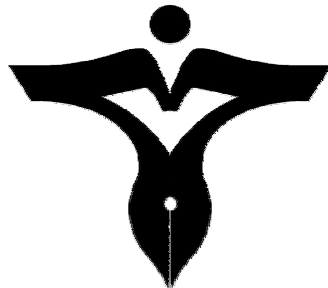


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات عمومی

و علوم پایه مرتبط با آن (جلد دوم)
ویژه‌ی دانش‌آموزان ممتاز رشته‌ی تجربی



انتشارات فوشفوان

مؤلفان : حسین شفیع زاده ، رسول حاجی زاده

۱	فصل هشتم. نقاط بحرانی، ماکزیمم و می نیمم نسبی و مطلق
۱	جلسه اول
۸	تمرین ۸-۱
۱۳	جلسه دوم
۱۹	تمرین ۸-۲
۲۹	جلسه سوم
۳۷	تمرین ۸-۳
۴۲	جلسه چهارم
۴۹	تمرین ۸-۴
۵۵	پاسخ کلیدی تمرینات فصل هشتم
۵۶	پاسخ تشریحی تمرینات فصل هشتم
۷۵	فصل نهم. سطح مخروطی
۷۵	جلسه پنجم
۸۲	تمرین ۹-۱
۸۶	جلسه ششم
۹۱	تمرین ۹-۲
۹۴	جلسه هفتم
۹۹	تمرین ۹-۳
۱۰۱	جلسه هشتم
۱۰۶	تمرین ۹-۴
۱۰۹	جلسه نهم
۱۱۵	تمرین ۹-۵
۱۱۸	پاسخ کلیدی تمرینات فصل نهم
۱۱۹	پاسخ تشریحی تمرینات فصل نهم
۱۳۷	فصل دهم. انتگرال نامعین
۱۳۷	جلسه دهم
۱۴۳	تمرین ۱۰-۱
۱۴۸	جلسه یازدهم
۱۵۳	تمرین ۱۰-۲
۱۵۶	جلسه دوازدهم
۱۶۲	تمرین ۱۰-۳
۱۶۷	جلسه سیزدهم
۱۷۱	تمرین ۱۰-۴
۱۷۳	پاسخ کلیدی تمرینات فصل دهم
۱۷۴	پاسخ تشریحی تمرینات فصل دهم

۱۸۷	فصل یازدهم. تعیین علامت - نامعادله - معادلات گنگ و گویا
۱۸۷	جلسه‌ی چهاردهم
۱۹۵	تمرین ۱-۱۱
۱۹۶	پاسخ کلیدی تمرینات فصل یازدهم
۱۹۷	پاسخ تشریحی تمرینات فصل یازدهم
۱۹۹	فصل دوازدهم. مفهوم دامنه، برد، تابع
۱۹۹	جلسه‌ی پانزدهم
۲۱۵	تمرین ۱-۱۲
۲۲۲	جلسه‌ی شانزدهم
۲۳۲	تمرین ۲-۱۲
۲۳۸	پاسخ کلیدی تمرینات فصل دوازدهم
۲۳۹	پاسخ تشریحی تمرینات فصل دوازدهم
۲۴۷	فصل سیزدهم. تصاعد حسابی و هندسی
۲۴۷	جلسه‌ی هفدهم
۲۵۵	تمرین ۱-۱۳
۲۵۹	پاسخ کلیدی تمرینات فصل سیزدهم
۲۶۰	پاسخ تشریحی تمرینات فصل سیزدهم
۲۶۳	فصل چهاردهم. نسبت‌ها و فرمول‌های مثلثات
۲۶۳	جلسه‌ی هجدهم
۲۷۴	تمرین ۱-۱۴
۲۷۸	جلسه‌ی نوزدهم
۲۸۱	تمرین ۲-۱۴
۲۸۳	پاسخ کلیدی تمرینات فصل چهاردهم
۲۸۴	پاسخ تشریحی تمرینات فصل چهاردهم
۲۸۹	فصل پانزدهم. بردار
۲۸۹	جلسه‌ی بیستم
۲۹۶	تمرین ۱-۱۵
۲۹۸	پاسخ کلیدی تمرینات فصل پانزدهم
۲۹۹	پاسخ تشریحی تمرینات فصل پانزدهم
۳۰۱	فصل شانزدهم. هندسه و استدلال
۳۰۱	جلسه‌ی بیست و یکم
۳۱۱	تمرین ۱-۱۶
۳۱۸	جلسه‌ی بیست و دوم
۳۲۴	تمرین ۲-۱۶
۳۳۳	جلسه‌ی بیست و سوم
۳۳۹	تمرین ۳-۱۶
۳۴۵	جلسه‌ی بیست و چهارم
۳۵۱	تمرین ۴-۱۶
۳۵۸	پاسخ کلیدی تمرینات فصل شانزدهم
۳۵۹	پاسخ تشریحی تمرینات فصل شانزدهم

