پیش‌بینی مباحث کنکور بر مبنای کنکورهای سال‌های گذشته

شماره تست در دفترچه‌ی کنکور	
۱۲۶ ۱۲۷ ۱۲۸ ۱۲۹	چهار سؤال اول تست‌ها، به هفت فصل کتاب ریاضی ۲ اختصاص دارد. این سؤالات بعضاً با بقیه‌ی مباحث مرتبط به صورت ترکیبی می‌آیند. از سال ۹۱ که سؤالات بر مبنای تغییرات جدید کتاب طراحی شده‌اند، همواره از «تابع» و «مثلثات» سال دوم، سؤالاتی داشته‌ایم. امسال احتمال آمدن تست از «آنالیز ترکیبی» و یا سؤالی از «رادیکال» یا «دنباله» وجود دارد.
۱۳۰ ۱۳۱	دو سؤال پس از سؤالات ریاضی (۲)، به آمار اختصاص می‌یابد. باید احتمالاً منتظر یک سوال از ۵ فصل ابتدایی و یک سؤال از دو فصل آخر (میانگین و واریانس و ...) باشید.
۱۳۲ ۱۳۳ ۱۳۴ ۱۳۵ ۱۳۶ ۱۳۷	بعد از آمار، شش سؤال از کتاب ریاضی (۳) می‌آید. مباحث ریاضی (۳) شامل «احتمال، تابع، حد و پیوستگی و مشتق» است. از احتمال، احتمالاً یک سؤال خواهد آمد. از تابع به نظر، امسال بیشتر از سال قبل سؤال بیاید و «ترکیب تابع» و «نامعادله» کاندیداهای اصلی هستند. با قاطعیت می‌توان گفت دو سؤال از شش سؤال، به حد و پیوستگی می‌رسد و با احتمال کمتر شاید هم سه سؤال بدهند. از مشتق شاید تنها یک سؤال بیاید و باید بدانید سؤالی که در این قسمت از مشتق می‌آید، مربوط به مباحث سال سوم مثل آهنگ تغییر یا مشتق‌گیری است.
۱۳۸ ۱۳۹ ۱۴۰ ۱۴۱ ۱۴۲ ۱۴۳ ۱۴۴	هفت سؤال از کتاب «پیش (۱)» خواهید داشت. مباحث این کتاب، شامل «احتمال، تابع و مشتق» می‌باشد. شاید بیشترین شانس برای این سؤالات را بتوان «۲ سؤال احتمال، ۳ سؤال تابع و ۲ سؤال مشتق» یا «۲ سؤال احتمال، ۴ سؤال تابع و ۱ سؤال مشتق» دانست. امسال جزء سؤالات تابع به احتمال بسیار زیاد باید حد دنباله‌ها را ببینید که دو سال است از آن سؤال نداده‌اند. پس در این شماره‌ها دنبالش بگردید.
۱۴۵ ۱۴۶ ۱۴۷ ۱۴۸ ۱۴۹ ۱۵۰ ۱۵۱	هفت سؤال «پیش (۲)» را در این شماره‌ها خواهید دید. به احتمال بسیار زیاد «۲ سؤال کاربرد مشتق، ۳ سؤال هندسه مختصاتی و منحنی‌های درجه دوم و ۲ سؤال انتگرال» یا «۳ سؤال کاربرد مشتق، ۲ سؤال هندسه مختصاتی و منحنی‌های درجه دوم و ۲ سؤال انتگرال» خواهید داشت. اگر حالت دوم را در نظر بگیریم، از هندسه‌ی مختصاتی سؤالی نخواهید داشت و شاید احتمالاً امسال جایش را به سؤال مجانب بدهد! سؤالات انتگرال نسبت به بقیه‌ی سؤالات همیشه کمی آسان‌تر بوده‌اند.
۱۵۲ ۱۵۳ ۱۵۴ ۱۵۵	چهار سؤال انتهایی به هندسه اختصاص دارند و احتمالاً از هر فصل یک سؤال می‌آید. سؤال مربوط به فصل اول معمولاً راحت‌تر از بقیه است.

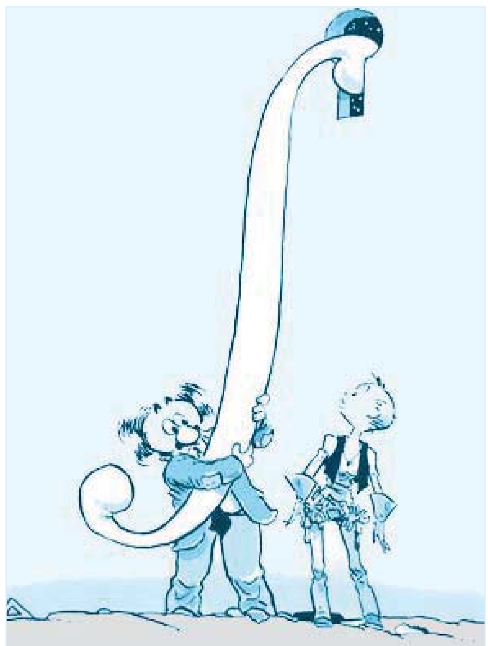
در انتهای کتاب دو آزمون جمع‌بندی با توجه به پیش‌بینی‌های بیان شده آمده‌اند که به شما پیشنهاد می‌کنیم حتماً آن‌ها را به دقت بررسی کنید.

فصل سوم

انتگرال

از انتگرال همیشه دو تست در کنکور می‌آید. سؤالات انتگرال سؤالاتی متوسط محسوب می‌شوند که قطعاً ارزش وقت‌گذاشتن را دارند و هیچ‌گاه تست خیلی سختی در کنکور از آن نیامده است. انتگرال به دو دلیل مورد بی‌مهری دانش‌آموزان قرار می‌گیرد؛ اولاً به خاطر این‌که آخرین مبحث کتاب درسی است و در لحظات پر استرسی، درس مدارس به آن می‌رسد، ثانیاً به خاطر این‌که مبحث جدیدی است و بر خلاف بسیاری از قسمت‌ها دانش‌آموزان قبلاً اصلاً آن را ندیده‌اند.

ولی با وجود دو مشکل بالا، سؤالات انتگرال در کنکورهای گذشته فوق‌العاده شبیه به هم و تا حدودی تکراری‌اند و هم‌چنین حل آن‌ها برخلاف برخی قسمت‌های دیگر، نیازی به فرمول‌ها یا روش‌های پیچیده ندارد. در جمع‌بندی این فصل به این نکته که چه مواردی در کنکور بیشتر مورد نظر طراحان بوده‌اند، به شدت توجه کرده‌ایم و درسنامه‌ها را بر مبنای آن نوشته‌ایم و در مواردی راه‌های جالبی ارائه کرده‌ایم. قطعاً مطالب این فصل برای جمع‌بندی کافی هستند و نیازی به مطالب حاشیه‌ای‌تر ندارید.



۱ انتگرال

به زبان ساده، انتگرال‌گیری عکس عمل مشتق‌گیری است. مثلاً مشتق x^5+C (C عددی ثابت) می‌شود $5x^4$، پس انتگرال $5x^4$ می‌شود x^5+C و آن را به‌صورت $\int 5x^4dx = x^5+C$ نشان می‌دهیم. در کل داریم:

$$F'(x)=f(x) \Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x)$$

◀ **فرمول مهم در حد مرگ:**

$$\boxed{\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1}+C; r\neq -1}$$

یکی به توان اضافه شده و توان حاصل را عیناً در مخرج می‌نویسیم.

مثلاً: $\int x^5dx = \frac{x^6}{6}+C$ یا $\int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+C$

◀ **نتیجه:** $\int dx = \int 1dx = x+C$

خاصیت خطی بودن انتگرال:

$$\boxed{\int (af(x)\pm bg(x))dx = a\int f(x)dx \pm b\int g(x)dx}$$

مثلاً : $\int (3x^2+5)dx = 3\int x^2dx + 5\int dx = 3\left(\frac{x^3}{3}\right)+5x+C$

فرار از اشتباه: انتگرال از ضرب و تقسیم در حالت کلی رَد نمی‌شود.

