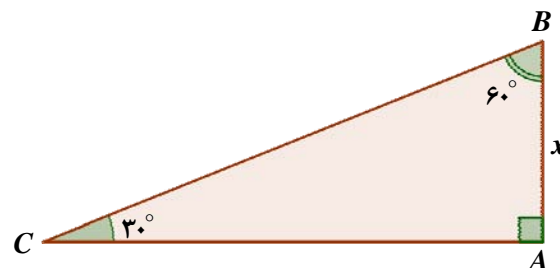
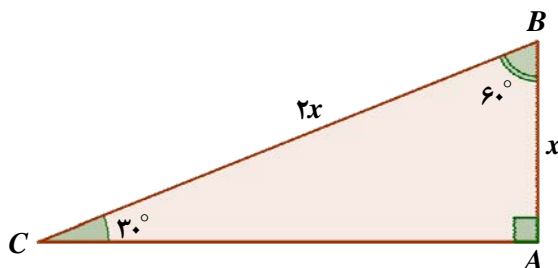
(حل)

در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌روی زاویه‌ی  $30^\circ$  نصف وتر است.

۲

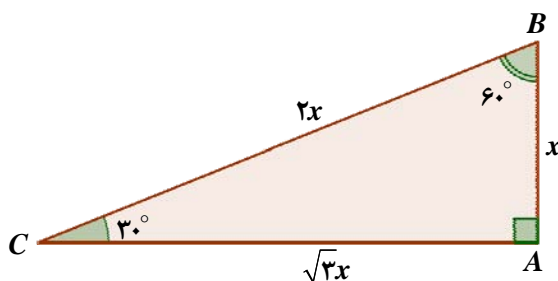
رسم مثلث قائم‌الزاویه‌ای با زاویه‌ی  $30^\circ$

۱



به کمک رابطه‌ی فیثاغورث طول ضلع  $AC$  را بر حسب  $x$  به دست می‌آوریم:

$$(2x)^2 = x^2 + (AC)^2 \Rightarrow 4x^2 = x^2 + (AC)^2 \Rightarrow (AC)^2 = 3x^2 \Rightarrow AC = \sqrt{3}x$$



محاسبه‌ی  $\sin 30^\circ$  و  $\sin 60^\circ$

۳

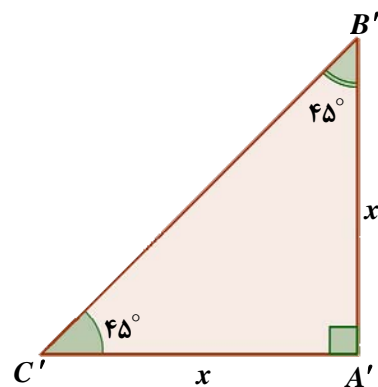
$$\sin 30^\circ = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}x}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

به کمک رابطه فیثاغورث طول وتر را بر حسب  $x$  می یابیم:

$$(BC)^2 = x^2 + x^2$$

$$\Rightarrow (BC)^2 = 2x^2 \Rightarrow BC = \sqrt{2}x$$

رسم مثلث قائم الزاویه با زاویه  $45^\circ$

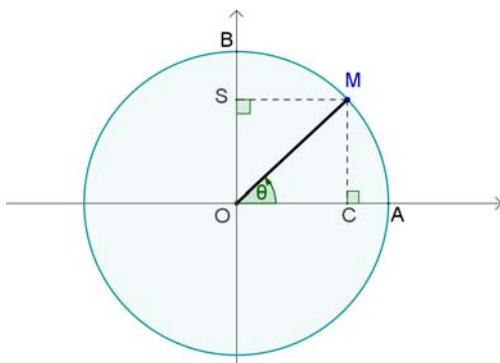


محاسبه  $\sin 45^\circ$

$$\sin 45^\circ = \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 30^\circ < \sin 45^\circ < \sin 60^\circ$$

پس مقایسه  $\sin 30^\circ$ ،  $\sin 45^\circ$  و  $\sin 60^\circ$  به این ترتیب خواهد بود:



دایره ی روبه رو که به شعاع ۱ رسم شده است، معروف به دایره ی مثلثاتی است.  
مقدار  $\sin \theta$  برابر با طول کدام پاره خط است؟  
( $\theta$  زاویه ی دلخواه است.)