فصل هشتم

جلسه اول

نقاط بحرانی، ماکزیمم و مینیمم نسبی و مطلق

نقطه بحرانی

تابع f با دامنه $[a, b]$ را در نظر بگیرید. نقاطی از بازه باز (a, b) که در آن نقاط مشتق برابر صفر است و یا مشتق وجود ندارد را نقاط بحرانی f می‌نامیم.

نکته ۱. اگر $[a, b]$ دامنه‌ی f باشد آن‌گاه a و b نقاط بحرانی نمی‌باشند.

نکته ۲. در حالت کلی نقطه‌ی $c \in D_f$ را نقطه بحرانی f می‌نامیم هرگاه $f'(c) = 0$ و یا $f'(c)$ موجود نباشد. (به جز ابتدا و انتهای بازه‌های بسته)

مثال ۱. نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید.

$$۱) y = x^3 - 3x + 5$$

$$۲) y = x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$$

$$۳) y = |x^3 + 2x^2 + x|$$

$$۴) y = \begin{cases} x^2 - x & x \leq 1 \\ x^3 - 4x & x > 1 \end{cases}$$

$$۵) y = [x]$$

حل:

$$۱) y' = 3x^2 - 3$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \quad \text{نقاط بحرانی}$$

$$۲) y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$$

در نقاط $x = \pm \frac{1}{3}$ مشتق برابر صفر است و در نقطه $x = 0$ مشتق وجود ندارد. پس مجموعه‌ی نقاط بحرانی برابر است با $\left\{0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$

$${}^3)y = |x(x+1)| = \begin{cases} x(x+1)^2 & x \geq 0 \\ -x(x+1)^2 & x < 0 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} (x+1)^2 + 2x(x+1) & x > 0 \\ -(x+1)^2 - 2x(x+1) & x < 0 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} (x+1)(3x+1) & x > 0 \\ -(x+1)(3x+1) & x < 0 \end{cases}$$

در نقاط -1 و $x = -\frac{1}{3}$ مشتق برابر صفر است. در نقطه $x = 0$ چون مشتق چپ و راست برابر نیستند پس مشتق وجود ندارد. بنابراین

مجموعه نقاط بحرانی عبارت است از $\left\{0, -\frac{1}{3}, -1\right\}$

$${}^4)y' = \begin{cases} 2x-1 & x < 1 \\ 3x^2-4 & x > 1 \end{cases}$$

در نقاط $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ و $x = \frac{1}{3}$ مشتق برابر صفر و در نقطه $x = 1$ مشتق وجود ندارد. پس این تابع سه نقطه بحرانی دارد.

$${}^5)y' = \begin{cases} 0 & x \notin Z \\ \text{وجود ندارد} & x \in Z \end{cases}$$

بنابراین تمام اعداد حقیقی نقاط بحرانی تابع‌اند.