مثلاً: $\int (x+1)(x^2-3)dx \neq \left(\int (x+1)dx\right)\left(\int (x^2-3)dx\right)$

برای محاسبه‌ی این انتگرال ابتدا باید دو عبارت $(x+1)$ و (x^2-3) را در هم ضرب کنیم و سپس عمل انتگرال‌گیری را انجام دهیم.

ترفند ویژه: برای محاسبه‌ی انتگرال عبارات کسری مثل $\frac{a}{x^n}$ ابتدا آن را به‌صورت ax^{-n} می‌نویسیم. همچنین برای محاسبه‌ی انتگرال عبارات شامل رادیکال مثل $\sqrt[n]{x^m}$، ابتدا آن را به‌صورت $x^{\frac{m}{n}}$ می‌نویسیم.

مثلاً: $\int\left(\frac{1}{x^2}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx = \int x^{-2}dx+\int x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1}+\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+C = \frac{x^{-1}}{-1}+\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+C = -\frac{1}{x}+\frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5}+C$

◀ **نکته:** عدد ثابت C وقتی اهمیت پیدا می‌کند که در مسأله‌ای یک شرط اولیه مانند $F(1)=2$ داده شود. برای حل این‌گونه مسائل به مثال زیر توجه کنید:

◀ **مثال:** اگر $F(x)=\int 3x^2dx$ و $F(-2)=5$ باشد. آن‌گاه $F(1)$ را بیابید.

پاسخ: ابتدا حاصل انتگرال را به‌دست آورده و سپس شرط داده شده را اعمال می‌کنیم:

$$F(x)=\int 3x^2dx \Rightarrow F(x)=\cancel{3}\left(\frac{x^3}{\cancel{3}}\right)+C \xrightarrow{F(-2)=5} 5=(-2)^3+C \Rightarrow C=5+8=13 \Rightarrow F(x)=x^3+13$$

حال با جایگذاری $x=1$ در تابع حاصل، $F(1)$ را می‌یابیم:

$$F(1)=1^3+13=14$$

◀ **۱** اگر $\int x(1-5\sqrt{x})dx = \frac{x^2}{2}\cdot f(x)+C$، تابع $f(x)$ کدام است؟

۱) $1-4\sqrt{x}$ ۲) $1-2\sqrt{x}$ ۳) $x-2\sqrt{x}$ ۴) $x-x\sqrt{x}$

داخل تجربی ۸۵ | پاسخ: ۱

$$\int x(1-5\sqrt{x})dx = \int (x-5x.x^{\frac{1}{2}})dx = \int xdx - 5\int x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{x^2}{2}-\cancel{5}\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{\cancel{5}}{2}}+C = \frac{x^2}{2}-2x^2\sqrt{x}+C$$

$$\xrightarrow[\text{از } \frac{x^2}{2} \text{ فاکتور می‌گیریم}]{\text{برای مقایسه با صورت تست}} \frac{x^2}{2}(1-4\sqrt{x})+C \xrightarrow[\text{صورت تست}]{\text{مقایسه با}} f(x)=1-4\sqrt{x}$$

احتمالاً برای برخی از دانش‌آموزان، فاکتورگیری از $\frac{x^۲}{۲}$ کار راحتی نمی‌باشد! ما برای شما ترفند ویژه‌ای داریم:

ترفند ویژه: در این‌گونه مسائل می‌توانید عبارت حاصل از انتگرال‌گیری را برابر عبارت داده شده در صورت تست قرار داده و از آن تساوی، $f(x)$ را بیابید. مثلاً برای تست فوق داریم:

$$\underbrace{\frac{x^۲}{۲}-۲x^۲\sqrt{x}+C}_{\text{عبارت حاصل از انتگرال‌گیری}}=\underbrace{\frac{x^۲}{۲}f(x)+C}_{\text{عبارت داده شده}}\Rightarrow f(x)=\frac{\frac{x^۲}{۲}-۲x^۲\sqrt{x}}{\frac{x^۲}{۲}}\overset{\text{تفکیک کسر}}{=\!=\!=}\frac{\cancel{\frac{x^۲}{۲}}}{\cancel{\frac{x^۲}{۲}}}-\frac{۲\cancel{x^۲}\sqrt{x}}{\frac{\cancel{x^۲}}{۲}}=۱-۴\sqrt{x}$$

دید ویژه: مزیت ترفند ویژه‌ی بیان شده این است که دیگر لازم نیست با جوابتان بازی کنید تا شبیه دیدگاه طراح شود. در واقع با این روش، $f(x)$ در هر حالتی محاسبه می‌شود.

۲ اگر $\int(۳\sqrt{x}-\frac{۱}{\sqrt{x}})dx=\sqrt{x}\,.f(x)+C$، آن‌گاه $f(x)$ کدام است؟ (داخل تجربی ۸۳ | پاسخ: ۳)

۱) $۳x-۱$ ‏ ۲) $۳x-۲$ ‏ ۳) $۲x-۲$ ‏ ۴) $x-۲$

$$\int(۳\sqrt{x}-\frac{۱}{\sqrt{x}})dx\ \underset{\text{کسری تبدیل می‌کنیم.}}{\overset{\text{رادیکال‌ها را به توان}}{=\!=\!=}}\ ۳\int x^{\frac{۱}{۲}}dx-\int x^{-\frac{۱}{۲}}dx=۳\left(\frac{x^{\frac{۱}{۲}+۱}}{\frac{۱}{۲}+۱}\right)-\left(\frac{x^{-\frac{۱}{۲}+۱}}{-\frac{۱}{۲}+۱}\right)+C$$

$$=\cancel{۳}\left(\frac{x^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{\cancel{۳}}{۲}}\right)-\left(\frac{x^{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}}\right)+C=۲x^{\frac{۳}{۲}}-۲x^{\frac{۱}{۲}}+C=۲x\sqrt{x}-۲\sqrt{x}+C=\sqrt{x}(۲x-۲)+C\ \underset{\text{صورت سؤال}}{\overset{\text{مقایسه با}}{\Longrightarrow}}\ f(x)=۲x-۲$$

۳ اگر $\int(\sqrt{x}-\frac{۱}{x})^۲dx=\frac{f(x)}{۲x}+C$ باشد، $f(x)$ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۳ | پاسخ: ۳)

۱) $x^۳-۸x\sqrt{x}+۲$ ‏ ۲) $x^۳-۴x\sqrt{x}+۲$ ‏ ۳) $x^۳-۸x\sqrt{x}-۲$ ‏ ۴) $x^۳-۴x\sqrt{x}-۲$

$$\int(\sqrt{x}-\frac{۱}{x})^۲dx=\int\left(x+\frac{۱}{x^۲}-۲\sqrt{x}\,.\frac{۱}{x}\right)dx=\int xdx+\int x^{-۲}dx-۲\int\frac{x^{\frac{۱}{۲}}}{x^۱}dx=\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^{-۱}}{-۱}-۲\frac{x^{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}}+C$$

$x^{-\frac{۱}{۲}}$

$$=\frac{x^۲}{۲}-\frac{۱}{x}-۴\sqrt{x}+C\ \underset{\text{مشترک}}{\overset{\text{مخرج}}{=\!=\!=}}\ \frac{x^۳-۲-۸x\sqrt{x}}{۲x}+C\ \underset{\text{صورت تست}}{\overset{\text{مقایسه با}}{\Longrightarrow}}\ f(x)=x^۳-۸x\sqrt{x}-۲$$

۲ کسرهایی با مخرج یک جمله‌ای

روش ویژه: برای انتگرال‌گیری از کسرهایی که مخرج آن‌ها شامل یک جمله است، ابتدا به کمک تفکیک کسر آن را باز کرده و سپس قسمت به قسمت انتگرال می‌گیریم.