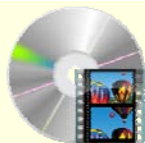
(حل)

از نقطه ی  $M$  به دو پاره خط  $OA$  و  $OB$  عمود رسم می کنیم. در مثلث قائم الزاویه  $OMC$ ، مقدار  $\sin \theta$  را حساب می کنیم:

$$\sin \theta = \frac{MC}{OM} = \frac{MC}{1} = MC$$

در مستطیل  $OSMC$ ، طول  $MC$  با طول  $OS$  برابر است.

$$\Rightarrow \sin \theta = OS$$

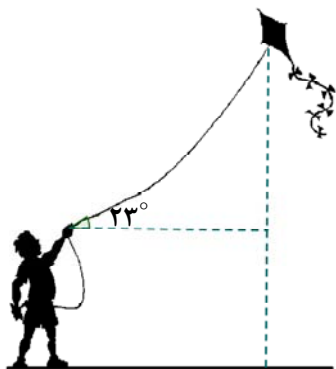


شبیه سازی  
کد: ۱۰۳

همان طور که در دایره ی مثلثاتی مشخص است با افزایش زاویه ی  $\theta$ ، طول  $OS$  یعنی  $\sin \theta$  بیشتر می شود. همچنین اگر  $\theta$  به صفر نزدیک شود، سینوس آن به صفر و اگر به  $90^\circ$  نزدیک شود، سینوس آن

به عدد یک نزدیک می شود. پس داریم:  $\sin 90^\circ = 1$ ،  $\sin 0^\circ = 0$ .





شخصی که دارای قد ۱ متر و ۴۰ سانتی‌متر است، بادبادکی به هوا فرستاده است. در لحظه‌ای که ۴۰ متر از نخ را رها کرده است، زاویه‌ی بین راستای نخ و سطح زمین  $23^\circ$  می‌باشد. ارتفاع بادبادک از سطح زمین چقدر است؟  
(فرض کنید نخ در امتداد مستقیم قرار دارد و  $\sin 23^\circ = 0.39$  است.)

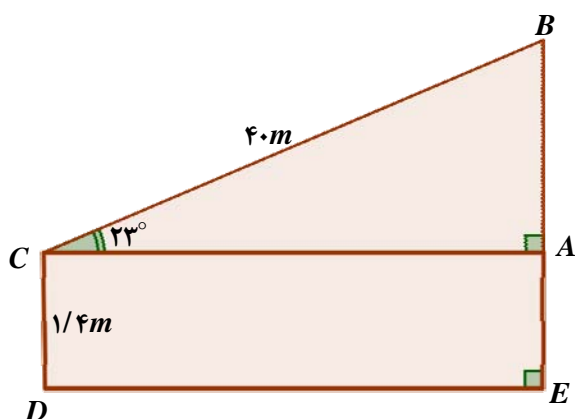


(حل)

همان‌طور که در شکل روبه‌رو مشخص است برای محاسبه‌ی ارتفاع بادبادک از زمین باید ابتدا اندازه‌ی ضلع  $AB$  را محاسبه و سپس آن را با اندازه‌ی  $AE$  جمع کنیم:

$$\sin 23^\circ = \frac{AB}{BC} \text{ (جاگذاری)} \Rightarrow 0.39 = \frac{AB}{40} \Rightarrow AB = 15.6 \text{ m}$$

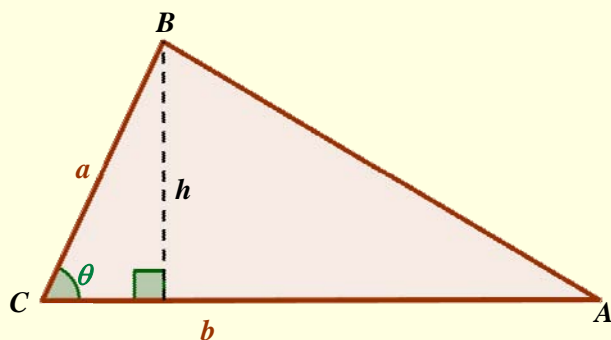
$$\Rightarrow BE = AB + AE \Rightarrow BE = 15.6 + 1.4 = 17 \text{ m}$$



مساحت یک مثلث دلخواه با دو ضلع  $a$  و  $b$  که زاویه‌ی بین آن‌ها  $\theta$  می‌باشد، از رابطه‌ی  $S = \frac{1}{2}ab \sin \theta$  به دست می‌آید.



اثبات:



$$\sin \theta = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \sin \theta$$

$$S = \frac{1}{2}b \times h \text{ (جاگذاری)} \Rightarrow S = \frac{1}{2}b \times a \sin \theta$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}ab \sin \theta$$



مساحت متوازی الاضلاعی را که اندازه‌ی دو ضلع مجاور آن ۵ و ۸ و زاویه‌ی بین این دو ضلع  $150^\circ$  می‌باشد، به دست آورید.



(حل)

در شکل مقابل زاویه‌ی  $A$  مکمل زاویه‌ی  $B$  است. پس داریم:

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot AD \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times 8 \times 5 \times \frac{1}{2} = 10$$

پس مساحت متوازی الاضلاع دو برابر مساحت مثلث و برابر ۲۰ می‌باشد.