◀ نکته‌ی ۳. در تابع $y = |f(x)|$ نقاط بحرانی عبارتند از ریشه‌های $f(x) = 0$ و $f'(x) = 0$ (ف مشتق‌پذیر است)

✍ تست ۱. مجموع طول‌های نقاط بحرانی تابع $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۵

پاسخ: گزینه‌ی ۴

$$y' = \frac{3x^2 - 6x}{3\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2 + 2)^2}}$$

نقاط بحرانی: $3x^2 - 6x = 0$, $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$

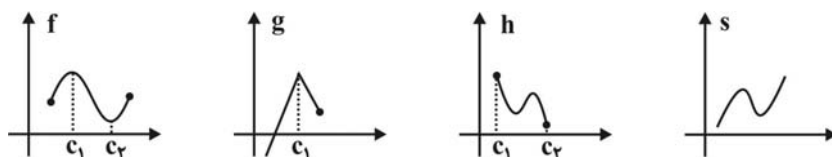
$$3x(x-2) = 0, x^3 - 3x^2 + 2 = 0$$

نقاط بحرانی عبارتند از صفر و ۲ و ۱ و $1 \pm \sqrt{3}$ مجموع این نقاط برابر ۵ است.

✍ ماکزیمم و مینیمم مطلق

تابع f با دامنه $[a, b]$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $c \in [a, b]$ باشد. اگر برای هر $x \in [a, b]$ داشته باشیم $f(x) \leq f(c)$ گوئیم f در c ماکزیمم مطلق دارد و $f(c)$ را ماکزیمم مطلق f می‌نامیم. بطور مشابه اگر برای هر $x \in [a, b]$ داشته باشیم $f(x) \geq f(c)$ گوئیم f در c مینیمم مطلق دارد و $f(c)$ را مینیمم مطلق f می‌نامیم.

◀ نکته‌ی ۴. در حالت کلی بیش‌ترین عرض یک تابع را ماکزیمم مطلق آن تابع و کم‌ترین عرض یک تابع را مینیمم مطلق آن تابع می‌نامیم.

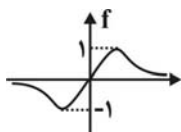


به شکل‌های زیر توجه کنید.

در توابع f و h ماکزیمم مطلق برابر $f(c_1)$ و $h(c_1)$ و مینیمم مطلق برابر $f(c_2)$ و $h(c_2)$ است. در تابع g ماکزیمم مطلق برابر $g(c_1)$ است. این تابع مینیمم مطلق ندارد و تابع s نه ماکزیمم مطلق دارد و نه مینیمم مطلق.

◀ نکته‌ی ۵. ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق در صورت وجود منحصر به فردند.

◀ نکته‌ی ۶. اگر m و M به ترتیب مینیمم مطلق و ماکزیمم مطلق تابع پیوسته f باشند آن‌گاه برد f برابر $[m, M]$ است. مانند شکل زیر.



$$\Rightarrow \text{برد } f = [-1, 1]$$

✎ مثال ۲. ماکزیمم و مینیمم مطلق توابع زیر را بیابید.

۱) $y = 3 \sin x - 1$

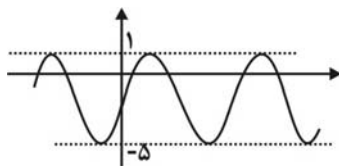
۲) $y = |x| - |x - 1|$

۳) $y = x[x] \quad -1 \leq x \leq 2$

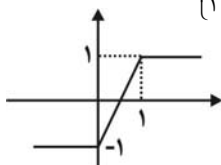
حل:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3 \sin x \leq 3 \Rightarrow -5 \leq 3 \sin x - 2 \leq 1 \Rightarrow -5 \leq y \leq 1$$

پس مینیمم مطلق برابر -5 و ماکزیمم مطلق برابر 1 است.



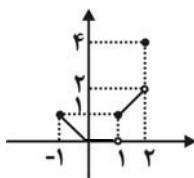
$$۲) y = |x| - |x - 1| = \begin{cases} -1 & x \leq 0 \\ 2x - 1 & 0 < x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$$



با توجه به نمودار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق به ترتیب برابر 1 و -1 است.

۳)

$$\begin{cases} -1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = -x \\ 0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = 0 \\ 1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = x \\ x = 2 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$$



کم‌ترین مقدار تابع برابر صفر و بیش‌ترین مقدار تابع برابر 4 است.