مثال:

$$\int\frac{x+۱}{x\sqrt[۳]{x}}dx=\int\left(\frac{x}{x\sqrt[۳]{x}}+\frac{۱}{x\sqrt[۳]{x}}\right)dx=\int\frac{x}{x^{\frac{۴}{۳}}}dx+\int\frac{۱}{x^{\frac{۴}{۳}}}dx=\int x^{-\frac{۱}{۳}}dx+\int x^{-\frac{۴}{۳}}dx$$

$$=\frac{x^{\frac{۲}{۳}}}{\frac{۲}{۳}}+\frac{x^{-\frac{۱}{۳}}}{-\frac{۱}{۳}}+C=\frac{۳}{۲}\sqrt[۳]{x^۲}-\frac{۳}{\sqrt[۳]{x}}+C$$

دید ویژه: علاقه‌ی طراحان کنکور به طرح تست از رادیکال‌ها به شدت ستودنی است! تقریباً هر سال ۱ سؤال! خوشبختانه این انتگرال‌گیری خیلی کار عجیبی نیست و با خواندن درسنامه و زدن تست‌های این بخش و بخش قبل، به راحتی می‌توانید از عهده‌ی حل آن برآیید.

۴ اگر $\int \frac{x-۱}{x^۳}dx = \frac{f(x)}{۲x^۲}+C$ ، آن‌گاه $f(x)$ کدام است؟

خارج تجربی ۸۹ | پاسخ: ۳

۱) $-x+۲$ ۲) $x-۲$ ۳) $-۲x+۱$ ۴) $۲x-۱$

$$\int \frac{x-۱}{x^۳}dx \xrightarrow{\text{تفکیک کسر}} \int\left(\overset{x^{-۲}}{\frac{x}{x^۳}}-\overset{x^{-۳}}{\frac{۱}{x^۳}}\right)dx = \frac{x^{-۱}}{-۱}-\frac{x^{-۲}}{-۲}+C = -\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۲x^۲}+C=\frac{-۲x+۱}{۲x^۲}+C \xrightarrow[\text{صورت تست}]{\text{مقایسه با}} f(x)=-۲x+۱$$

۵ اگر $\int \frac{۱-x}{x\sqrt{x}}dx = \frac{۲f(x)}{\sqrt{x}}+C$ ، آن‌گاه $f(x)$ کدام است؟

خارج تجربی ۹۱ | پاسخ: ۱

۱) $-x-۱$ ۲) $x-۲$

۳) $x+۱$ ۴) $۲x-۱$

$$\int \frac{۱-x}{x\sqrt{x}}dx \xrightarrow{\text{تفکیک کسر}} \int\left(\frac{۱}{x\sqrt{x}}-\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(x^{-\frac{۳}{۲}}-x^{-\frac{۱}{۲}}\right)dx=\frac{x^{-\frac{۱}{۲}}}{-\frac{۱}{۲}}-\frac{x^{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}}+C=-\frac{۲}{\sqrt{x}}-۲\sqrt{x}+C$$

$$\xrightarrow[\text{مشترک}]{\text{مخرج}} \frac{-۲-۲x}{\sqrt{x}}+C=\frac{۲(-۱-x)}{\sqrt{x}}+C \xrightarrow[\text{صورت تست}]{\text{مقایسه با}} f(x)=-x-۱$$

۶ اگر $\int \frac{۴x-۴}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}dx = \sqrt[۳]{x}\,.f(x)+C$ ، آن‌گاه $f(x)$ کدام است؟

خارج تجربی ۹۰ | پاسخ: ۱

۱) $x-۴$ ۲) $x-۲$ ۳) $۲x-۱$ ۴) $۴x-۱$

$$\int \frac{۴x-۴}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}dx \xrightarrow[\text{تفکیک کسر}]{\sqrt[۳]{x^۲}=x^{\frac{۲}{۳}}} \int\left(\frac{۴x}{۳x^{\frac{۲}{۳}}}-\frac{۴}{۳x^{\frac{۲}{۳}}}\right)dx=\int\left(\frac{۴}{۳}x^{\overset{\frac{۱}{۳}}{۱-\frac{۲}{۳}}}-\frac{۴}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}\right)dx=\frac{\cancel{۴}}{\cancel{۳}}\left(\frac{x^{\frac{۴}{۳}}}{\frac{\cancel{۴}}{\cancel{۳}}}\right)-\frac{۴}{\cancel{۳}}\left(\frac{x^{\frac{۱}{۳}}}{\frac{۱}{\cancel{۳}}}\right)+C$$

$$=x^{\frac{۴}{۳}}-۴x^{\frac{۱}{۳}}+C \xrightarrow[\text{از } x^{\frac{۱}{۳}}]{\text{فاکتور}} x^{\frac{۱}{۳}}(x-۴)+C=\sqrt[۳]{x}(x-۴)+C \xrightarrow[\text{صورت تست}]{\text{مقایسه با}} f(x)=x-۴$$

۷ اگر $\int \frac{(۱+\sqrt{x})^۲-x}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{x}\,.f(x)+C$ ، آن‌گاه $f(x)$ کدام است؟

داخل تجربی ۸۶ و مشابه داخل تجربی ۸۹ | پاسخ: ۴

۱) $۱+\sqrt{x}$ ۲) $۱+۲\sqrt{x}$

۳) $۲+\sqrt{x}$ ۴) $۲+۲\sqrt{x}$

ابتدا با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای، عبارت صورت کسر را ساده کرده و سپس از تفکیک کسر استفاده می‌کنیم:

$$\int \frac{(۱+\sqrt{x})^۲-x}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{(۱+۲\sqrt{x}+\cancel{x})-\cancel{x}}{\sqrt{x}}dx \xrightarrow{\text{تفکیک کسر}} \int\left(\frac{۱}{\sqrt{x}}+۲\right)dx=\int\left(x^{-\frac{۱}{۲}}+۲\right)dx$$

$$=\frac{x^{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}}+۲x+C=۲\sqrt{x}+۲x+C \xrightarrow[\text{از } \sqrt{x}]{\text{فاکتورگیری}} \sqrt{x}(۲+۲\sqrt{x})+C \xrightarrow[\text{صورت تست}]{\text{مقایسه با}} f(x)=۲+۲\sqrt{x}$$

۸ اگر $\int \frac{(۱+\sqrt{x})^۳-۱}{x}dx = ۳\sqrt{x}\,.f(x)+C$ باشد، $f(x)$ کدام است؟

داخل تجربی ۹۳ | پاسخ: ۴

۱) $\frac{۲}{۳}x+۳\sqrt{x}+۲$ ۲) $\frac{۲}{۳}x+\sqrt{x}+۶$

۳) $\frac{۲}{۹}x+۳\sqrt{x}+۶$ ۴) $\frac{۲}{۹}x+\sqrt{x}+۲$

یادآوری: اتحاد مکعب دوجمله‌ای: $(a\pm b)^۳=a^۳\pm ۳a^۲b+۳ab^۲\pm b^۳$

$$\int \frac{(۱+\sqrt{x})^۳-۱}{x}dx=\int \frac{\cancel{۱}+۳\sqrt{x}+۳(\sqrt{x})^۲+(\sqrt{x})^۳-\cancel{۱}}{x}dx=\int \left(\frac{۳\sqrt{x}}{x}+\frac{۳\cancel{x}}{\cancel{x}}+\frac{\cancel{x}\sqrt{x}}{\cancel{x}}\right)dx=\int \left(\frac{۳x^{\frac{۱}{۲}}}{x}+۳+x^{\frac{۱}{۲}}\right)dx$$

$$=\int (۳x^{-\frac{۱}{۲}}+۳+x^{\frac{۱}{۲}})dx=۳\frac{x^{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}}+۳x+\frac{x^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}}+C=۶x^{\frac{۱}{۲}}+۳x+\frac{۲x^{\frac{۳}{۲}}}{۳}+C \xRightarrow{\text{فاکتور از } ۳x^{\frac{۱}{۲}}} ۳x^{\frac{۱}{۲}}\left(۲+x^{\frac{۱}{۲}}+\frac{۲}{۹}x\right)+C$$

$$=۳\sqrt{x}\left(\frac{۲}{۹}x+\sqrt{x}+۲\right)+C \xRightarrow{\text{مقایسه با صورت تست}} f(x)=\frac{۲}{۹}x+\sqrt{x}+۲$$

۳ چند فرمول مهم در انتگرال‌گیری

شماره	یادآوری	نتیجه
۱	$(\sin x)'=\cos x$	$\int \cos x dx=\sin x+C$
۲	$(\cos x)'=-\sin x$	$\int \sin x dx=-\cos x+C$
۳	$(\tan x)'=۱+\tan^۲ x$	$\int (۱+\tan^۲ x)dx=\tan x+C$
۴	$(\cot x)'=-(۱+\cot^۲ x)$	$\int (۱+\cot^۲ x)dx=-\cot x+C$
۵	$(e^x)'=e^x$	$\int e^x dx=e^x+C$
۶	$(\ln x)'=\frac{۱}{x}$	$\int x^{-۱}dx=\int \frac{۱}{x}dx=\ln\|x\|+C$

فرار از اشتباه: دقت کنید! حاصل $\int \tan x dx$، برابر $\cot x+C$ نیست. در واقع محاسبه‌ی این انتگرال نیاز به روش‌های پیشرفته‌تری دارد که فعلاً کاری با آن نداریم.

ریز ویژه: برای انتگرال‌گیری از توابع مثلثاتی، ابتدا تا حد امکان تابع داخل انتگرال را به کمک فرمول‌های مثلثاتی، ساده می‌نماییم.

۹ با شرط $\frac{\pi}{۲}<x<\frac{۳\pi}{۲}$، حاصل $\int \sqrt{۱+\tan^۲ x}\sin ۲x dx$ کدام است؟

خارج تجربی ۹۲ | پاسخ: ۳

۱) $-۲\cos x+C$ ۲) $-۲\sin x+C$

۳) $۲\cos x+C$ ۴) $۲\sin x+C$

$$\int \sqrt{۱+\tan^۲ x}\times \sin ۲x\, dx \xlongequal{۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}} \int \sqrt{\frac{۱}{\cos^۲ x}}\times \sin ۲x\, dx=\int \frac{۱}{|\cos x|}\sin ۲x\, dx$$

$$\xlongequal[|\cos x|=-\cos x]{\frac{\pi}{۲}<x<\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow \cos x<۰} \int \frac{۱}{\underbrace{\cancel{-\cos x}}_{-۱}}\times ۲\sin x\cancel{\cos x}\, dx=\int -۲\sin x\, dx=-۲\int \sin x\, dx=-۲(-\cos x)+C=۲\cos x+C$$

فرار از اشتباه: مراقب باشید! **اولاً:** نمی‌توان انتگرال خواسته شده را به‌صورت $\int \sqrt{(۱+\tan^۲ x)}dx\times \int \sin ۲x dx$ جدا نمود. زیرا در حالت کلی داریم:

$$\int (f\times g)dx \neq \int f dx\times \int g dx$$

ثانیاً: تساوی $\frac{۱}{\cos x}=\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲ x}}$ در حالت کلی برقرار **نمی‌باشد**. در واقع داریم:

$$\sqrt{\bigcirc^۲}=|\bigcirc|$$

۱۰ حاصل $\int(\tan^2 x-\cot^2 x)dx$ کدام است؟

برگرفته از کتاب درسی | پاسخ: ۲

۱) $\tan x-\cot x+C$ ۲) $\tan x+\cot x+C$ ۳) $\tan 2x+C$ ۴) $\cot 2x+C$

با توجه به فرمول‌ها باید در کنار $\tan^2 x$ و $\cot^2 x$ عدد یک قرار داشته باشد، پس داریم:

$$\int(\tan^2 x-\cot^2 x)dx \xlongequal{\text{عدد ۱ را اضافه و کم می‌کنیم.}} \int(\tan^2 x-\cot^2 x+1-1)\,dx=\int(\tan^2 x+1)dx-\int(1+\cot^2 x)dx$$

$$=\tan x-(-\cot x)+C=\tan x+\cot x+C$$

۱۱ حاصل $\int\frac{xe^x-1}{x}dx$ کدام است؟

تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۲

۱) $e^x+\ln|x|+C$ ۲) $e^x-\ln|x|+C$

۳) $e^x-\frac{1}{x}+C$ ۴) $e^x+\frac{1}{x}+C$

$$\int\frac{xe^x-1}{x}dx \xlongequal{\text{تفکیک کسر}} \int\left(\frac{\cancel{x}e^x}{\cancel{x}}-\frac{1}{x}\right)dx=\int e^x dx-\int\frac{1}{x}dx=e^x-\ln|x|+C$$

۴ کسرهایی با مخرج بیش از یک جمله

برای محاسبه‌ی انتگرال این‌گونه کسرها، یکی از راه‌های اصلی استفاده از اتحاد و تجزیه و ... برای ساده کردن عبارت می‌باشد.

مثلاً: $\int\frac{x^2-1}{x-1}dx \xlongequal[\text{مزدوج}]{\text{اتحاد}} \int\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}dx=\int(x+1)dx=\frac{x^2}{2}+x+C$

۱۲ با شرط $x>1$ داریم: $\int\frac{3-3x}{1-\sqrt{x}}dx=x.f(x)+C$، $f(x)$ برابر کدام است؟

داخل تجربی ۹۰ | پاسخ: ۱

۱) $3+2\sqrt{x}$ ۲) $3+\sqrt{x}$ ۳) $3x-\sqrt{x}$ ۴) $2x-3\sqrt{x}$

$$\int\frac{3-3x}{1-\sqrt{x}}dx=\int\frac{3\underbrace{(1-x)}}{1-\sqrt{x}}dx=\int\frac{3\overbrace{\cancel{(1-\sqrt{x})}(1+\sqrt{x})}^{\text{اتحاد مزدوج}}}{\cancel{1-\sqrt{x}}}dx=\int 3\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$=3\left(x+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)+C=3x+2x\sqrt{x}+C=x(3+2\sqrt{x})+C \xRightarrow[\text{صورت تست}]{\text{مقایسه با}} f(x)=3+2\sqrt{x}$$

۱۳ حاصل $\int\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx$ برابر کدام است؟

خارج تجربی ۸۶ | پاسخ: ۱

۱) $x+\sin x+C$ ۲) $x-\sin x+C$

۳) $-x+\cos x+C$ ۴) $x-\cos x+C$

$$\int\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}dx=\int\frac{\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x)}{\cancel{1-\cos x}}dx=\int(1+\cos x)dx=x+\sin x+C$$

۱۴ با شرط $x\neq k\pi+\frac{\pi}{4}$، حاصل $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$ کدام است؟

داخل تجربی ۹۲ | پاسخ: ۱

۱) $\sin x-\cos x+C$ ۲) $\sin x+\cos x+C$ ۳) $-\sin x+\cos x+C$ ۴) $-\sin x-\cos x+C$

$$\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}dx \xlongequal[\text{مزدوج}]{\text{اتحاد}} \int\frac{\cancel{(\cos x-\sin x)}(\cos x+\sin x)}{\cancel{(\cos x-\sin x)}}dx$$

$$=\int(\cos x+\sin x)dx=\sin x-\cos x+C$$

۵ محاسبه‌ی $\int f(ax+b)dx$

برای محاسبه‌ی $\int f(ax+b)\,dx$، کافی است در فرمول‌های انتگرال‌گیری به جای x، $ax+b$ قرار داده و سپس $\frac{1}{a}$ را در جواب انتگرال ضرب کنیم.

مثلاً: $\int \cos(\underset{a}{3}x+4)dx \xrightarrow[x\to(3x+4)]{\int \cos x dx=\sin x+C} \frac{1}{3}\sin(3x+4)+C \xrightarrow{\text{حالت کلی}} \int \cos(ax+b)dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$

مثلاً: $\int \frac{1}{\underset{a}{2}x-1}dx \xrightarrow[x\to(2x-1)]{\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C} \frac{1}{2}\ln|2x-1|+C \xrightarrow{\text{حالت کلی}} \int \frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$

۱۵ حاصل $\int \frac{3x}{3x-1}dx$ کدام است؟

برگرفته از کتاب درسی | پاسخ: ۳

۱) $x+\ln|3x-1|+C$
۲) $\frac{1}{3}\ln|3x-1|-x+C$
۳) $x+\frac{1}{3}\ln|3x-1|+C$
۴) $\ln|3x-1|-3x+C$

چون اتحاد یا تجزیه‌ی خاصی به چشم نمی‌خورد، سعی می‌کنیم شبیه عبارت مخرج را در صورت ایجاد کرده و سپس از تفکیک کسر کمک بگیریم:

$$\int \frac{3x}{3x-1}dx=\int \frac{3x-1+1}{3x-1}dx=\int\left(\frac{\cancel{3x-1}}{\cancel{3x-1}}+\frac{1}{3x-1}\right)dx=x+\frac{1}{3}\ln|3x-1|+C$$

۱۶ حاصل $\int \left(\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}\right)dx$ کدام است؟

برگرفته از کتاب درسی | پاسخ: ۴

۱) $\frac{x}{2}+x^2+\frac{1}{x+1}+C$
۲) $\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{x+1}+C$
۳) $\frac{(x+1)^2}{2}-x+\frac{1}{(x+1)^2}+C$
۴) $\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{x+1}+C$

$$\int \frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}dx=\int \frac{x^3+3x^2+3x+1+1}{(x+1)^2}dx=\int \frac{(x+1)^3+1}{(x+1)^2}dx \overset{\text{تفکیک کسر}}{=\!=} \int \frac{(x+1)^3}{(x+1)^2}dx+\int \frac{1}{(x+1)^2}dx$$

$$=\int (x+1)dx+\int (x+1)^{-2}dx=\frac{x^2}{2}+x+\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+C=\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{x+1}+C$$

۶ یکی کردن انتگرال‌ها

برخی مواقع برای محاسبه‌ی انتگرال‌ها می‌توانیم از خاصیت زیر استفاده کنیم:

$$\boxed{\int f(x)dx \pm \int g(x)dx=\int (f(x)\pm g(x))dx}$$

دید ویژه: از این خاصیت زمانی استفاده می‌شود که محاسبه‌ی تک‌تک انتگرال‌ها کار آسانی نمی‌باشد ولی یکی کردن انتگرال‌ها موجب دستیابی به فرمولی خاص یا ساده شدن عبارت می‌شود.

مثلاً: $\int \sin^2 x dx+\int \cos^2 x dx \xrightarrow[\text{انتگرال‌ها}]{\text{یکی کردن}} \int (\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1})dx=\int 1dx=x+C$

۱۷ حاصل $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x-\cos x}dx-\int \frac{\cos^2 x}{\sin x-\cos x}dx$ کدام است؟

برگرفته از کتاب درسی | پاسخ: ۴

۱) $\sin x+\cos x+C$
۲) $\cos x-\sin x+C$
۳) $\sin^2 x-\cos^2 x+C$
۴) $\sin x-\cos x+C$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\sin x-\cos x}dx-\int \frac{\cos^2 x}{\sin x-\cos x}dx=\int \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x-\cos x}dx=\int \frac{(\sin x+\cos x)\cancel{(\sin x-\cos x)}}{\cancel{\sin x-\cos x}}dx=-\cos x+\sin x+C$$

۷ روش تغییر متغیر در انتگرال

گاهی دیده می‌شود که مشتق یک قسمت از عبارت، در آن ضرب شده است. این شروع بحث تغییر متغیر است!

◀ **روش ویژه:** برای استفاده از تغییر متغیر کافی است عبارتی که مشتق آن وجود دارد را u و مشتق آن به همراه dx را du بگیریم و انتگرال‌گیری را برحسب u انجام دهیم.

مثلاً: $\int 2x\sin x^2 dx \xrightarrow[\text{را کنار } dx \text{ می‌گیریم } 2x]{\text{می‌دانیم مشتق } x^2 \text{، } 2x \text{ می‌شود.}} \int \sin x^2 (2xdx) \xrightarrow[du=2xdx]{u=x^2} \int \sin u du = -\cos u + C \xrightarrow{u=x^2} -\cos x^2 + C$

دید ویژه: همیشه این‌طور نیست که مشتق را حاضر و آماده برای شما قرار داده باشند، ولی معمولاً با ضرب و تقسیم کردن کل عبارت در یک عدد مناسب، می‌توان عبارت مشتق را ساخت. هم‌چنین کمان عبارت‌های مثلثاتی یا مخرج کسرها را می‌توان مهم‌ترین کاندیداها برای تغییر متغیر دانست. مثلاً همان‌طور که دیدید در $\sin x^2$، کمان x^2 را برای تغییر متغیر در نظر گرفتیم.

دید ویژه: مبحث تغییر متغیر فقط در یکی از تمرینات کتاب مطرح شده و تاکنون در کنکور از آن سوالی نیامده است. بنابراین در صورت طرح تست از این قسمت، بعید است طراح به سراغ مسائل خیلی پیچیده برود.

◀ **۱۸** حاصل $\int \frac{xdx}{x^2+1}$ کدام است؟

تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۲

۱) $\ln|x^2+1|+C$ ۲) $\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C$ ۳) $2\ln|x^2+1|+C$ ۴) $4\ln|x^2+1|+C$

می‌دانیم مشتق x^2+1 برابر $2x$ می‌شود. اما در صورت کسر، فقط x وجود دارد. پس کل عبارت را در ۲ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{2}{2}\int \frac{xdx}{x^2+1} \xrightarrow[\text{را داخل انتگرال می‌بریم.}]{\text{عدد ۲ در صورت کسر}} \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+1} \xrightarrow[du=2xdx]{u=x^2+1} \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u|+C \xrightarrow{u=x^2+1} \frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C$$

۸ انتگرال معین

اگر f تابعی پیوسته باشد، نماد $\int_a^b f(x)dx$ را انتگرال معین تابع f از a تا b نامیده و a و b را حدود انتگرال‌گیری می‌گویند. برای محاسبه‌ی انتگرال معین مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحله‌ی ۱: ابتدا انتگرال نامعین $\int f(x)dx$ را با توجه به روش‌های بیان شده به‌دست می‌آوریم. البته از نوشتن C صرف‌نظر می‌کنیم. به انتگرال به‌دست آمده، تابع اولیه گفته و آن را با $F(x)$ نمایش می‌دهند.

مرحله‌ی ۲: a و b را در $F(x)$ قرار داده و حاصل انتگرال معین را به صورت زیر می‌یابیم.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

◀ **تذکر:** عبارت $F(b)-F(a)$ را با نماد $F(x)\Big|_a^b$ نیز نمایش می‌دهند.

◀ **مثال:** حاصل $\int_{-1}^{2} x^2 dx$ را بیابید.

مرحله‌ی ۱: حاصل $\int x^2 dx$ را می‌یابیم که برابر $\frac{x^3}{3}$ می‌شود.

مرحله‌ی ۲: قرار دادن $x=2$ و $x=-1$ در عبارت حاصل یعنی در $\frac{x^3}{3}$ و کم کردن آن‌ها از هم به‌صورت زیر:

$$\int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

خواص انتگرال معین

۱ هرگاه حدود انتگرال‌گیری با هم مساوی باشند $(a=b)$، حاصل انتگرال معین صفر است.

$$\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}$$

۲ برای شکستن یک انتگرال به دو یا چند انتگرال دیگر از فرمول مقابل استفاده می‌کنیم:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$$

۳ اگر جای حدود انتگرال‌گیری با هم عوض شود، حاصل انتگرال قرینه می‌شود.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}$$

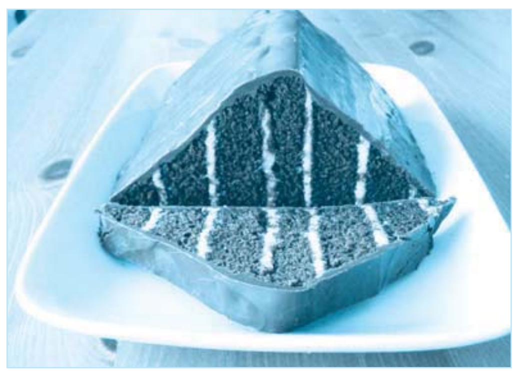
فصل ششم

هندسه

از فصل هندسه، چهار سؤال در کنکور می‌آید که مدت‌ها است کم یا زیاد نشده‌اند و جای آن‌ها در انتهای سؤالات ریاضی است. کتاب هندسه چهار فصل دارد که از هر فصل معمولاً یک سؤال در کنکور می‌آید. زدن تست‌های هندسه همیشه برای دانش‌آموزان تجربی سخت بوده و دانش‌آموزان خوب نیز بعضاً نمی‌توانند سؤالات آن را به‌راحتی حل کنند.

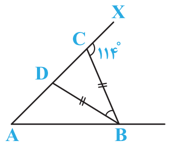
در کتاب حاضر هر فصل در یک بخش آمده است. به بچه‌های متوسط توصیه می‌شود حتماً تست مربوط به فصل ۱ و حتی ۳ را بزنند. درسنامه‌ها طوری هستند که بهترین راه‌حل‌ها پیشنهاد شده‌اند هم‌چنین راه‌حل‌ها طوری نوشته شده‌اند که حتی دانش‌آموزانی که تا به حال نیز به هندسه فکر نکرده‌اند، بتوانند از راه‌های مناسبی که گفته شده استفاده کنند و در کم‌ترین زمان ممکن تا حدودی خود را آماده کنند.

خیلی مهم است که یاد بگیرید بهترین روش برای حل یک مسأله‌ی هندسه کدام است و چه موقع باید از آن استفاده کنید. در بخش اول یعنی هندسه و استدلال بهترین راه‌حل‌ها و جای استفاده از آن‌ها برای مسائل مختلف آمده‌اند. در بخش دوم یعنی مساحت و قضیه‌ی فیثاغورس، تمرینات تست‌خیز در کنکور به دقت مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در بخش تشابه یک روش کاملاً جدید و منحصر به فرد برای نام‌گذاری و حل مسائل خواهید دید و در بخش شکل‌های فضایی نیز تمام فرمول‌های لازم گفته شده و شکل‌های با اهمیت و مهم به ساده‌ترین شکل مورد بررسی واقع شده‌اند.



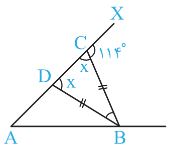
ترفند ویژه: در حل مسائل این بخش بهتر است اگر مثلث متساوی‌الساقین دیدید، سریع زوایای برابر را با x علامت‌گذاری کنید یا اگر زاویه‌ی رأس معلوم بود، زوایای کنار ساق‌ها را به کمک این نکته که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است، محاسبه کنید.

۲ در شکل مقابل زاویه‌ی $B\hat{C}X = 114^\circ$. زاویه‌ی $C\hat{B}D$ چند درجه است؟ داخل تجربی ۸۴ | پاسخ: ۳



۱) ۴۴ ۲) ۴۶

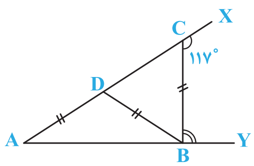
۳) ۴۸ ۴) ۵۲



ابتدا طبق ترفند ویژه، زوایای کنار ساق را x می‌نامیم. به‌سرعت می‌توان x را محاسبه نمود. داریم:

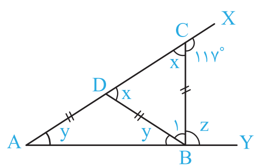
$x = 180^\circ - 114^\circ = 66^\circ \Rightarrow$ زاویه‌ی رأس $= C\hat{B}D = 180^\circ - 2x = 180^\circ - 132^\circ = 48^\circ$

۳ در شکل مقابل $B\hat{C}X = 117^\circ$. زاویه‌ی $C\hat{B}Y$ چند درجه است؟ خارج تجربی ۸۴ | پاسخ: ۲



۱) ۹۳ ۲) ۹۴/۵

۳) ۹۵/۵ ۴) ۹۶



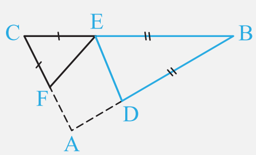
ابتدا به سرعت زوایای کنار ساق‌های مثلث BCD را با x و زوایای کنار ساق مثلث ABD را با y نام‌گذاری می‌کنیم. داریم:

$x = 180^\circ - 117^\circ = 63^\circ \qquad (*)$

$x =$ زاویه‌ی خارجی مثلث $ABD \Rightarrow x = 2y \Rightarrow y = \frac{x}{2} \overset{(*)}{\Rightarrow} y = \frac{63^\circ}{2} = 31/5^\circ$

$z =$ زاویه‌ی خارجی مثلث $ABC = x + y = 63^\circ + 31/5^\circ = 94/5^\circ$

۳ شکل‌های شامل دو مثلث متساوی‌الساقین خاص



دیر ویژه: در سؤالات هندسه‌ی کنکور از فصل (۱)، شکل‌های بسیاری وجود دارد که شامل دو مثلث متساوی‌الساقین می‌باشند. مثلاً شکل مقابل شامل دو مثلث متساوی‌الساقین BDE و CEF می‌باشد. برای حل سؤالات این قسمت به روش زیر خوب دقت کنید:

◀ **روش ویژه:** برای حل مسأله گام‌های زیر را به ترتیب اجرا کنید:

گام ۱: به سرعت نگاه کنید که آیا در شکل داده شده ساق‌هایی از مثلث‌ها وجود دارند که روی یک خط واقع باشند یا نه. مثلاً در شکل بالا ساق‌های BE و CE روی یک خط قرار دارند.

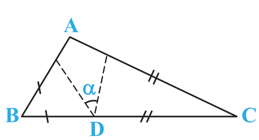
گام ۲: سریعاً زاویه‌ی بین دو ساق دیگر یا امتداد آن‌ها را x بنامید. در شکل، دو ساق دیگر یعنی BD و CF با هم تقاطع ندارند، اما امتداد آن‌ها در A به هم می‌رسند، پس $\hat{A} = x$.

گام ۳: زاویه‌ی **حاده‌ی** بین قاعده‌های دو مثلث متساوی‌الساقین یا امتداد آن‌ها را y بنامید. در شکل بالا مشخص است که قاعده‌های مثلث‌ها DE و EF هستند، پس $F\hat{E}D = y$.

گام ۴: در این شکل‌ها همواره داریم $y = 90^\circ - \frac{x}{2}$. یعنی زاویه‌ی حاده‌ی بین قاعده‌ها به کمک زاویه‌ی بین ساق‌ها به‌دست می‌آید.

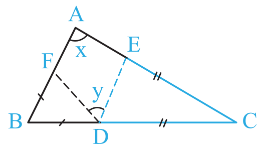
روش بالا را یک بار دیگر مرور کنید. این روش برای حل خیلی از تست‌ها به کار می‌رود، ولی باید گام‌های بالا را چند بار اجرا کنید تا به راحتی هر تستی را در این باره بزنید.

۴ در شکل مقابل زاویه‌ی $\hat{A} = 112^\circ$ و دو مثلث کناری، متساوی‌الساقین‌اند. زاویه‌ی α چند درجه است؟ داخل تجربی ۸۵ | پاسخ: ۲



۱) ۳۲ ۲) ۳۴

۳) ۳۶ ۴) ۳۸



گام ۱: دو مثلث متساوی‌الساقین BDF و CED را ببینید. ساق‌های CD و BD روی یک خط قرار دارند.

گام ۲: امتداد ساق‌های دیگر یعنی BF و CE در A به هم می‌رسند. $(A = x)$

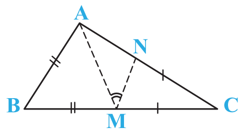
گام ۳: قاعده‌های مثلث‌های متساوی‌الساقین، ED و FD هستند که در D به هم می‌رسند. $(F\hat{D}E = y)$

گام ۴: حال از فرمول بیان شده در درسنامه، زاویه‌ی خواسته شده به راحتی به‌دست می‌آید:

$$y = ۹۰^\circ - \frac{x}{۲} \xRightarrow{x = A = ۱۱۲^\circ} ۹۰^\circ - \frac{۱۱۲^\circ}{۲} = ۳۴^\circ$$

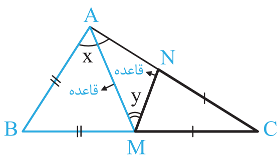
۵ در شکل مقابل، دو مثلث متساوی‌الساقین‌اند و $\widehat{M} = ۴۳^\circ$، اندازه‌ی زاویه‌ی $B\hat{A}C$ چند درجه است؟

خارج تجربی ۹۲ | پاسخ: ۲



۱) ۹۳ ۲) ۹۴

۳) ۹۶ ۴) ۹۷



گام ۱: دو ساق MC و MB از مثلث‌های متساوی‌الساقین CNM و AMB روی یک خط قرار دارند.

گام ۲: امتداد ساق‌های دیگر یعنی AB و CN در A به هم می‌رسند. $(\hat{A} = x)$

گام ۳: قاعده‌ها (یعنی NM و AM) در M به هم می‌رسند. $(A\widehat{M}N = y)$

گام ۴: طبق فرمول درسنامه به راحتی زاویه‌ی خواسته شده به‌دست می‌آید:

$$y = ۹۰^\circ - \frac{x}{۲} \xRightarrow{y = ۴۳^\circ} ۴۳^\circ = ۹۰^\circ - \frac{x}{۲} \Rightarrow \frac{x}{۲} = ۴۷^\circ \Rightarrow x = B\hat{A}C = ۹۴^\circ$$

۴ یک روش جالب برای حل برخی مسائل

ترفند ویژه: برخی سؤالات کنکور در این بخش، هیچ شکلی ندارند. این شما هستید که باید به کمک متن تست، شکل را رسم کنید و سپس زاویه‌ی خواسته شده را بیابید. برای این نوع تست‌ها یک پیشنهاد ویژه داریم. اگر تستی، شرایطی که در دید ویژه‌ی زیر بیان می‌شود را داشته باشد، کافیست آن را دقیق رسم کرده و خودتان زاویه را به کمک نقاله اندازه بگیرید!! به هر حال کسی در کنکور موفق است که در زمان لازم از بهترین روش ممکن استفاده نماید. این پیشنهاد در حل برخی مسائل دشوار مثل سؤالی که در کنکور خارج از کشور ۹۲ آمده بود و جلوتر می‌بینید واقعاً مفید و کاربردی است.

دید ویژه: تمام سؤالاتی که زاویه خواسته می‌شود قابل رسم هستند ولی باید به موارد زیر خوب دقت کنید تا بدانید کجا این روش می‌تواند سودمند باشد:

۱ در مسائلی که رسم دقیق کاری دشوار است یا شکل اولیه وجود دارد (مثل تمام تست‌های قبلی) و رسم مجدد شکل آسان و به‌صرفه نیست، این کار توصیه نمی‌شود.

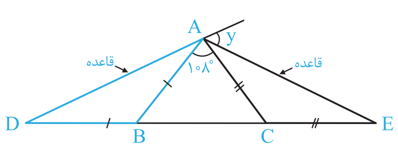
۲ در مواردی که اعداد گزینه‌ها بسیار نزدیک هم هستند، این کار با ریسک همراه است و توصیه نمی‌شود.

۶ در مثلث ABC زاویه‌ی $\hat{A} = ۱۰۸^\circ$ است. ضلع BC را از هر دو طرف به اندازه‌های $BD = BA$ و $CE = CA$ امتداد می‌دهیم. کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی مثلث ADE چند درجه است؟

داخل تجربی ۹۳ | پاسخ: ۳

۱) ۲۴ ۲) ۳۲ ۳) ۳۶ ۴) ۵۴

روش اول: صورت سؤال شکل ندارد و باید خودمان شکل را رسم کنیم. پس قطعاً یک کار خوب این است که شکل را دقیق کشیده و خودمان زاویه‌ی ADE را اندازه‌گیری کنیم. طبق صورت تست، ابتدا زاویه‌ی ۱۰۸° را کشیده و مثلث را رسم می‌کنیم. سپس دقیقاً به اندازه‌ی اضلاع AB و AC، از دو طرف ضلع BC امتداد داده و در نهایت زاویه‌ی خواسته شده را خودمان اندازه‌گیری می‌کنیم.



روش دوم: بعد از رسم تقریبی اولیه، دو مثلث متساوی‌الساقین ACE و ABD دیده می‌شوند. داریم:

گام ۱: دو ساق CE و BD روی یک خط قرار دارند پس شرایط استفاده از فرمول درسنامه‌ی قبل وجود دارد.

گام ۲: دو ساق دیگر یعنی AC و AB با یک‌دیگر زاویه‌ی ۱۰۸° می‌سازند، پس $x = ۱۰۸^\circ$.

گام ۳: زاویه‌ی حاده‌ی بین قاعده AE و امتداد AD را y نامگذاری می‌کنیم.

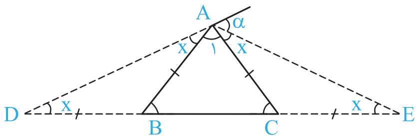
گام ۴: طبق فرمول داریم: $y = ۹۰^\circ - \frac{x}{۲} = ۹۰^\circ - \frac{۱۰۸^\circ}{۲} = ۳۶^\circ$

۷ **در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، قاعده‌ی BC را از هر دو طرف به اندازه‌ی ساق‌ها، تا نقاط D و E امتداد می‌دهیم. در مثلث ADE کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی، چند برابر کوچک‌ترین زاویه‌ی داخلی آن است؟**

خارج تجربی ۹۳ | پاسخ: ۳

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳

روش اول: باز هم با توجه به گزینه‌ها بهترین راه، رسم دقیق شکل و اندازه‌گیری زوایا است. (به عهده‌ی خودتان)



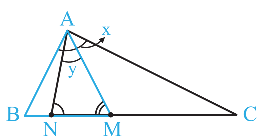
روش دوم: در واقع باید ببینیم α چند برابر کوچک‌ترین زاویه‌ی داخلی (D یا E) می‌باشد. ابتدا به سرعت زوایا را نامگذاری می‌کنیم. چون دو مثلث ACE و ABD مساویند پس $E = D$. با توجه به شکل داریم:

α، دو برابر x است. $\alpha \Rightarrow \alpha = \hat{D} + \hat{E} \xlongequal{\hat{D}=\hat{E}=x} ۲x \Rightarrow$ زاویه‌ی خارجی مثلث ADE است.

۸ **در مثلث ABC بر روی ضلع BC پاره‌خط‌های BM = BA و CN = CA را جدا می‌کنیم. اگر زاویه‌ی $\hat{A} = ۷۲^\circ$ باشد، زاویه‌ی $M\hat{A}N$ چند درجه است؟**

داخل تجربی ۸۶ | پاسخ: ۱

۱) ۵۴ ۲) ۵۲ ۳) ۴۸ ۴) ۴۲



اگر شکل را رسم کنیم، متوجه می‌شویم دو مثلث متساوی‌الساقین ABM و ACN در شکل وجود دارد. با توجه به درسنامه‌ی قبل داریم:

گام ۱: دو ساق BM و CN روی یک خط قرار دارند.

گام ۲: دو ساق دیگر یعنی AB و AC در A به هم می‌رسند. $(A = x)$

گام ۳: قاعده‌ها یعنی AN و AM نیز یک‌دیگر را در رأس A قطع می‌کنند و زاویه‌ی $M\hat{A}N$ را می‌سازند. $(M\hat{A}N = y)$

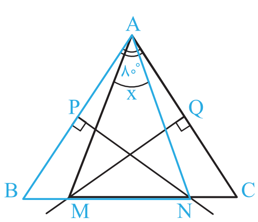
گام ۴: با توجه به فرمول درسنامه‌ی ۳ داریم:

$$y = ۹۰^\circ - \frac{x}{۲} = ۹۰^\circ - \frac{۷۲^\circ}{۲} = ۵۴^\circ$$

۹ **در مثلث ABC داریم AB = AC ، $\hat{A} = ۸۰^\circ$ و عمودمنصف‌های دو ساق مثلث، قاعده‌ی BC را در M و N قطع می‌کنند. کوچک‌ترین زاویه‌ی مثلث AMN چند درجه است؟**

داخل تجربی ۹۲ | پاسخ: ۱

۱) ۲۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰



روش اول: این سؤال به خوبی نشان می‌دهد که استفاده از یک روش ساده در یک جای مناسب چه‌قدر مهم و تعیین کننده است. در واقع یکی از سخت‌ترین سؤالات کنکور را می‌توان به سادگی و با یک رسم دقیق حل نمود و جواب را پیدا کرد.

روش دوم: با توجه به صورت سؤال، چون AB = AC است، بنابراین مثلث ABC متساوی‌الساقین می‌باشد. از طرفی چون PN و QM به ترتیب عمودمنصف‌های دو ضلع AB و AC می‌باشند و هر نقطه‌ای روی عمودمنصف از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است، پس MA = MC و NA = NB و بنابراین دو مثلث ANB و ACM نیز متساوی‌الساقین می‌باشند. چون که ساق‌های CM و BN روی یک خط هستند. بنابراین با توجه به درسنامه‌ی (۳) داریم:

$B\hat{A}C = ۹۰^\circ - \frac{\text{زاویه‌ی بین دو ساق AM و AN}}{۲}$: زاویه‌ی بین قاعده‌های AB و AC از مثلث‌های ANB و ACM

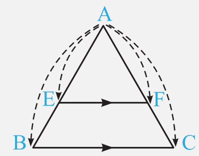
$$\Rightarrow ۸۰^\circ = ۹۰^\circ - \frac{x}{۲} \Rightarrow \frac{x}{۲} = ۱۰^\circ \Rightarrow x = ۲۰^\circ$$

بخش ۳

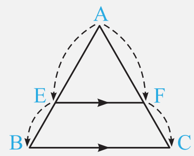
تشابه

۱۹ قضیه‌ی تالس

قضیه‌ی تالس: اگر در مثلث ABC، پاره‌خط EF موازی ضلع BC باشد. داریم:



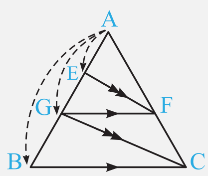
$\frac{EF}{BC}=\frac{AF}{AC}=\frac{AE}{AB}$: جزء به کل



$\frac{AF}{FC}=\frac{AE}{EB}$: جزء به جزء

◀ **تذکر:** اگر طول پاره‌خط EF یا BC خواسته شود، باید از تالس جزء به کل استفاده کنید.

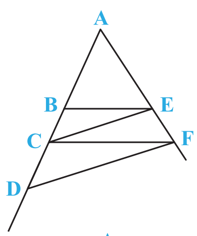
ترفند ویژه: در مسائلی که به تالس‌های تودرتو معروف‌اند (مانند شکل مقابل) و ۴ پاره‌خط دو به دو موازی در آن‌ها وجود دارد، باید ۲ بار از قضیه‌ی تالس برای حل مسأله استفاده کنید. امّا به کمک فرمول طلائی زیر می‌توانید سریعاً خواسته‌ی مسأله را بیابید و نیازی به ۲ بار نوشتن قضیه‌ی تالس ندارید.



$$\boxed{\underbrace{\text{فلش بزرگ}}_{AB}\times\underbrace{\text{فلش کوچک}}_{AE}=\left(\underbrace{\text{فلش متوسط}}_{AG}\right)^{۲}}$$

۴۷◀ در شکل روبه‌رو $BE\parallel CF$ و $DF\parallel CE$، اگر $AB=۵$ و $BC=۳$، آن‌گاه اندازه‌ی CD کدام است؟

داخل تجربی ۸۱ | پاسخ: ۲



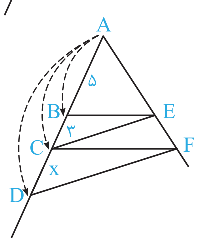
۱) ۴/۵

۲) ۴/۸

۳) ۵/۴

۴) ۵/۶

با استفاده از ترفند ویژه‌ی درسنامه، طول $CD=x$ را می‌یابیم:

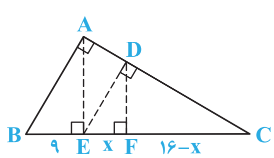


$$\underbrace{\text{فلش بزرگ}}_{AD}\times\underbrace{\text{فلش کوچک}}_{AB}=\left(\underbrace{\text{فلش متوسط}}_{AC}\right)^{۲}\Rightarrow(۵+۳)^{۲}=۵\times(۵+۳+x)$$

$$\Rightarrow ۶۴=۵(۸+x)\Rightarrow ۶۴=۴۰+۵x\Rightarrow ۵x=۲۴\Rightarrow x=\frac{۲۴}{۵}\overset{\times ۲}{\underset{\times ۲}{=}}\frac{۴۸}{۱۰}=۴/۸$$

۴۸◀ در شکل مقابل، ارتفاع هر سه مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. اندازه‌ی x کدام است؟

خارج تجربی ۸۶ | پاسخ: ۳

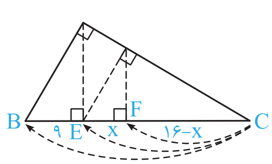


۱) ۴/۵۴

۲) ۵/۳۶

۳) ۵/۷۶

۴) ۶/۷۵



$$\underbrace{\text{فلش بزرگ}}_{CB}\times\underbrace{\text{فلش کوچک}}_{CF}=\left(\underbrace{\text{فلش متوسط}}_{CE}\right)^{۲}\Rightarrow(\cancel{x}+(۱۶-\cancel{x}))^{۲}=(۱۶-x)\times(\underbrace{۹+\cancel{x}+(۱۶-\cancel{x})}_{۲۵})$$

$$\Rightarrow ۱۶^{۲}=(۱۶-x)(۲۵)\Rightarrow ۱۶-x=\frac{۲۵۶}{۲۵}\overset{\times ۴}{\underset{\times ۴}{=}}\frac{۱۰۲۴}{۱۰۰}=۱۰/۲۴\Rightarrow x=۱۶-۱۰/۲۴=۵/۷۶$$